Épreuve Composite

E C G

DS n°3

Option économique

MATHEMATIQUES

5 Octobre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
Les questions précédées de (*) sont réservées aux cubes.

Exercice n°1

Une urne contient une boule blanche et une boule noire, les boules étant indiscernables au toucher.
On y prélève une boule, chaque boule ayant la même probabilité d'être tirée, on note sa couleur, et on la remet dans l'urne avec c boules de la couleur de la boule tirée. On répète cette épreuve, on réalise ainsi une succession de n tirages ($n \geqslant 2$).

Partie I : Étude du cas $c = 0$.

On effectue donc ici n tirages avec remise de la boule dans l'urne.
On note X la variable aléatoire réelle égale au nombre de boules blanches obtenues au cours des n tirages et Y la variable aléatoire réelle définie par :

$$\begin{cases} Y = k & \text{si l'on obtient une boule blanche pour la première fois au } k^{ième} \text{ tirage.} \\ Y = 0 & \text{si les } n \text{ boules tirées sont noires.} \end{cases}$$

1. Déterminer la loi de X. Donner la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$.
2. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, déterminer la probabilité $P(Y = k)$ de l'événement $(Y = k)$, puis déterminer $P(Y = 0)$.
3. Vérifier que :
$$\sum_{k=0}^{n} P(Y = k) = 1.$$
4. Pour $x \neq 1$ et n entier naturel non nul, montrer que :
$$\sum_{k=1}^{n} kx^k = \frac{nx^{n+2} - (n+1)x^{n+1} + x}{(1-x)^2}.$$
5. En déduire $E(Y)$.

Partie II :Étude du cas $c \neq 0$.

On considère les variables aléatoires $(X_i)_{1 \leqslant i \leqslant n}$ définies par :

$$\begin{cases} X_i = 1 & \text{si on obtient une boule blanche au } i^{\text{ème}} \text{ tirage.} \\ X_i = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On définit alors, pour $2 \leqslant p \leqslant n$, la variable aléatoire Z_p, par :

$$Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i.$$

6. Que représente la variable Z_p ?
7. Donner la loi de X_1 et l'espérance $E(X_1)$ de X_1.
8. Déterminer la loi du couple (X_1, X_2). En déduire la loi de X_2 puis l'espérance $E(X_2)$.
9. Déterminer la loi de probabilité de Z_2.
10. Déterminer le support de Z_p.
11. Soit $p \leqslant n - 1$.
    (a) Déterminer $P_{[Z_p = k]}(X_{p+1} = 1)$ pour $k \in Z_p(\Omega)$.
    (b) En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que :
    $$P(X_{p+1} = 1) = \frac{1 + cE(Z_p)}{2 + pc}.$$
    (c) En déduire que X_p est une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$.
    (On raisonnera par récurrence sur p : les variables X_1, X_2, ..., X_p étant supposées suivre une loi de de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{2}$, et on calculera $E(Z_p)$).

Exercice n°2

Partie A : Étude de la matrice A

1. Calculer les matrices $(A - I)^2$ et $(A - I)^3$.
2. La matrice A est-elle inversible ?

Partie B : Recherche d'une solution particulière

On note pour tout $x \in]-1, 1[, \varphi(x) = \sqrt{1 + x}$.

1. Justifier que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]-1, 1[$, et déterminer les valeurs de $\varphi'(0)$ et $\varphi''(0)$.
2. En utilisant la formule de Taylor-Young pour φ en 0 à l'ordre 2 , déterminer un réel α non nul tel que :
   $$\sqrt{1 + x} = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2 + x^2 \varepsilon(x) \quad \text{avec} \lim_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$$
3. On note $P(x) = 1 + \frac{1}{2}x + \alpha x^2$ la fonction polynomiale de degré 2 ainsi obtenue. Développer $(P(x))^2$.
4. Soit $C = A - I$. En utilisant les résultats de la Question 1, vérifier que $(P(C))^2 = A$.
   Expliciter alors une matrice M telle que $M^2 = A$.

Partie C : Résolution complète de l'équation

On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice représentative dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice A.

