Corrigé EMLyon 2014 eco (par laurent Foubert)

EXERCICE 1:

P artie 1. Etude de la fonction φ définie pour tout réel $x > 0$ par : $\varphi(x) = e^x - xe^{\frac{1}{x}}$.

1. $x \to {}^1/_x$ définit une fonction de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$ et x, e^x et sont de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ donc φ est de classe C^∞ sur $]0,+\infty[$.
   Et pour tout $x > 0$: $\varphi'(x) = e^x - e^{\frac{1}{x}} - x(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}) = e^x - e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}e^{\frac{1}{x}}$.
   $\varphi''(x) = e^x + \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x}(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}) = e^x - \frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}$.
   et enfin $\varphi'''(x) = e^x - (-\frac{3}{x^4})e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^3}(-\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}) = e^x + \frac{3}{x^4}e^{\frac{1}{x}} + \frac{1}{x^5}e^{\frac{1}{x}} = e^x + \frac{3x+1}{x^5}e^{\frac{1}{x}}$.

2. φ'' est dérivable et $\varphi'''(x) > 0$ sur $]0,+\infty[$ donc φ'' est strictement croissante sur $]0,+\infty[$.
   De plus $\varphi''(1) = e^1 - \frac{1}{1}e^{\frac{1}{1}} = 0$.
   On a donc le tableau suivant

x	0			1		$+\infty$
$\varphi''(x)$		$-$		0	$+$	
$\varphi'(x)$			$\searrow$	e	$\nearrow$	$+\infty$

   qui nous montre $\forall x > 0 : \varphi'(x) \geq e$.

3. En 'posant ' $X = \frac{1}{x}$,on obtient $\lim\limits_{x\to 0^+} x.e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{X\to+\infty} \frac{1}{X}e^X = +\infty$ et donc $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} (x - xe^{\frac{1}{x}}) = -\infty$.

4. On a $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{\frac{1}{x}} = e^0 = 1$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{x}e^x - e^{\frac{1}{x}} = +\infty$.
   Ensuite, par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x\frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$

5. φ'' est strictement positive sur $]1,+\infty[$,donc φ est convexe sur cet intervalle et donc aussi sur $[3,+\infty[$.
   On a donc $\forall x \geq 3 : \varphi(x) \geq \varphi(3) + \varphi'(3)(x-3)$ (la courbe est placée au dessus de sa tangente au point d'abscisse x=3).
   Par conséquent ,étant donnés que $\varphi(3) > 15$ et $\varphi'(3) \geq e$, on a $\forall x \geq 3 : \varphi(x) \geq 15 + e(x-3) \geq ex$.
   (on aura bien pensé à $\forall x \geq 3 :\ (x-3) \geq 0$ et $15 - 3e \geq 0$).

6. φ est de classe C^2 sur $]0,+\infty[$ et φ''change de signe uniquement en x=1, donc (1,φ(1)) est l'unique point d'inflexion de C .
   Comme $\varphi(1) = 0$ et $\varphi'(1) = e$,$y = 0 + e(x-1)$ est l'équation de la tangente à C en son point d'inflexion (1,0).

7.

x	0			1		$+\infty$
$\varphi'(x)$			$-$	e	$+$	
$\varphi(x)$	$-\infty$		$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

   Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = -\infty$, C admet en 0 une asymptote verticale (l'axe des ordonnées)
   et puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} = +\infty$, C admet en $+\infty$ une branche parabolique "verticale".

P artie 2. Etude de la fonction f définie par : $f(x,y) = xy - e^x ln\, y$ lorsque $y > 0$.

8. c'est le demi-plan (supérieur et ouvert) des couples (x,y) pour lesquels $y > 0$.

9. f est C^2 sur l'ouvert U, car $x \to e^x$ définit une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ et $y \to ln\, y$ définit une fonction de classe C^∞ sur]0,+∞[.
On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - e^x ln\, y\, et\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - \frac{e^x}{y}$. On calcule les dérivées secondes:
$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = -e^x ln\, y;\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = 1 - \frac{e^x}{y};\ et\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = \frac{e^x}{y^2}$.

