Correction ESSEC III ECo 2008 par Pierre Veuillez

Exercice 1 : Probablités discrètes

Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5, disposés en pentagone et reliés par des routes, commel'illustre le schéma ci-contre.Ils arrivent au rendez-vous à I'heure prévue, mais suite à un malentendu, P_1 se présente au site S_1 et P_2 au site S_2.Ils décident alors de partir à la recherche I'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes du complexe, avec les règles suivantes : .

– à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables ;
– les déplacements des deux personnes se font simultanément ;
– tous les choix de déplacement se font indépendamment les uns des autres.

Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.

A. Modélisatlon du problème

Pour tout entier naturel n, on définit les trois événements A_n, B_n, C_n :

– . A_n : $\ll$ les deux personnes sont sur le même site après le n-ième déplacement$\gg$
– B_n : $\ll$ les deux personnes sont sur des sites adjacents après le n-ième déplacement$\gg$
– C_n : $\ll$ les deux personnes sont à deux routes de distance après le n-ième déplacement$\gg$

On note a_n, b_n, c_n les probabilités des événements A_n, B_n, C_n.

1. La distance maximale entre deux sites est de deux routes ;
   Donc A_n, B_n, C_n.sont les seuls possibles.
   Comme ils sont de plus incompatibles,
   Conclusion : $\boxed{\text{ils forment un système complet d'événements.}}$
2. A l'instant 0, ils sont à une route de distance donc
   Conclusion : $\boxed{a_0 = 0,\ b_0 = 1,\ c_0 = 0}$
3. a) Si les deux sont à deux routes de distance, ils se retrouvent sur le même site à condition qu'ils se dirigent tout deux dans la direction qui les rapproche.

   Chacun le fait avec une probabilté de $\frac{1}{2}$ donc *Conclusion :* $\boxed{\mathrm{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}.}$

   b) S'ils sont tous les deux sur le même site, ils ne bougent plus, donc ils restent ensemble.
   Conclusion : $\boxed{P_{A_n}(A_{n+1}) = 1}$

   c) Pour cette même raison : $\mathrm{P}_{A_n}(B_{n+1}) = 0$: $\mathrm{P}_{A_n}(C_{n+1}) = 0$

   $\mathrm{P}_{B_n}(A_{n+1}) = 0$ (quand ils sont à une route de distance, car ils se croisent ou ils s'éloignent

   $\mathrm{P}_{B_n}(B_{n+1}) = \dfrac{3}{4}$ (ils se déplacent tous deux dans le même sens ; horaire avec une probabiltié $\frac{1}{2}\frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ ou antihoraire, ou ils se croisent)

   $\mathrm{P}_{B_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$ (ils se fuient)

   $\mathrm{P}_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$ (dans le sens opposé qui les réuni)

   $\mathrm{P}_{C_n}(B_{n+1}) = \dfrac{1}{4}$ (dans le sens opposé qui les rapproche)

   $\mathrm{P}_{C_n}(C_{n+1}) = \dfrac{1}{2}$ (ils se déplacent tous deux dans le même sens)

4. (A_n, B_n, C_n) est un sytème complet d'événements donc
$\mathrm{P}(A_{n+1}) = \mathrm{P}_{A_n}(A_{n+1})\,\mathrm{P}(A_n) + \mathrm{P}_{B_n}(A_{n+1})\,\mathrm{P}(B_n) + \mathrm{P}_{C_n}(A_{n+1})\,\mathrm{P}(C_n)$
Donc $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{2}c_n$ et de même
pour tout entier $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{4}c_n \\ b_{n+1} = \dfrac{3}{4}b_n + \dfrac{1}{4}c_n \\ c_{n+1} = \dfrac{1}{4}b_n + \dfrac{1}{2}c_n \end{cases}$
N.B. Vérifier la cohérence!

