Chapitre n°5

Applications linéaires

Dans tout ce chapitre, E et F désignent des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$.

I. Applications linéaires

I. 1 Définition et exemples

Définition 1.1

Soit $f : E \to F$ une application. On dit que f est une **application linéaire** si :

-
-

On appelle

- une application linéaire de E dans lui-même.
- une application linéaire bijective.
- un endomorphisme bijectif.
- On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E dans F, et on note $\mathcal{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

Méthode :

Pour montrer qu'une application est linéaire, on utilise plutôt la conséquence de la définition suivante. L'application f est linéaire si et seulement si

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (x, y) \in E^2,$$

Des conséquences de la définition :

- On a $f(0_E) =$
- Pour tout $x \in E$, $f(-x) =$
- Soient $k \in \mathbb{N}^*$, $x_1, x_2, \dots, x_k$ des vecteurs de E et $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$ des scalaires. Alors :

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \dots + \lambda_k x_k) =$$

Autrement dit, l'image d'une combinaison linéaire est la combinaison linéaire des images.

Exemple :

- L'application identité de E :
- L'application nulle :
- L'application $\varphi_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi_1(x, y) = (x + 5y, 9x - 2y, 4x + 3y)$ est linéaire. Ce n'est pas un endomorphisme.
- L'application $\varphi_2 : \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}_n[X]$ définie par $\varphi_2(P) = P'$ est linéaire. C'est pas un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

Méthode :

Pour montrer qu'une application φ est un endomorphisme :

- On vérifie que les images par φ arrivent bien dans E.
- On vérifie que φ est linéaire.

Exercice 1

Montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P^2 + P' \end{array}$ n'est pas linéaire.

Exercice 2

Montrer que l'application $\varphi : P \in \mathbb{R}_3[X] \mapsto \left(X^2 - 1\right) P'' - 2XP' + P$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_3[X]$. Préciser l'image de chacun des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.

Exercice 3

Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible.
2. On considère l'application $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \mapsto P^{-1}MP$.
   (a) Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Montrer que φ est bijectif. Expliciter φ^{-1}.

Proposition 1.2

Soient E, F et G trois espaces vectoriels.

- $\mathcal{L}(E, F)$ est un espace vectoriel.
- Si $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(\quad,\quad)$ alors $g \circ f \in$
- Si f est un isomorphisme de $\mathcal{L}(E, F)$, alors f^{-1} est un isomorphisme de

Remarques :

R1 – La proposition précédente montre qu'une combinaison linéaire d'applications linéaires est une application linéaire, et que la composée d'une application linéaire est une application linéaire.

R2 – La réciproque d'une application linéaire bijective est une application linéaire bijective, et en particulier

$$f \circ f^{-1} = \qquad\qquad\qquad\qquad f^{-1} \circ f =$$

II. Image d'une application linéaire

Définition 2.1

Soit f une application linéaire de E dans F.
On appelle **image** de f et on note $\mathrm{Im}(f)$ l'ensemble des images par f des vecteurs de E, ou encore l'ensemble des vecteurs de F qui ont un antécédent par f c'est-à-dire :

$$\mathrm{Im}(f) = \qquad\qquad\qquad \text{ou encore :} \quad \mathrm{Im}(f) =$$

Théorème 2.2

Soient f une application linéaire de de E dans F, et $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E. Alors :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\left(f(e_1), f(e_2), \ldots, f(e_n)\right)$$

En particulier, $\mathrm{Im}(f)$ est un sous-espace vectoriel de

Démonstration.

□

Théorème 2.3

Soit f une application linéaire de E dans F, alors :

$$f \text{ est surjective } \Leftrightarrow Im(f) = F$$

Exercice 4

Montrer que les application suivantes sont linéaires puis déterminer si elles sont injective :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$ $\quad f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$

II. 1 Noyau d'une application linéaire

Définition 2.4

Soit f une application linéaire de $\mathcal{L}(E, F)$ On appelle **noyau de** f et on note $\mathrm{Ker}(f)$ l'ensemble des vecteurs de E qui ont une image nulle par f ou encore l'ensemble des antécédents par f du vecteur nul de F c'est-à-dire :

$$\mathrm{Ker}(f) =$$

Exercice 5

Déterminer le noyau de chacune des applications linéaires ci-dessous

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2, u = (x, y, z) \mapsto (x + y, y - z)$;
2. $g : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}^2, P \mapsto (P(1), P'(1))$;
3. $h : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), M \mapsto AM - MA$, où $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Remarque :

> Le noyau d'une application linéaire f est l'ensemble des solutions du système linéaire homogène associé à la matrice de f. On en déduit le Théorème suivant :

Théorème 2.5

Soit f une application linéaire de E dans F. Alors $\text{Ker}(f)$ est un sous-espace vectoriel de

Démonstration.