10. f admet un point critique en (x,y) si,et seulement si, $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0$ et $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$.
On résout alors le système :$\left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y - e^x ln\, y = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x - \frac{e^x}{y} = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} y = e^x ln\, y \\ x = \frac{e^x}{y} > 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} \frac{y}{e^x} = ln\, y \\ x = \frac{e^x}{y} > 0 \end{array} \right. \iff$
$\left\{ \begin{array}{c} ln\, y = \frac{1}{x} \\ xy = e^x > 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x > 0, y = e^{\frac{1}{x}} \\ xe^{\frac{1}{x}} = e^x > 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} x > 0, y = e^{\frac{1}{x}} \\ \varphi(x) = e^x - xe^{\frac{1}{x}} = 0 \end{array} \right.$

11. Comme sur]0,+∞[,l'équation $\varphi(x) = 0$ admet x=1 pour unique solution (sacré théoèreme "de la bijection"!!!) ,l'unique solution du système précédent est le point (1,e).

12. En (1,e) ,on a $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(1,e) = -e^1 ln\, e = -e;\ s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(1,e) = 1 - \frac{e^1}{e} = 0;\ et\ t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(1,e) = \frac{e^1}{e^2} = \frac{1}{e}$,et donc $rt - s^2 = -e.\frac{1}{e} - 0 = -1 < 0$. f n'a pas d'extremum local au point (1,e).

13. Comme f est C^2 sur l'ouvert U ,si elle a un extremum local ,ça ne peut être qu'en un point critique ,c'est à dire en (1,e) . Or f n'a pas d'extremum local au point (1,e) ,donc elle n'en a pas sur U.

P artie 3. Etude d'une suite et d'une série.

14. Par récurrence :Intialisation à n=0: on a bien $u_0 = 3 \geq 3e^0$.
hérédité: si $u_n \geq 3e^n$ d'après la question 5) on a: $u_{n+1} = \varphi(u_n) \geq e.u_n \geq e3e^n = 3e^{n+1}$.
La propriété $P(n)$: $u_n \geq 3e^n$ est donc vraie pour tout $n \geq 0$.

15. Toujours d'après la question 5) on a: $u_{n+1} = \varphi(u_n) \geq e.u_n > u_n$ donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est strictement croissante.
Et comme $u_n \geq 3e^n$ et que $\lim_{n\to+\infty} 3e^n = +\infty$, on a aussi par minoration $\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

16. Program EML2014;
Var u:real;n:integer;

    begin
    u:=3;n:=0;
    while $u < 1E - 3$ do
    begin u:=exp(u)-u*exp(1/u);n:=n+1; end;
    writeln(n);
    end.

17. Comme pour tout $n \,\epsilon\, \mathbb{N}$, $u_n \geq 3e^n$,on a aussi $0 < \frac{1}{u_n} \leq \frac{1}{3e^n} = \frac{1}{3}(\frac{1}{e})^n$. Or la série $\sum \frac{1}{3}(\frac{1}{e})^n$ est convergente (car géométrique de raison $\frac{1}{e}\epsilon$]-1,1[), donc la série de terme général $\frac{1}{u_n}$ est aussi convergente.

Exercice 2

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ *et* $C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Les matrices de E s'écrivent toutes $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ de façon unique en fonction de A,B et C.
Donc E=Vect(A,B,C) et (A,B,C) est une base de E,qui est donc de dimension 3.

2. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} a' & b' \\ 0 & c' \end{pmatrix}$ alors $MN = \begin{pmatrix} aa' & ab' + bc' \\ 0 & cc' \end{pmatrix}$ est une matrice qui appartient encore à E.

3. Si $M = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ alors M est inversible si,et seulement si, $a \neq 0$ et $c \neq 0$ et on alors par la méthode de Gauss :$M^{-1} = \begin{pmatrix} 1/a & -b/ac \\ 0 & 1/c \end{pmatrix} \epsilon$ E.

4. E est stable par multiplication donc ,comme T et M appartiennent à E ,on a aussi $f(M) = TMT \,\epsilon\, E$.
Reste à vérifier la linéarité : si M et N sont 2 matrices de E et x et y 2 réels :
$f(xM + yN) = T(xM + yN)T = T(xM)T + T(yN)T = xTMT + yTNT = xf(M) + yf(N)$.
F est donc bien un endomorphisme de E !

5. T est une matrice inversible car triangulaire avec 2 pivots non nuls . De plus ,si M et N sont 2 matrices de E, on a : $f(M) = N \Longleftrightarrow TMT = N \Longleftrightarrow M = T^{-1}NT^{-1}$, ce qui montre que toute matrice N de E admet unique antécédent par f ,qui est donc un automorphisme de E.