5. a) On a alors

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}c_{n+1} \\ &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n\right) \\ &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{8}c_n \end{aligned}$$

et comme $b_{n+1} = \dfrac{3}{4}b_n + \dfrac{1}{4}c_n$ on a $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n$ et donc

$$\begin{aligned} b_{n+2} &= \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{8}(4b_{n+1} - 3b_n) \\ &= \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n \end{aligned}$$

b) La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc résurrente linéaire du second ordre à coefficients constants.
Son équation caractéristique est $r^2 - \dfrac{5}{4}r + \dfrac{5}{16} = 0$ de discriminant $\Delta = \dfrac{25}{16} - \dfrac{20}{16} = \dfrac{5}{16}$ et donc de racines $\alpha = \dfrac{\frac{5}{4} - \frac{r5}{4}}{2} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $\beta = \frac{5+\sqrt{5}}{8}$
Donc pour tout entier n : $b_n = A\alpha^n + B\beta^n$ avec A et B solutions de
$\begin{cases} b_0 = 1 = A + B \\ b_1 = \dfrac{3}{4} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}A + \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}B \end{cases}$ donc $\begin{cases} B = 1 - A \\ \dfrac{-2\sqrt{5}}{8}A = \dfrac{3}{4} - \dfrac{5+\sqrt{5}}{8} = \dfrac{1-\sqrt{5}}{8} \end{cases}$
et $\begin{cases} B = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} \\ A = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10} \end{cases}$
Conclusion : $\boxed{b_n = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10}\left(\dfrac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^n + \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}\left(\dfrac{5+\sqrt{5}}{8}\right) = \dfrac{4}{5}\left(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}\right)}$

c) Et comme $c_n = 4b_{n+1} - 3b_n$ on a alors :

$$\begin{aligned} c_n &= 4\frac{4}{5}\left(\alpha^{n+2} + \beta^{n+2}\right) - 3\frac{4}{5}\left(\alpha^{n+1} + \beta^{n+1}\right) \\ &= \frac{4}{5}\left((4\alpha - 3)\,\alpha \cdot \alpha^n + (4\beta - 3)\,\beta \cdot \beta^{n+1}\right) \end{aligned}$$

avec .

$$\begin{aligned}
(4\alpha-3)\,\alpha &= \left(4\frac{5-\sqrt{5}}{8}-3\right)\frac{5-\sqrt{5}}{8}\\
&= -\frac{1}{4}\sqrt{5}\\
(4\beta-3)\,\beta &= \left(4\frac{5+\sqrt{5}}{8}-3\right)\frac{5+\sqrt{5}}{8}\\
&= \frac{1}{4}\sqrt{5}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{c_n=\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\beta^n-\alpha^n\right)}$

6. a) Comme (A_n,B_n,C_n) est un système complet d'événements, $a_n+b_n+c_n=1$ et

$$\begin{aligned}
a_n &= 1-b_n-c_n\\
&= 1-\frac{\sqrt{5}}{5}\left(\beta^n-\alpha^n\right)-\frac{4}{5}\left(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\right)\\
&= 1-\alpha^n\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{4}{5}\alpha\right)-\beta^n\left(\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{4}{5}\beta\right)\\
&= 1-\alpha^n\left(-\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{5-\sqrt{5}}{10}\right)-\beta^n\left(\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{5+\sqrt{5}}{10}\right)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{a_n=1-\alpha^n\frac{5-3\sqrt{5}}{10}-\beta^n\frac{5+3\sqrt{5}}{10}}$

b) Et comme $|\alpha|<1$ et $|\beta|<1$ (car $2<\sqrt{5}<3$) alors $\alpha^n\to 0$ et $\beta^n\to 0$

Conclusion : $\boxed{\lim_{n\to+\infty}a_n=1}$

c) Ne se retrouver jamais est l'événement $\bigcap_{k=1}^{+\infty}\overline{A_k}$ suite décroissante d'événements donc $\mathrm{P}\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}\overline{A_k}\right)=\lim\mathrm{P}\left(\overline{A_n}\right)=0$

Conclusion : $\boxed{\text{Les deux personnes se retrouveront presque surement.}}$

B. Nombre de déplacements avant rencontre

On définit la variable aléatoire X égale au nombre de déplacements effectués par chacune des personnes avant leur rencontre sur un même site.

