Chapitre n°4

Intégration généralisée

I. Intégrales impropres

I. 1 Intégrales impropre en $\pm\infty$

Dans le chapitre sur l'intégration, on a étudié la notion d'intégrale d'une fonction continue sur des segments $[a, b]$ où $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. Nous allons maintenant étudier cette notion sur les intervalles du type $[a, +\infty[$, où $a \in \mathbb{R}$.

Définition 1.1

Soient a un réel et f une fonction continue sur $[a, +\infty[$.

- On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** lorsque la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers $+\infty$. Dans ce cas, on pose :

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t =$$

- Dans le cas contraire, on dit que $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ **diverge**.

Une intégrale de la forme précédente est dite **impropre** (ou **généralisée**) en $+\infty$.

Remarques :

R1 – Pour tout $x \in [a, +\infty[$, l'intégrale $\displaystyle\int_a^x f(t)dt$ existe bien car f est continue sur $[a, x]$. On peut donc bien étudier la limite de cette expression quand x tend vers $+\infty$.

R2 – Si f est continue sur un intervalle du type $]-\infty; a]$, on dit que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^a f(t)\,\mathrm{d}t$ **converge** lorsque la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque x tend vers $-\infty$. Dans ce cas, on pose

$$\int_{-\infty}^b f(t)\,\mathrm{d}t =$$

On parle alors d'intégrale impropre en $-\infty$. Dans le cas inverse, on dit que l'intégrale diverge.

Définition 1.2

Déterminer la nature d'une intégrales, c'est déterminer si elle converge ou diverge.

Exercice 1

Etudier la nature des intégrales : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t}\,dt$, $J = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ et $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

Proposition 1.3

Si f est continue sur $[a;+\infty[$, et $b > a$, alors

$$\int_a^{+\infty} f(t)\ dt \text{ converge ssi}$$

Attention:

Les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)\ dt$ et $\int_b^{+\infty} f(t)\ dt$ ont la même nature, mais pas la même valeur.

Théorème 1.4 — Intégrales de références

- **Intégrales de Riemann :**
  Soit α un réel, $c \in \mathbb{R}_+^*$.

  L'intégrale $\displaystyle\int_c^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\, dt$ est appelée **intégrale de Riemann** de paramètre α.
  Elle **converge si et seulement si**
- **Intégrales exponentielles :**
  Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t}\, dt$ converge si et seulement si

Démonstration. □

I. 2 Propriétés

Les propriétés suivantes sont énoncées sur des intervalles du type $[a;+\infty[$, mais les résultats s'étendent aux cas des intervalles de la forme $]-\infty;a]$.

Proposition 1.5 — Linéarité

Soient f, g deux fonctions continues sur $[a,+\infty[$ et λ, μ des réels. Si les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et on a :

$$\int_a^{+\infty} \lambda f(t) + \mu g(t)\,\mathrm{d}t =$$

Remarque :

On ne peut utiliser la linéarité que si l'on sait que les intégrales $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent.

Proposition 1.6 — Positivité

Soit f une fonction continue sur $[a,+\infty[$ telle que $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

- Si f est positive sur $[a,+\infty[$, alors
- Si f est positive sur $[a,+\infty[$ et $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors pour tout $t \in [a,+\infty[$,

Corollaire 1.7 — Croissance

Soient f, g deux fonctions continues sur $[a, +\infty[$. Si pour tout $t \in [a, +\infty[$, on a $f(t) \leqslant g(t)$ et si les intégrales $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ convergent, alors :

Attention:

Il faut vérifier que les deux intégrales convergent !

Proposition 1.8 — Relation de Chasles

Soient f une fonction continue sur $[\gamma, +\infty[$ et a, c deux réels de $[\gamma, +\infty[$.
Si $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge, alors $\displaystyle\int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et

$$\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2

Soit $f : t \mapsto t^3$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, calculer $\displaystyle\int_{-x}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.
2. Que peut-on en déduire ?

I. 3 Intégrales sur d'autres intervalles

Intégrales doublement impropres.