6. T étant triangulaire ,ses valeurs propres se trouvent sur sa diagonale et donc l'unique valeur propre de T est 1.
Comme d'habitude (?) : si T était diagonalisable ,il y aurait une matrice P inversible telle que $P^{-1}TP = I$ et on aurait donc $T = PIP^{-1} = PP^{-1} = I$.
Comme $T \neq I$, T ne peut pas être inversible .

7. $f(A) = TAT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A + B$;
$f(B) = TBT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = B$.
et $f(C) = TCT = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = B + C$.
La matrice de f dans la base (A,B,C) est donc : $\boxed{F = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$

8. Un réel λ est valeur propre de f ssi la matrice $F - \lambda I$ n'est pas inversible . Une réduction de Gauss donne $F - \lambda I \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1-\lambda & 1 \\ 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{pmatrix}$ (on a permuté d'abord les lignes 1 et 2 ,ensuite les colonnes 1 et 2,ce qui ne change pas l'inversibilité de la matrice).
Par suite , la seule valeur propre de f est celle qui annule $1 - \lambda$, soit donc $\lambda = 1$.

Une matrice $M = aA + bB + cC$ est un vecteur propre de f associé à la valeur propre ssi,$f(M) = M$ qui se traduit matriciellement par:$F\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ d'où le système

$$\begin{cases} a = a \\ a + b + c = b \\ c = c \end{cases} \Longleftrightarrow \{a + c = 0 \Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \epsilon Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}).$$

L'espace propre associé à $\lambda = 1$ est donc $\boxed{E_1 = Vect(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})}$.

9. 1 est la seule valeur propre de f et $dim(E_1) = 2 \neq 3$, donc f n'est pas diagonalisable .
   remarque : 1 étant la seule valeur propre de f et $f \neq id_E$,on aurait pu raisonner par l'absurde ,comme au 6.

10. Si $\lambda \neq 1$,λ n'est pas valeur propre de f et donc $f(M) = \lambda M \Longleftrightarrow \underline{M = 0}$.

11. Facile de voir que $H^2 = 0$. Et comme I et H commutent , la formule du binôme donne :
    $(I + aH)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(aH)^k I^{n-k} = \binom{n}{0}(aH)^0 + \binom{n}{1}(aH)^1 + 0 = I + naH = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ na & 1 & na \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

12. Pour a=1 :$F^n = (I + H)^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ n & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

13. ??? On aimerait bien trouver a pour que $(I + aH)^3 = F$ et donc que $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3a & 1 & 3a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
    La solution $a = 1/3$ saute aux yeux !!
    Une solution cherchée est donc $\underline{G = I + \frac{1}{3}H}$.
    Pour que $g^3 = f$, il suffit de choisir l'endomorphisme g de E dont la matrice dans la base (A,B,C) est G .

Exercice 3

Partie I : Etude du cas n=3.

L'urne contient donc 3 boules et on effectue 4 tirages avec remise .

1. a. $(X_3 = 4)$:"les 3 premiers tirages ont donné une suite strictement décroissante ,donc ici forcément (3,2,1), et $N_4 \geq N_3$".
   Comme $N_3 = 1$ implique $N_4 \geq N_3$, il nous reste juste $(X_3 = 4) = (N_1 = 3) \cap (N_2 = 2) \cap (N_3 = 1)$ et donc , puisque les tirages se font sans remise dans l'urne où il y a 3 boules :
   $\underline{P(X_3 = 4) = P(3,2,1) = (\frac{1}{3})^3}$
   b. $(X_3 = 2)$ signifie que , dès le 2-ième tirage ,on a obtenu un résultat supérieur ou égal au 1-er .
   On a donc ,en notant (1,3) l'évènement $(N_1 = 1) \cap (N_2 = 3)$:
   $\underline{P(X_3 = 2) = P((1,1) \cup (1,2) \cup (1,3) \cup (2,2) \cup (2,3) \cup (3,3)) = 6.(\frac{1}{3})^2 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}}$.
   X_3 prend ses valeurs dans {2 ;3 ;4} , donc
   $\underline{P(X_3 = 3) = 1 - P(X_3 = 2) - P(X_3 = 4) = 1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{27} = \frac{27-18-1}{27} = \frac{8}{27}}$.