□

Théorème 2.6

Soit f une application linéaire de E dans F, alors f est injective si et seulement si $Ker(f) = \{0_{n,1}\}$

Démonstration.

□

Exercice 6

Montrer que les application suivantes sont linéaires puis déterminer si elles sont injectives :

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$ $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \rightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array} \right.$

III. Théorème du rang

Définition 3.1

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$. On appelle **rang** de f, et on note , la dimension de $\text{Im}(f)$.

Remarques :

R1 – Comme $\text{Im}(f)$ est toujours un sous-espace vectoriel de F, on a

R2 – Ainsi si $\mathcal{B} = (u_1, u_2, ..., u_n)$ est une base de E,

$$rg(f) = \dim\left(Vect(f(u_1), f(u_2), ..., f(u_n))\right)$$

Proposition 3.2

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

$$f \text{est surjective } \Leftrightarrow rg(f) = \dim(F)$$

Exercice 7

Déterminer le rang de l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & M + {}^tM \end{array}$$

Théorème 3.3

Si E est un espace vectoriel de dimension finie, et $f \in \mathcal{L}(E, F)$, alors

Attention:

C'est la dimension de l'espace de **départ** qui rentre en jeu.

Méthode :

Pour déterminer le noyau et l'image d'une application linéaire :

1. On commence par déterminer celui qui parait le plus simple, ou demandé en premier.
2. Le théorème du rang donne la dimension de l'autre, que l'on cherche à déterminer ensuite.

Exercice 8

Déterminer le rang de l'application linéaire $\begin{array}{rccc} f: & \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} & \longmapsto & (a+e+i, c+e+g, a+c+g+i) \end{array}$

Exercice 9

Soit f un endomorphisme non nul d'une espace vectoriel E de dimension 3 tel que $f \circ f = 0$.

1. Montrer que $\operatorname{Im}(f) \subset \operatorname{Ker}(f)$.
2. En déduire que $\dim(\operatorname{Ker}(f)) \geq 2$.
3. Conclure que $\operatorname{rg}(f) = 1$.

Il découle du théorème la propriété suivante.

Proposition 3.4 — Conséquences importantes

Soit $f \in \mathcal{L}(E, F)$, où E et F sont des espaces vectoriels de **dimension finie**.

1. Si $\dim\,(E) = \dim\,(F)$, alors

$$f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ surjective } \Leftrightarrow f \text{ bijective}$$

2. Si f est bijective, alors $\dim\,(E) = \dim\,(F)$.

Remarques :

R1 – Si f est un endomorphisme de E, avec $\dim\,(E) = n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{f \text{ injective } \Leftrightarrow f \text{ bijective } \Leftrightarrow f \text{ bijective } \Leftrightarrow Ker(f) = \{0_E\} \Leftrightarrow \operatorname{Im}(f) = F \Leftrightarrow rg(f) = n}$$

R2 – Soit φ une application linéaire de E dans F. Alors,

- Si $\dim(E) < \dim(F)$, alors Φ n'est pas
- Si $\dim(F) < \dim(E)$, alors Φ n'est pas

IV. Applications linéaires et matrices

IV. 1 Action d'une application linéaire sur une base

Proposition 4.1

Soit φ une application linéaire de E dans F. Alors,

- φ est entièrement déterminée par l'image des vecteurs d'une base de E.
- Soit $\psi \in \mathcal{L}(E, F)$. Si φ et ψ coïncident sur les vecteurs d'une base de E, alors $\varphi = \psi$.

Remarques :

R1 – Le premier moins signifie au'il suffit de connaître les images des vecteurs d'une base quelconque de l'espace de départ pour "connaître" φ.

R2 – Le deuxième peut se reformuler ainsi :

Proposition 4.2

Soient φ une application linéaire de E dans F et $\mathcal{B} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ une base de E. Alors,

- φ est injective si et seulement si $(\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n))$ est libre ;
- φ est surjective si et seulement si $(\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n))$ est génératrice dans F ;
- φ est bijective si et seulement si $(\varphi(u_1), \varphi(u_2), \ldots, \varphi(u_n))$ est une base de F.

IV. 2 Matrice associée à une application linéaire

- Considérons une application linéaire

$$\varphi : E \longrightarrow F$$

- Soit $\mathcal{B}_E = (e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, f_2, ..., f_n)$ une base de F.
- Comme φ est entièrement caractérisée par son action sur $\mathcal{B}_E$ et que tout vecteur de F se décompose de manière unique comme combinaison linéaire des vecteurs de $\mathcal{B}_F$, il suffit de connaître les cordonnées des images des $\varphi(u_i)$ dans la base $\mathcal{B}_F$ pour avoir toutes les informations sur φ. On l'appelle la matrice de φ dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}_F$.