Définition 1.9

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.
On dit que **l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge** lorsque qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ telle que les intégrales $\int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_{c}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ convergent. Dans ce cas, on pose

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t =$$

Une intégrale de la forme précédente est dite doublement impropre (ou généralisée) en $-\infty$ et $+\infty$.

Remarques :

R1 – D'après la proposition 1.3, la nature des intégrales $\displaystyle\int_{-\infty}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{c}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ ne dépendent pas du choix de c. On peut donc le choisir arbitrairement. De plus la valeur de l'intégrale ne dépend pas du choix de c.

R2 – Les propriétés de linéarité, positivité, croissance et relation de Chasles restent vraies pour les intégrales sur un intervalle de la forme $]-\infty, b]$ ou $]-\infty, +\infty[$. On définit de même la convergence absolue et celle-ci implique encore la convergence.

Exercice 3

Étudier la convergence des intégrales suivantes et donner la valeur de l'intégrale en cas de convergence : $I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t}\,\mathrm{d}t$ et $J = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t-1|}\,\mathrm{d}t$.

Hors Programme mais... Intégrales sur des intervalles du type $]a,b]$ et $[a,b[$.

Dans cette partie nous prolongeons les définitions les premières définitions pour pouvoir étudier la convergence des intégrales du type $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^2+\sqrt{t}}$

Définition 1.10

Soit f une fonction continue sur $]a,b]$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* ssi

On note alors :

$$\lim_{x\to a^+}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

Dans le cas contraire on dit que *l'intégrale diverge*.

Exercice 4

Montrer que

- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}$ diverge
- $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}$ converge.

Théorème 1.11 — Intégrales de référence

- Soit α un réel et b une constante strictement positive. L'*intégrale de Riemann* $\displaystyle\int_0^b \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ converge ssi
- L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t$ est convergente et vaut -1.

Attention:

Il faut bien faire attention à la différence entre les intégrales de Riemann entre 0 et 1 et celles entre 1 et $+\infty$, les critères de convergences sont inversés.

Définition 1.12 — Intégrale sur un intervalle $[a;b[$

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$. On dit que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge* ssi

On note alors

Dans le cas contraire on dit que *l'intégrale diverge*.

Exemple :

$\displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est divergente.

I. 4 Convergence absolue

Définition 1.13

Soit f une fonction continue sur $[a,b[$ où $a \in \mathbb{R}$ et b un réel ou $+\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite **absolument convergente** lorsque l'intégrale $\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ converge.

Théorème 1.14

Soit f une fonction continue sur l'intervalle $[a;b[$ (avec b un réel ou $+\infty$), on suppose que l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ *converge absolument*, alors cette intégrale converge. On a de plus

$$\left|\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leq \int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$$

Remarque :

La réciproque est fausse : il existe des intégrales convergentes qui ne sont pas absolument convergentes.

II. Techniques de calculs

II. 1 Intégration par parties et changement de variables.

Pour calculer une intégrale convergente sur un intervalle de type $[a,+\infty[$, on utilise la définition et on se ramène au calcul sur un segment. En particulier, les intégrations par parties et changements de variable ne doivent être faits **uniquement** que sur des segments (de type $[a,x]$).

Exercice 5

Étudier la convergence des intégrales suivantes et donner leur valeur le cas échéant :

- $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} te^{-t}\,\mathrm{d}t$.
- $K = \displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.
- $J = \displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
- $L = \displaystyle\int_e^{+\infty} \frac{1}{u\ln(u)^2}\,\mathrm{d}u$ (chgt var. : $v = \ln(u)$).

II. 2 Intégrale et parité

Proposition 2.1

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$.