1. Elles ne peuvent se retrouver qu'à partir du second déplacement.
   Conclusion : $\boxed{X(\Omega)=[[2,+\infty[[}$
2. Pour arriver sur le même site à l'instant n, il faut être à deux de distance l'instant précédent. (quand on est à un site de distance, on ne peut pas se retrouver au tour suivant)
   Donc $(X=n)=(C_{n-1}\cap A_n)$ donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(X=n) &= \mathrm{P}(C_{n-1})\,\mathrm{P}_{C_{n-1}}(A_n)\\
&= \frac{1}{4}\mathrm{P}(C_{n-1})\\
&= \frac{\sqrt{5}}{20}\left(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1}\right)
\end{aligned}$$

3. La série converge absolument et

$$\begin{aligned}
E(X) &= \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sqrt{5}}{20} n \left(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}\right) \\
&= \frac{\sqrt{5}}{20} \left[\sum_{n=2}^{+\infty} n\beta^{n-1} - \sum_{n=2}^{+\infty} n\alpha^{n-1}\right] \\
&= \frac{\sqrt{5}}{20} \left[\frac{1}{(1-\beta)^2} - 1 - \frac{1}{(1-\alpha)^2} + 1\right] \\
&= \frac{\sqrt{5}}{20} \left[\frac{1}{(1-\beta)^2} - \frac{1}{(1-\alpha)^2}\right] \\
&= \frac{\sqrt{5}}{20} \left(\frac{1}{\left(1-\frac{5+\sqrt{5}}{8}\right)^2} - \frac{1}{\left(1-\frac{5-\sqrt{5}}{8}\right)^2}\right) \\
&= \cdots = 12
\end{aligned}$$

(réduction au méme dénominateur puis quantités conjuguées)

4. et .... aucun plaisir dans ces calculs !Calculer la variance et l'écart-type de X.

Exercice 2 : Probabilités et analyse

Dans certaines situations (paris sportifs, investissements financiers...), on est amené à miser de l'argent de façon répetée sur des paris à espérance favorable. On se propose de mettre en place une stratégie afin d'optimiser les gains à long terme.
On adopte ici le cadre simplifié suivant : on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p.
Un joueur mise une partie M_n de son capital sur la réalisation de l'événement $(X_n = 1)$, pour chaque $n > 1$. La variable M_n est supposée indépendante des variables X_k, $k \in \mathbb{N}^*$
En cas de victoire, il double sa mise (son capital est donc augmenté de M_n), en cas de défaite il perd sa mise (son capital diminue de M_n).
Initialement, le joueur dispose du capital $C_0 > 0$, puis on note C_n la variable aléatoire égale au capital détenu à l'issue du $n^{ième}$ pari.
On a ainsi l'encadrement : $0 \leq M_{n+1} \leq C_n$ pour tout entier n.
Le jeu est supposé favorable, on considérera dans tout le problème : $\frac{1}{2} < p < 1$.

I. Quitte ou double

1. On a deux conditions à vérifier : pour $X_{n+1} = 0$ on doit avoir $C_{n+1} = C_n - M_{n+1}$ et pour $X_{n+1} = 1$ on doit avoir $C_{n+1} = C_n + M_{n+1}$. On résout ces conditions :
$\begin{cases} C_n + bM_{n+1} = C_n - M_{n+1} \\ C_n + (a+b) M_{n+1} = C_n + M_{n+1} \end{cases}$ si $\begin{cases} b = -1 \\ a = 2 \end{cases}$
Conclusion : $\boxed{C_{n+1} = C_n + (2X_{n+1} - 1) M_{n+1}}$

2. **N.B.** On a besoin d'une relation de récurrence sur $E(C_n)$:
On a donc $E(C_{n+1}) = E(C_n) + (2E(X_{n+1}) - 1) E(M_{n+1})$ (car X_{n+1} et M_{n+1} indépendants) et
$E(C_{n+1}) = E(C_n) + (2p - 1) E(M_{n+1})$ et on a alors par récurrence :

- Pour $n=1$: $C_0+(2p-1)\displaystyle\sum_{k=1}^{1}E(M_k)=C_0+(2p-1)E(M_1)=E(C_1)$ d'après le 1.
- Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $E(C_n)=C_0+(2p-1)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}E(M_k)$

  alors

$$\begin{aligned}E(C_{n+1}) &= E(C_n)+(2p-1)E(M_{n+1})\\ &= C_0+(2p-1)\left(\sum_{k=1}^{n}E(M_k)+E(M_{n+1})\right)\\ &= C_0+(2p-1)\sum_{k=1}^{n+1}E(M_k)\end{aligned}$$

- *Conclusion :* $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad E(C_n)=C_0+(2p-1)\displaystyle\sum_{k=1}^{n}E(M_k)}$

  Comme $(2p-1)>0$, plus $\sum_{k=1}^{n}E(M_k)$ est grande est plus $E(C_n)$ est grande. et comme $M_{k+1}\le C_k$, on aura $E(C_n)\le C_0+(2p-1)\sum_{k=1}^{n}E(C_{k-1})$ cette somme étant atteinte pour $M_{k+1}=C_k$ pour tout k.