Dans cette partie, on pose : $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Soient u, v et w les vecteurs définis par : $\begin{cases} w = (1,0,1) \\ v = f(w) - w \\ u = f(v) - v \end{cases}$
   (a) Calculer les vecteurs v et u.
   (b) Démontrer que la famille $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) Déterminer la matrice représentative de f dans la base $\mathcal{B}'$.
   (d) (*) En déduire qu'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ inversible telle que $T = P^{-1}AP$.
2. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   (a) Montrer que si $N^2 = T$, alors $NT = TN$. En déduire alors que N est de la forme :
   $$\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$
   où a, b et c sont trois réels.
   (b) Démontrer alors que l'équation matricielle $N^2 = T$ admet exactement deux solutions : N_1 et N_2.
3. Montrer que l'équation matricielle $M^2 = A$ d'inconnue $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ admet exactement deux solutions que l'on écrira en fonction de P, P^{-1}, N_1 et N_2.
4. L'ensemble E des matrices M appartenant à $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $M^2 = A$ est-il un espace vectoriel ?

Exercice n°3

Dans tout l'exercice, on considère

- La fonction f définie sur $\mathbb{R}\backslash\{-1\}$ par $f(x) = \dfrac{x}{(x+1)^2}$.
- La suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour $n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f(u_n)$.
- La fonction F définie sur $]-1; +\infty[$ par $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.
- La fonction g définie sur $[-1; +\infty[$ par $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{\ln(x+1)} & \text{si} \quad x \notin \{0; -1\} \\ 1 & \text{si} \quad x = 0 \\ 0 & \text{si} \quad x = -1 \end{cases}$

Partie I - Étude de la fonction f

1. Déterminer les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Déterminer les variations de f, présentées sous forme d'un tableau.

Partie II - Étude de la fonction F

3. Justifier que $F(x)$ est bien définie pour tout $x > -1$ et que F est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ensemble de définition.

4. À l'aide du changement de variable $u = t + 1$, montrer que, pour tout $x > -1$,

$$F(x) = \ln(x+1) - \frac{x}{x+1}$$

5. Déterminer les limites de F aux bornes de son ensemble de définition.

6. (a) Étudier la concavité de F. On montrera notamment que F admet un point d'inflexion dont on précisera les coordonnées.

   (b) Montrer que, pour tout $x > -1$ non nul, $F(x) > 0$.

7. Rappeler les développements limités d'ordre 2 en 0 de $\ln(1+x)$ et de $1/(1+x)$. En déduire le développement limité de $F(x)$ à l'ordre 2 en 0.

8. Préciser l'équation de la tangente à la courbe de F en 0 et leurs positions relatives.

9. Représenter l'allure de la courbe représentative de F ainsi que, sur le même graphique, la tangente en 0 .

Partie III - Étude de la suite (u_n)

10. Calculer u_1 et u_2.
11. Montrer, par récurrence, que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 < u_n \leq \dfrac{1}{n}$.
12. En déduire la convergence de (u_n) vers une limite à préciser.
13. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \dfrac{1}{u_{n+1}} - \dfrac{1}{u_n}$.

    (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$2 \leq v_n \leq 2 + \frac{1}{n}$$

    (b) En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$2(n+1) \leq \frac{1}{u_n} \leq 2(n+1) + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

14. (a) Comparer, pour k entier $k \geq 2$, $\dfrac{1}{k}$ et $\displaystyle\int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t}$.

    (b) En déduire que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq 1 + \ln(n)$$

15. Montrer que

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{1}{2n}$$

16. En déduire la nature de la série $\sum u_n$.

Partie IV - Étude de la fonction g

17. Montrer que g est continue sur son ensemble de définition.
18. Justifier que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;0[$ et sur $]0;+\infty[$, puis, pour $x \in]-1;0[\cup]0;+\infty[$, vérifier que
$$g'(x) = \frac{F(x)}{(\ln(1+x))^2}$$
19. Montrer que g est dérivable en 0 et préciser la valeur de $g'(0)$. Montrer ensuite que g est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1;+\infty[$.
20. Montrer que, pour tout $x > -1, g'(x) > 0$. En déduire les variations de g que l'on fera apparaître dans un tableau contenant aussi la limite, que l'on justifiera, de $g(x)$ en $+\infty$.
21. La fonction g est-elle dérivable en -1 ? Interpréter graphiquement.
22. Représenter l'allure de la courbe de g.