- Si la fonction f est **paire**, alors

  Dans ce cas (**et uniquement dans ce cas**)

- Si la fonction f est **impaire**, alors

  Dans ce cas (**et uniquement dans ce cas**)

Démonstration. □

III. Intégrales de fonctions positives

III. 1 Généralités

Proposition 3.1 — Intégrale en fonction d'une des bornes

- Si f est une fonction continue sur $[a;b[$ avec b un réel ou $+\infty$ et telle que $\forall t \in [a;b[\quad f(t) \geqslant 0$
  Alors la fonction
  $$F : \left| \begin{array}{ccc} [a;b[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$
  est , elle admet donc une limite dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ quand x tend vers b.

- Si f est une fonction continue sur $]a;b]$ avec a un réel ou $-\infty$ et telle que $\forall t \in]a;b] \quad f(t) \geqslant 0$
  Alors la fonction
  $$F : \left| \begin{array}{ccc}]a;b] & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \displaystyle\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$$
  est , elle admet donc une limite dans $\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ quand x tend vers a.

D'après les théorèmes vus l'année dernière, dans ce cas là pour l'intégrale converge il suffit de vérifier si elle est minorée ou majorée. Plus précisément :

Théorème 3.2 — Condition de convergence

1. Soit f une fonction continue positive sur $[a;b[$ On suppose qu'il existe M tel que $\forall x \in [a;b[\quad \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant M$.

   Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

2. Soit f une fonction continue positive sur $]a;b]$ On suppose qu'il existe m tel que $\forall x \in]a;b] \quad m \leqslant \int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

   Alors l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

III. 2 Critères de convergence et comparaisons.

Les trois théorèmes suivants vont nous servir toute l'année !

Attention:

Il est indispensable de vérifier que les fonctions étudiées sont à valeurs positives et de le faire apparaître clairement dans vos réponses.

Théorème 3.3 — Critère de comparaison par inégalités

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a;b[$ avec b un réel ou $+\infty$, et $a < b$ et telles que

$$\forall t \in [a;b[\qquad 0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$$

Dans ce cas là

- Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi.
- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge. Alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge aussi.

Ce théorème s'adapte aux autres cas d'intégrales impropres.

Exercice 6

Déterminer la nature des intégrales $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2+t+1}\,\mathrm{d}t$ et $J = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t+\ln(1+t)}$.

Théorème 3.4 — Critère de comparaison par équivalence

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b[$ avec b un réel ou $+\infty$, et $a < b$ et telles que

$$\forall t \in [a,b[\qquad 0 \leqslant f(t) \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant g(t)$$

On suppose de plus que

$$f(x) \underset{b}{\sim} g(x)$$

Alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ ont même nature.

Ce théorème s'adapte aussi aux autres cas d'intégrales impropres.

Exercice 7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(t) = \dfrac{2t}{e^t + e^{-t}}$.

1. Montrer que f est impaire.
2. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty}$ converge.
3. Montrer que $f(t) \underset{+\infty}{\sim} 2te^{-t}$
4. En déduire $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Théorème 3.5 — Critère de comparaison par négligeabilité

Si f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b[$ avec b un réel ou $+\infty$, et $a < b$ et telles que

$$\forall t \in [a, b[\qquad 0 \leqslant f(t) \qquad \text{et} \qquad 0 \leqslant g(t)$$

et telles que

$$f(x) =_b o(g(x))$$

Dans ce cas là :

- Si $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ converge aussi.
- Si $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ diverge alors $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ diverge aussi.

Retenir

Test de Riemann Si f est positive et $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} t^2 f(t) = 0$, alors $\displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.

Exercice 8

Montrer que $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ converge.

IV. Addendum

Lorsqu'une intégrale est impropre en plus d'un point il faut « découper » cette intégrale.

Exemple :

- Pour étudier la nature de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$, il faut étudier les intégrales $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{(x+1)\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$
- Pour étudier la nature de $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{1}{(x+1)x(x-1)}\,\mathrm{d}x$, il faut étudier les intégrales $\displaystyle\int_{-1}^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{(x+1)x(x-1)}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{0} \frac{1}{(x+1)x(x-1)}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{(x+1)x(x-1)}\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^{1} \frac{1}{(x+1)x(x-1)}\,\mathrm{d}x$