Exercice 1

En calculant des primitives déterminer si les intégrales suivantes convergent et si oui donner leurs valeurs.

1. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln t \,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} t^2\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2+t}\,\mathrm{d}t$

Exercice 2

En calculant des primitives déterminer si les intégrales suivantes convergent et si oui donner leurs valeurs.

1. $\displaystyle\int_2^{3} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{3-t}}$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{t}$ (IPP)
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t}{1-\mathrm{e}^t}$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ (IPP)

Exercice 3

Comment intégrer une fraction :

1. Trouver deux constantes a et b telles que pour tout $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,1\}$
$$\frac{1}{x(x+1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x+1}$$
2. Pour chacune des intégrales suivantes dire si elle converge ou non, dans le cas convergent, donner la valeur de l'intégrale.

   (a) $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$
   (b) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$
   (c) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)}$

Exercice 4

À quelle condition sur le réel α, l'intégrale suivante est elle convergente, faire la démonstration.

$$\int_0^{+\infty} \exp(-\alpha x)\,\mathrm{d}x$$

Exercice 5

Prouver la convergence des intégrales suivantes et calculer leur valeur.

1. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-|t-1|}$
2. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-|t-a|}$ où a est une constante.

Exercice 6

Les intégrales suivantes sont elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{x}}$: utiliser $\leqslant$ ou $\sim$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{x}}$: utiliser $\sim$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{x}}$: $\leqslant$ ou $\sim$
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\sqrt{x}}$: utiliser $\leqslant$ ou $\sim$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\sqrt{x}+x}{x^3+x^2+x}\,\mathrm{d}x$: utiliser $\sim$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}$

Exercice 7

Les intégrales suivantes sont elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}$

Exercice 8

1. Trouver un α bien choisi tel que $\dfrac{\ln x}{x^2} =_{+\infty} o(\dfrac{1}{x^\alpha})$ et tel que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ converge.
2. En déduire que la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
3. Appliquer la même méthode à $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{\ln x}{x\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$.
4. En utilisant une négligeabilité devant $\mathrm{e}^{-\alpha x}$ avec α bien choisi, montrer la convergence de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^4}{\mathrm{e}^{\frac{x}{100}}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 9

Étudier la nature des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-1}$

Exercice 10

Les intégrales suivantes sont elles convergentes ?

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^3}\right)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)+x}\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sqrt{x}}{\ln(1+x)(1+x)}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{1-\sqrt{t}}$
5. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1}{\sqrt{1-\mathrm{e}^{-t}}}\,\mathrm{d}x$

Exercice 11

Calculer, si elles convergent les intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{1} \ln(x)\,\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$
3. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{x\ln x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x$
4. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{1-\sqrt{t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$
5. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{3^t}\,\mathrm{d}t$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$

Exercice 12

Pour $n\in\mathbb{N}$, on pose si l'intégrale converge

$$I_n = \int_1^{+\infty} \frac{(\ln t)^n}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

1. Calculer I_0.
2. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, $\dfrac{(\ln t)^n}{t^2} = o\left(\dfrac{1}{t\sqrt{t}}\right)$.
3. En déduire que les intégrales sont convergentes.
4. À l'aide d'une intégration par partie, montrer que pour $n\in\mathbb{N}$
$$I_{n+1} = (n+1)I_n$$
5. En déduire une expression de I_n en fonction de n.
6. Trouver la limite de I_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 13

On cherche à déterminer si l'intégrale suivante converge

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x)(2+x)(3+x)}$$

1. Trouver un équivalent simple de la fonction en $+\infty$.
2. En déduire que l'intégrale converge.
3. Trouver trois constantes a, b et c telles que pour tout $x\in\mathbb{R}_+$
$$\frac{1}{(1+x)(2+x)(3+x)} = \frac{a}{x+1}+\frac{b}{x+2}+\frac{c}{x+3}$$
4. En déduire la valeur de l'intégrale

Exercice 14

1. Montrer que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$ converge, puis, avec le changement de variables $u=1/t$, que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt = 0$.
2. Soit $a>0$. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{a^2+t^2}dt$.

Exercice 15

Pour tout entier $n\in\mathbb{N}$, on définit sur $\mathbb{R}$,l a fonction f_n par

$$f_n(x) = x^n\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale I_n est convergente, où $I_n = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
2. On admet que $I_0 = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$. Calculer I_1.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{n+2} = (n+1)I_n$$
4. Montrer par récurrence que, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
$$I_{2n} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\frac{(2n)!}{2^n\, n!}$$

Exercice 16

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{(\ln(1+x))^n}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que l'intégrale I_0 est convergente et la calculer.
2. Montrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$, l'intégrale I_n est convergente.
3. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_{n+1} = (n+1)I_n$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $I_n = n!$.

Exercice 17

Étudier la convergence des intégrales suivantes

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \left(x + 2 - \sqrt{x^2+4x+1}\right)\mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x}\ln(x)\,\mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^3+1}}$

Exercice 18

Étudiez la convergence des intégrales suivantes en fonction du ou des paramètres :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$ où $m \in \mathbb{R}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} x^\alpha \ln(1+x^\beta)\,\mathrm{d}x$ où $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$

Exercice 19

On pose
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 1 \\ \dfrac{x-1}{\ln x} & \text{si} \quad x \in]0,1[\end{cases}$$

1. Montrer que f est continue.
2. $\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t$ est elle convergente ?
3. Soit $x \in]0;1[$. En posant $u = t^2$, montrer que $\displaystyle\int_0^x \frac{t\,\mathrm{d}t}{\ln t} = \int_0^{x^2} \frac{du}{\ln u}$.
4. En déduire que $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$
5. Montrer que pour tout $t \in [x^2; x]$, on a
$$\frac{x}{t\ln t} \leqslant \frac{t}{t\ln t} \leqslant \frac{x^2}{t\ln t}$$
6. En déduire que
$$x^2\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t} \leqslant \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} \leqslant x\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$$
7. Trouver une primitive de $t \mapsto \dfrac{1}{t\ln t}$
8. En utilisant le théorème des gendarmes montrer que
$$\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t = \ln 2$$

Exercice 20

Soient $0 < a < b$.

1. Justifier la convergence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t$.
2. Soient $0<x<y$. Démontrer que
$$\int_x^y \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{ax}^{bx} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{ay}^{by} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$
3. Démontrer que, pour tout réel $z>0$,
$$\mathrm{e}^{-bz}\ln\frac{b}{a} \leqslant \int_{az}^{bz} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \leqslant \mathrm{e}^{-az}\ln\frac{b}{a}.$$
En déduire que
$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-at}-\mathrm{e}^{-bt}}{t}dt = \ln\frac{b}{a}$$

Exercice 21

1. Démontrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{x^{3/4}}\,\mathrm{d}x$. On pourra comparer avec $\dfrac{1}{x^\alpha}$ pour α bien choisi.
2. Donner un équivalent simple au voisinage de 0 de
$$\ln\left(x+\sqrt{x}\right)-\ln(x)$$
3. En déduire la convergence de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\left(x+\sqrt{x}\right)-\ln(x)}{x^{3/4}}\,\mathrm{d}x$.
4. Donner un équivalent simple au voisinage de $+\infty$ de $\ln\left(x+\sqrt{x}\right)-\ln(x)$. En déduire la nature de $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln\left(x+\sqrt{x}\right)-\ln(x)}{x^{3/4}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 22

Après en avoir justifié l'existence, calculer par récurrence la valeur de $I_n = \displaystyle\int_0^1 (\ln x)^n\,\mathrm{d}x$.