2. $E(X_3) = 2.P(X_3 = 2) + 3.P(X_3 = 3) + 4.P(X_3 = 4) = 2.\frac{2}{3} + 3.\frac{8}{27} + 4.\frac{1}{27} = \frac{36+24+4}{27} = \frac{64}{27}$.

Partie II : Cas général (n=3 ,ou pas !)

3. Pour $k\epsilon\{2...n+1\}$, N_k peut prendre les valeurs de 1 à n et si $j\epsilon\{1...n\}$, $P(N_k = j) = \frac{1}{n}$.
   Tout le monde (?) aura reconnu une loi uniforme sur $\{1...n\}$.
   Et selon le cours :$E(N_k) = \frac{n+1}{2}$ et $V(N_k) = \frac{n^2-1}{12}$.

4. Comme au 1. :$(X_n = n+1)$:"les n premiers tirages ont donné une suite strictement décroissante ,donc ici forcément (n,n-1,..,1), et $N_{n+1} \geq N_n$".
   Il nous reste alors :$(X_n = n+1) = (N_1 = n) \cap (N_2 = n-1) \cap ... \cap (N_n = 1)$
   et donc , grâce à l'indépendance des tirages :
   $\underline{P(X_n = n+1) = P(N_1 = n).P(N_2 = n-1)...P(N_n = 1) = (\frac{1}{n})^n}$

5. Pour tout i de {1..n}: sachant $(N_1 = i)$,l'évènement$(X_n = 2)$ sera réalisé ssi,on a $N_2 \geq i$: c'est à dire si on ne tire pas un des numéros 1,2...,i-1.Par conséquent ,$\mathrm{P}_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \dfrac{n-(i-1)}{n}$.

6. La formule des probabilités totales pour le système complet d'évènements $\{(N_1 = i)\}_{i=1 à n}$ nous donne alors $\underline{P(X_n = 2)} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}(N_1 = i) .\mathrm{P}_{(N_1=i)}(X_n = 2) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n}.\dfrac{n-(i-1)}{n} = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} n - (i-1) = \frac{1}{\mathrm{n}^2}(\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{n} - \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{i} + \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} 1) = \frac{1}{\mathrm{n}^2}(\mathrm{n.n} - \frac{\mathrm{n(n+1)}}{2} + \mathrm{n}) = \frac{1}{\mathrm{n}}(\mathrm{n} - \frac{\mathrm{(n+1)}}{2} + 1) = \frac{1}{\mathrm{n}}(\frac{\mathrm{n}}{2} + \frac{1}{2}) = \underline{\frac{\mathrm{n+1}}{\mathrm{2n}}}$.

7. $X_n > k$ lorsque les k premiers tirages ont donné une suite strictement décroissante ,c'est à dire si $N_1 > N_2 > .... > N_k$..
   Parmi les cas possibles (qui sont des suites de n+1 éléments de {1..n}), les cas favorables à $(X_n > k)$ sont constitués d'une suite strictement décroissante de k numéros et d'une suite de n+1-k éléments de {1..n}. Par exemple pour n=10 et k=4 , (9,8,5,4,4,3,7,7,5,6,10) est un des cas favorables à $(X_{10} > 4)$.
   Le nombre des cas possibles est bien entendu n^{n+1}.Et comme il y a autant de suites strictement décroissantes de k numéros de {1..n} que de parties à k éléments de {1..n},c'est à dire $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}$,le nombre des cas favorables à $(X_n > k)$ est $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}.n^{n+1-k}$.

On obtient enfin le résultat proposé : $P(X_n > k) = \dfrac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} .n^{n+1-k}}{n^{n+1}} = \dfrac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{n^k}$.

Pour k=0 et k=1 , la formule reste valable puisque $\underline{P(X_n > 0) = P(X_n > 1) = 1}$ alors que $\underline{\dfrac{\begin{pmatrix} n \\ 0 \end{pmatrix}}{n^0} = \frac{1}{1}}$et $\underline{\dfrac{\begin{pmatrix} n \\ 1 \end{pmatrix}}{n^1} = \frac{n}{n} = 1}$.

8. De façon classique(?) $(X_n = k) = (X_n > k-1) \cap \overline{(X_n > k)}$ donc $\underline{P(X_n = k) = P(X_n > k-1) - P(X_n > k)}$.