  Conclusion : $\boxed{\text{pour maximiser } E(C_n) \text{ il faut miser tout son capital à chaque pari.}}$

3. Si l'on mise la totalité de son capital, à chaque pari, on est ruiné si $X_n=0$.
   Donc " ne pas être ruiné" est l'"événement $\cap_{n=1}^{+\infty}(X_n=1)$ de probabilité $\lim_{N\to+\infty}\mathrm{P}\left(\cap_{n=1}^{N}(X_n=1)\right)$.
   Avec $\mathrm{P}\left(\cap_{n=1}^{N}(X_n=1)\right)=p^N$ car les X_n sont indépendants, on a donc
   $\lim_{N\to+\infty}\mathrm{P}\left(\cap_{n=1}^{N}(X_n=1)\right)=0$ et donc la probabilité de ne jamais êter ruiné est nulle.

   Conclusion : $\boxed{\text{Si le joueur mise tout son capital, la ruine est quasi certaine.}}$

II. Stratégie à mises proportionnelles

La stratégie précédente étant risquée, le joueur décide d'engager dans chaque pari une fraction du capital dont il dispose : on a ainsi $M_{n+1}=\alpha C_n$, avec $\alpha\in\,]0,1[$ (indépendant de n)

1. On a $C_{n+1}=C_n+(2X_{n+1}-1)M_{n+1}=C_n+(2X_{n+1}-1)\alpha C_n$ donc
   - si $X_{n+1}=1$ alors $(1+\alpha)^{X_{n+1}}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}}C_n=(1+\alpha)C_n=C_{n+1}$
   - si $X_{n+1}=0$ alors $(1+\alpha)^{X_{n+1}}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}}C_n=(1-\alpha)C_n=C_{n+1}$

   Conclusion : $\boxed{\forall n\in\mathbb{N},\qquad C_{n+1}=(1+\alpha)^{X_{n+1}}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}}C_n.}$
2. On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$.
   S_n représente le nombre de succès pendant les n premières épreuves.
   Ces épreuves étant indépendantes et ayant la même probabilité p de succès,

   Conclusion : $\boxed{S_n\hookrightarrow\mathcal{B}(n,p) \text{ et } E(S_n)=np}$
3. On a par récurrence :
   - pour $n=1$: $(1+\alpha)^{S_1}(1-\alpha)^{1-S_1}C_0=(1+\alpha)^{X_1}(1-\alpha)^{1-X_1}C_0.=C_1$
   - Soit $n\in\mathbb{N}^*$ tel que $C_n=(1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n}C_0$

     alors

$$\begin{aligned}C_{n+1} &= (1+\alpha)^{X_{n+1}}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}}C_n\\ &= (1+\alpha)^{S_n+X_{n+1}}(1-\alpha)^{n-S_n-X_{n+1}}C_0\\ &= (1+\alpha)^{S_{n+1}}(1-\alpha)^{n-S_{n+1}}C_0\end{aligned}$$

– *Conclusion :* $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*, \qquad C_n = (1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n} C_0.}$

4. On a

$$\begin{aligned}
\frac{C_n}{C_0} &= (1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n} \text{ donc} \\
\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right) &= S_n \ln(1+\alpha) + (n-S_n)\ln(1-\alpha) \text{ car } > 0 \\
\frac{1}{n}\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right) &= \frac{S_n}{n}\ln(1+\alpha) + \left(1-\frac{S_n}{n}\right)\ln(1-\alpha) \text{ et donc} \\
E\left[\frac{1}{n}\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)\right] &= E\left[\frac{S_n}{n}\right]\ln(1+\alpha) + \left(1-E\left[\frac{S_n}{n}\right]\right)\ln(1-\alpha) \\
&= p\ln(1+\alpha) + (1-p)\ln(1-\alpha)
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E\left[\frac{1}{n}\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)\right] = p\ln(1+\alpha) + (1-p)\ln(1-\alpha)}$

Par la suite, on cherche à maximiser cette quantité, ce qui équivaut à maximiser l'espérance du *taux moyen de croissance* du capital.