Définition 4.3

Soit E et F deux espaces vectoriels de dimension finie tels que dim $(E) = p$, dim $(F) = n$, et $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$. Soit $\mathcal{B} = (e_1, e_2, ..., e_p)$ une base de E, et $\mathcal{B}' = (f_1, f_2, ..., f_n)$ une base de F. On appelle matrice de φ relativement aux bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et on note $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$, la matrice

$$Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi) =$$

La j-ème colonne est constitué des coordonnées de $\varphi(e_j)$ dans la base $\mathcal{B}'$.

Proposition 4.4

On reprend les notations précédentes. Soient $u \in E$, $v \in F$, dont les coordonnées dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ sont X et Y. On note $A = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$. Alors

$$\varphi(u) = v \Leftrightarrow Y = AX$$

Sous forme de schéma :

Remarque :

Lorsque les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ correspondent aux bases canoniques de E et F, la matrice $Mat_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\varphi)$ est appelée :

Exercice 10

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_2[X],\ \varphi(P(X)) = P(X) + (1-X)P'(X)$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$ et détermineer sa matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminer son noyau et son image.

Remarques :

R1 – ATTENTION !! Si on change l'ordre des vecteurs dans la base, on change la matrice.

R2 – Une matrice d'application linéaire n'a de sens que si les bases de départ et d'arrivée sont précisées.

R3 – Une application linéaire a une infinité de représentation matricielle possible.

IV. 3 Liens entre les opérations sur les matrices et les opérations sur les applications linéaires

Proposition 4.5 — Somme de matrices et applications linéaires

Soit $f, g : E \longrightarrow F$ deux applications linéaires $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F.
On note $A = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ et $B = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(g)$ leurs matrices associés et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors :

- $A + B = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\qquad\qquad)$.
- $\lambda.A \quad = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(\lambda f)$.

Attention:

Il faut prendre la même base de départ et la même base d'arrivée pour représenter f et g.

Exercice 11

Soit f l'application linéaire définie par $f(x,y) = (x+y, x-y)$, écrire la matrice de $f + Id_{\mathbb{R}^2}$ et $2f$ dans la base cannonique.

Théorème 4.6 — Isomorphisme

Soit $\mathcal{B}$ une base de E espace vectoriel de dimension p et $\mathcal{C}$ une base de F de dimension n Les deux bases sont **fixées**.
Alors l'application qui à $f \in \mathcal{L}(E,F)$ associe $Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ est un isomorphisme d'espace vectoriels entre $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$

Proposition 4.7 — Composition d'applications linéaires

Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications linéaires entres les espaces vectoriels E, F et G.
Alors $g \circ f$ est une .

Théorème 4.8 — Composition et produit de matrices

Soient $f : E \longrightarrow F$, $g : F \longrightarrow G$ des applications linéaires et $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ des bases respectives des espaces vectoriels de dimension finie E, F et G.
Si $A = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)$ et $B = Mat_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(g)$ alors

$$Mat_{\mathcal{D},\mathcal{C}}(g)Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) = Mat_{\mathcal{D},\mathcal{B}}(g \circ f).$$

Attention:

Il faut bien faire attention aux bases utilisées pour écrire les matrices.

Proposition 4.9

Soit f un isomorphisme de E vers F où E est un espace vectoriel de dimension finie, alors F est aussi de dimension finie et $\dim F = \dim E$.

Proposition 4.10 — matrice d'une application linéaire bijective

Soient E et F deux espaces vectoriels de dimension finie et f une application linéaire de E dans F.
Soit $\mathcal{B}$ une base de E et $\mathcal{C}$ une base de F. La matrice de f est notée

$$A = Mat_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f).$$

Alors
A est inversible si et seulement si f est bijective.
Dans ce cas là

$$A^{-1} = Mat_{\mathcal{B},\mathcal{C}}(f^{-1}).$$

Attention:

Il faut bien faire attention que lorsque l'on passe de la matrice de f à celle de f^{-1} les bases de départ et d'arrivée sont inversées.

IV. 4 Noyau et image d'une matrice

D'après ce qu'on vient de voir, il y a une correspondance directe entre matrice et applications linéaires. En effet si on se donne une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et on note

$$\varphi_A : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & AX \end{array} \right.$$

alors

- $\mathrm{Ker}(\varphi_A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}) \quad AX = 0_{n,1}\}$
- Si $(E_1, E_2, ..., E_p)$ est la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$, alors

$$\mathrm{Im}(\varphi_A) = Vect\left(\varphi_A(E_1), \varphi_A(E_2), ..., \varphi_A(E_p)\right)$$

  et en notant $C_1, C_2, ...C_p$ les colonnes de A, comme $\varphi_A(E_j) = C_j$,

$$\mathrm{Im}(\varphi_A) = Vect(C_1, ..., C_p)$$

- $rg(\varphi_A) = \dim\ (\mathrm{Im}(\varphi_A)) = \dim\ \ (Vect(C_1, ..., C_p))$.