9. $E(X_n) = \sum_{k=2}^{n+1} \mathrm{k.P}\,(X_n = k) = \sum_{k=2}^{n+1} k.P(X_n > k-1) - k.P(X_n > k) = \sum_{h=1}^{n} (h+1).P(X_n > h) - \sum_{k=2}^{n+1} k.P(X_n > k) = [2.P(X_n > 1) + \sum_{h=2}^{n} (h+1).P(X_n > h)] - [\sum_{k=2}^{n} k.P(X_n > k) - (n+1).P(X_n > n+1)] = 2 + \sum_{k=2}^{n} (k+1-k).P(X_n > k) - (n+1).0) = P(X_n > 0) + P(X_n > 1) + \sum_{k=2}^{n} P(X_n > k) = \sum_{k=0}^{n} P(X_n > k)$.
On a donc $\underline{E(X_n)} = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{P}\,(X_n > k) = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \frac{1}{n^k} = \sum_{k=0}^{n} \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} (\frac{1}{n})^k .1^{n-k} = \underline{(\frac{1}{n} + 1)^n}$.

10. $P(X_n = k) = P(X_n > k-1) - P(X_n > k) = \dfrac{\begin{pmatrix} n \\ k-1 \end{pmatrix}}{n^{k-1}} - \dfrac{\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}}{n^k} = \frac{n!}{n^{k-1}(k-1)!(n-k+1)!} - \frac{n!}{n^k k!(n-k)!} = n!(\frac{nk-(n-k+1)}{n^k (k)!(n-k+1)!})$ or $\frac{k-1}{n^k} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} = \frac{k-1}{n^k} \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} = \frac{k-1}{n^k} \frac{(n+1).n!}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!}{n^k} \frac{(n+1).(k-1)}{k!(n+1-k)!} = \frac{n!}{n^k} \frac{(nk+k-n-1)}{k!(n+1-k)!}$.

Partie III : Convergence en loi :

11. deux petits rappels concernants le nombre d'arrangements de k objets pris par n :
$\boxed{A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n(n-1)(n-2)...(n-k+1) \underset{n\to\infty}{\sim} n^k \text{ et } \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} = \frac{A_n^k}{k!}}$
car A_n^k est le produit de k facteurs tous équivalents à n lorsque $n \to +\infty$.
et donc $\underline{P(X_n = k)} = \frac{k-1}{n^k} \begin{pmatrix} n+1 \\ k \end{pmatrix} = \frac{k-1}{n^k} \frac{A_{n+1}^k}{k!} \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{k-1}{n^k} \frac{(n+1)^k}{k!} \underline{\underset{n\to\infty}{\sim} \frac{k-1}{k!}}$ (car $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^k}{n^k} = 1$) .

12. Ce sont des séries exponentielles donc convergentes , et on va utiliser $e^1 = e = \sum\limits_{k\geq 0} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \sum\limits_{k\geq 2} \frac{1}{k!}$.
$\sum\limits_{k\geq 2} \frac{k-1}{k!} = \sum\limits_{k\geq 2} \frac{k}{k!} - \frac{1}{k!} = \sum\limits_{k\geq 2} \frac{1}{(k-1)!} - \frac{1}{k!} = \sum\limits_{j\geq 1} \frac{1}{j!} - \sum\limits_{k\geq 2} \frac{1}{k!} = (e-1) - (e-2) = 1$.
remarque: On a vérifié ainsi que la suite $(\frac{k-1}{k!})_{k\geq 2}$ définit bien une loi de probabilité .

13. $E(Z) = \sum\limits_{k\geq 2} \mathrm{k.P}\,(Z = k) = \sum\limits_{k\geq 2} k \frac{k-1}{k!} = \sum\limits_{k\geq 2} \frac{k-1}{(k-1)!} = \sum\limits_{k\geq 2} \frac{1}{(k-2)!} = \sum\limits_{k\geq 0} \frac{1}{k!} = e$.
$E(X_n) = (\frac{1}{n} + 1)^n = exp\,(n.ln(1 + \frac{1}{n})$ or $n.ln(1 + \frac{1}{n}) \underset{n\to\infty}{\sim} n.\frac{1}{n} = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = e$.
remarque : La suite $(X_n)_{n\geq 2}$ converge en loi vers la variable Z et on a $\lim\limits_{n\to+\infty} E(X_n) = E(Z)$.