III. Optimisation : le critère de Kelly

On pose, pour tout $x \in [0,1[$, $f(x) = p\ln(1+x) + (1-p)\ln(1-x)$

1. Étude de f.

   a) f est C^2 sur $]0,1[$ (car $1+x>0$ et $1-x>0$) et

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{p}{1+x} - \frac{1-p}{1-x} \\
&= \frac{2p-1-x}{1-x^2>0} \\
f''(x) &= \frac{x^2-1+2x(2p-1-x)}{(1-x^2)^2} \\
&= \frac{-x^2+2(2p-1)x-1}{(1-x^2)^2}
\end{aligned}$$

Lourd de chercher les racines de $-x^2+2(2p-1)x-1$
Soit $g(x) = -x^2+2(2p-1)x-1$.
g est dérivable sur $[0,1]$ et $g'(x) = -2x+2(2p-1) = -2(x-(2p-1))$ et comme $1>p>\frac{1}{2}$ alors $2p-1 \in]0,1[$
$g(2p-1) = -(2p-1)^2 + 2(2p-1)^2 - 1 = (2p-1)^2 - 1 < 0$ car $2p-1 \in]0,1[$

	0		$2p-1$		1
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\nearrow -$	$g(2p-1)<0$	$\searrow -$	
$f''(x)$		$-$		$-$	
$2p-1-x$		$+$	0	$-$	affine
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

Conclusion : $\boxed{f \text{ est donc bien concave } (f''<0) \text{ et atteint son maximum en } \alpha_K = 2p-1}$

b) On a $\lim_{x\to1} f(x) = -\infty$

Quand $x \to 1$ Déterminer la limite de f en 1 et interpréter le résultat.

Quand la proportion rejouée (α) tend vers 1, la croissane moyenne du capital tend vers $-\infty$ (on cours à la ruine)

c) Comme $f(0) = 0$ et que f est strictemen croissante sur $[0, \alpha_K]$ alors $f(\alpha_K) > 0$

Comme f est continue et strictement décroissante sur $[\alpha_k, 1[$ elle es tbijective de $[\alpha_k, 1[$ dans $]\lim_1 f, f(\alpha_k)] =]-\infty, f(\alpha_K)]$

Et comme $0 < f(\alpha_K)$ alors $0 \in]-\infty, f(\alpha_K)]$

Donc $f(x) = 0$ a une unique soution dans $\alpha_c \in [\alpha_k, 1[$ qui n'est pas α_K

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} f \text{ s'annule deux fois exactement sur } [0,1[\text{ :} \\ \text{en 0 et en un réel } \alpha_c \text{ vérifiant } \alpha_K < \alpha_c. \end{array}}$

d) Asymptote verticcale en 1.

Tangente en 0 : $f'(0) = 2p - 1 > 0$

Comme le maximum est en $2p - 1$, on peut reporter en ordonnée cette valeur pour construire la tangente.

Et on note α_c au point d'intersection.

2. Conclusion : le choix $\alpha = \alpha_K$ est celui qui optimise la croissance de gain à long terme.

Pour $p = \frac{1}{2}$, on aurait $\alpha_K = 0$ donc quand on a autant de chances da gagner que de perdre, pour gagner en moyenne, il vaut mieu ne rien miser.

Pour $p = 1$ on a $\alpha_K = 1$ donc quand on est sûr de gagner, on peut tout miser à chaque fois

IV. Étude de la valeur critique α_c

Les choix de α au-delà de la valeur critique α_c conduisent à une perte de capital. On cherche dans cette partie un équivalent de α_c lorsque p est proche de $\frac{1}{2}$.

On considèrera dans ce qui suit que α, est une fonction de p (on écrira ainsi $\alpha_c(p)$).

1. On définit la fonction φ sur $]0,1[$ par $\varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

a) φ est continue en x tel que $1 + x > 0$ et $1 - x > 0$ et $\ln(1-x) \neq 0$ donc sur $]0,1[$ comme composée et quotient de fonctions continues.

En 0 : $\dfrac{\ln(1+x) \to 0}{\ln(1-x) \to 0}$ forme indétermnée et $\varphi(x) \sim \frac{x}{-x} = -1 \to -1$

Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est prolongeable en 0 par } \varphi(0) = -1}$

En 1 : $\dfrac{\ln(1+x) \to \ln(2)}{\ln(1-x) \to -\infty} \to 0$

Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est prolongeable en 0 par } \varphi(1) = 0}$

b) φ est dérivable sur $]0,1[$ comme composée et quotient de fonctions dérivables ($1 + x > 0$ et $1 - x > 0$ et $\ln(1-x) \neq 0$.)

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{\frac{1}{1+x}\ln(1-x) + \frac{1}{1-x}\ln(1+x)}{[\ln(1+x)]^2} \\
&= \frac{(1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x)}{(1-x^2)[\ln(1+x)]^2} \\
&= \frac{h(x)}{(1-x^2)[\ln(1-x)]^2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{avec } h(x) = (1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x)}$

c) h est dérivable sur $]0,1[$ et

$$\begin{aligned} h'(x) &= -\ln(1-x) - 1 + \ln(1+x) + 1 \\ &= \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \end{aligned}$$

Pour $x \in]0,1[$ on a $0 < 1-x < 1+x$ donc $\frac{1+x}{1-x} > 1$ et $h'(x) > 0$
En 0 : $(1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x) \to 0$
En 1 : avec $h = 1-x \to 0^+$ on a $(1-x)\ln(1-x) = h\ln(h) = \frac{\ln(h)}{1/h} \to 0$ car $\ln(h) = o(1/h)$ donc $h(x) \to 2\ln(2)$

x	0		1
$h(x)$	0	$\nearrow +$	$2\ln(2)$

d) On a donc $\varphi' > 0$ sur $]0,1[$ et donc
φ est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ et donc bijective de $[0,1]$ dans $[\varphi(0), \varphi(1)] = [-1,0]$

2. On a et avec $\ln(1+h) = h - \frac{1}{2}h^2 + h^2\varepsilon(h)$ avec $\varepsilon(h) \to 0$ quand $h \to 0$
Le taux d'accroissement en 0 :

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x-0} &= \frac{\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} + 1}{x} \\ &= \frac{\ln(1+x) + \ln(1-x)}{x\ln(1-x)} \\ &= \frac{x - \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(-x)}{x(-x + x\varepsilon_1(x))} \\ &= \frac{-x^2 + x^2\varepsilon_2(x)}{x^2(-1+\varepsilon_1(x))} \\ &= \frac{-1+\varepsilon_2(x)}{-1+\varepsilon_1(x)} \to 1 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\varphi \text{ est dérivable en 0 et } \varphi'(0) = 1.}$

3. a) **N.B. passer par la fonction pour toucher la réciproque**
Pour $p \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$ on a $f(\alpha_c) = 0$
donc $p\ln(1+\alpha_c) + (1-p)\ln(1-\alpha_c) = 0$
donc $\dfrac{\ln(1+\alpha_c)}{\ln(1-\alpha_c)} = \dfrac{p-1}{p} = 1 - \dfrac{1}{p}$ et $\varphi(\alpha_c) = 1 - \frac{1}{p}$
Et comme $\alpha_c \in [0,1]$ alors
Conclusion : $\boxed{\forall p \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[, \quad \alpha_c(p) = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{1}{p}\right)}$

b) **Rare : dérivée de la réciproque**
Quand $p \to \frac{1}{2}^+$ on a alors $1 - \frac{1}{p} \to -1^+$ et comme $\varphi(x) \to -1$ quand $x \to 0$ alors $\varphi^{-1}(x) \to 0$ quand $x \to -1$ donc $\varphi^{-1}\left(1 - \frac{1}{p}\right) \to 0$ quand $p \to \frac{1}{2}$
Conclusion : $\boxed{\alpha_c, \text{ est prolongeable par continuité en } \frac{1}{2} \text{ par } \alpha_c\left(\frac{1}{2}\right) = 0}$

La fonction prolongée est alors donnée par $\alpha_c(p) = \varphi^{-1}\left(1 - \frac{1}{p}\right)$.
φ est dérivable sur $[0,1[$ et $\varphi' > 0$ alors φ^{-1} est dérivable sur $[-1,0[$ et

$$\left(\varphi^{-1}\right)'(x) = \frac{1}{\varphi'\left(\varphi^{-1}(x)\right)}$$

donc α_c est dérivable en p tel que $p \neq 0$ et $1 - \frac{1}{p} \in [-1,0[$, donc sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right[$et

$$\begin{aligned} \alpha_c'(p) &= \left(\varphi^{-1}\right)'\left(1 - \frac{1}{p}\right)\frac{1}{p^2} \\ \alpha_c'\left(\frac{1}{2}\right) &= 4\left(\varphi^{-1}\right)'(-1) = \frac{4}{\varphi'(0)} = 4 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{ce prolongement est dérivable en } \frac{1}{2} \text{ et } \alpha_c'\left(\frac{1}{2}\right) = 4}$

c) La dérivé en $\frac{1}{2}$ est la lmite du taux d'acfroissement :

$$\frac{\alpha_c(p) - \alpha_c\left(\frac{1}{2}\right)}{p - \frac{1}{2}} \to 4 \text{ donc } \frac{\alpha_c(p) - 0}{2(2p-1)} \to 1$$

Conclusion : $\boxed{\text{au voisinage de } \frac{1}{2} : \alpha_c \sim 2\alpha_K}$

Conclusion : pour des valeurs de p proches de $\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire des paris "légèrement" favorables, un cas très fréquent), il faut prendre $\alpha < 2\alpha_K$.
Par sécurité (p n'est en pratique connu qu'approximativement), les parieurs choisissent souvent $\alpha = \dfrac{\alpha_K}{2}$, la moitié de la valeur de Kelly.

V Simulation informatique

1. On rejoue tant que le capital `cap_obj` n'est pas atteint.
   Le capital suit la relation :
   – si $X_{n+1} = 1$ alors $(1+\alpha)C_n = C_{n+1}$
   – si $X_{n+1} = 0$ alors $(1-\alpha)C_n = C_{n+1}$
   plus facile en PASCAL que celle avec les puissances.
   `u :=random ;u<p` est l'événement surveneant avec une probablité p (pari gangé)
   `n` compte le nombre de parties jouée.

```
program kelly1 ;
var    n : integer ;
cap, cap_obj,u,p,alpha :    real ;
begin
    writeln('valeur de p : ') ; read (p) ;
    writeln (' objectif à atteindre : ') ; read (cap_obj) ;
    writeln( 'valeur de alpha :') ; read(alpha) ;
    cap :=100 ;
    n :=0 ;
    randomize ;
    while cap < cap_obj do
    begin
        u :=random ;
```

```
        if u<p then
        begin cap :=cap*(1+alpha) end
        else
        begin cap :=cap*(1-alpha) end ;
    n :=n+1 ;
    end ;
    writeln ( ' nombre de parties jouées_ : ',n) ;
    writeln( ' capital atteint : ' cap)
end.
```

2. Afin de vérifier que la stratégie de Kelly est optimale, on modifie le programme `kelly1` de la façon suivante :
   - le nouveau programme calcule la valeur de Kelly α_K ;
   - en sortie, le nouveau programme renvoie, en plus du nombre de parties jouées pour atteindre l'objectif demandé, le capital que l'on aurait obtenu si on avait choisi la valeur α_K à la place de α pendant ces mêmes parties.

   On rajoute un second capital `capk`.

```
program kelly1 ;
var    n : integer ;
cap, capk, cap_obj,u,p,alpha,alphak :    real ;
begin
    writeln('valeur de p : ') ; read (p) ;
    writeln (' objectif à atteindre : ') ; read (cap_obj) ;
    writeln( 'valeur de alpha :') ; read(alpha) ;
    alphak :=2p-1 ;
    cap :=100 ;capk :=100 ;
    n :=0 ;
    randomize ;
    while cap < cap_obj do
    begin
        u :=random ;
        if u<p then
        begin cap :=cap*(1+alpha) ;capk :=capk*(1+alphak) end
        else
        begin cap :=cap*(1-alpha) ;capk :=capk*(1-alphak) end ;
    n :=n+1 ;
    end ;
    writeln ( ' nombre de parties jouées_ : ',n) ;
    writeln( ' capital atteint : ', cap) ;
    writeln( ' capital Kelly : ', capk)
end.
```