Ceci justifie les définitions suivantes :

Définition 4.11

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

- Le **noyau** de A, noté $\mathrm{Ker}(A)$ est défini par
- **L'image** de A, notée $\mathrm{Im}(A)$, est définie par

  où pour tout $j \in [|1;p|]$, C_j est
- Le **rang** de A, noté $rg(A)$, est la dimension de $\mathrm{Im}(A)$

Le théorème du rang s'énonce alors sous la forme :

Théorème 4.12 — Théorème du rang

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$.

V. Changement de base

V. 1 Rappel - Matrices de passage

Définition/Proposition 5.1

Soient $\mathcal{B}_1 = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$, $\mathcal{B}_2 = (f_1, \ldots, f_n)$ deux bases d'un espace vectoriel E et v un vecteur de E.
On appelle **matrice de passage de** $\mathcal{B}_1$ **à** $\mathcal{B}_2$ la matrice :

$$P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = \begin{array}{cc} f_1 \ \ldots\ldots \ f_n & \\ \left(\begin{array}{c} \\ \quad * \quad \\ \\ \end{array} \right) & \begin{array}{c} e_1 \\ \vdots \\ e_n \end{array} \end{array}$$

dont la $j^{\text{ème}}$ colonne est formée du vecteur colonne des coordonnées f_j exprimées dans la base $\mathcal{B}_1$, c'est à dire $P_j = \mathcal{M}_{\mathcal{B}_1}(f_j)$.
Cette matrice $P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}$ permet de calculer les coordonnées dans $\mathcal{B}_1$ en fonction des coordonnées dans $\mathcal{B}_2$.
Elle est inversible et vérifie

$$P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}^{-1} = P_{\mathcal{B}_2,\mathcal{B}_1}$$

Remarque :

On a la relation

$$\boxed{P_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2} = Mat_{\mathcal{B}_1,\mathcal{B}_2}(Id_E)}$$

Exercice 12

Soit $\mathcal{B} = (P_0, P_1, P_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$. Soit $\mathcal{B}' = (R_0, R_1, R_2)$, où

$$R_0(X) = 1, \quad R_1(X) = X - 1, \quad \text{et} \quad R_2(X) = (X-1)^2$$

une autre base de $\mathbb{R}_2[X]$. Déterminer la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ puis la matrice de passage Q de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$.

Proposition 5.2

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E.
Soit $u \in E$. On note $X \in \mathcal{M}_{n,1}$ les coordonnées de u dans la base $\mathcal{B}$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}$ celles dans la base $\mathcal{B}'$. Alors,

$$Y = (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1} X, \quad \text{ou encore} \quad X = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} Y$$

Exercice 13

Soit $\mathcal{B} = (e_0, e_1, e_2)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
Soit $\mathcal{B}' = (u, v, w)$, où $u = (1, -1, 1), v = (0, 1, 1)$ et $w = (0, 1, -1)$, une autre base de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la matrice de passage R de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
2. Quelles sont les coordonnées du vecteur $(1, 2, 3)$ dans la base $\mathcal{B}'$?

V. 2 Formule de changement de base

Proposition 5.3

Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et φ un endomorphisme de E. Alors,

$$\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}) = P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} \,\text{Mat}\,(\varphi, \mathcal{B}')\,(P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1}$$

ou de manière équivalente

$$\text{Mat}\,(\varphi, \mathcal{B}') = (P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'})^{-1}\,\text{Mat}(\varphi, \mathcal{B}) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

Exercice 14

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & -4 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

On pose : $u = (1, 2, -1), v = (1, 1, 0), w = (2, 0, 1)$.

1. Calculer $f(u)$.
2. Montrer que $\text{Ker}(f - id) = \text{Vect}(v, w)$.
3. Montrer que $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
4. Déterminer la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}'$.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, calculer $f^n(u)$.

Remarque :

> L'idée est alors de trouver une base dans laquelle la matrice qui représente l'endomorphisme est diagonale (ou au moins triangulaire), celle-ci rendant par exemple le calcul des puissances nettement plus simple. C'est tout l'objet du chapitre intitulé Réduction des endomorphismes.

V. 3 Matrices semblables

Définition 5.4

Deux matrices M et M' de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sont dites semblables s'il existe une matrice $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ inversible telle que

$$M' = P^{-1}MP$$

Retenir

Deux matrices sont semblables si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes. La matrice P est alors la matrice de passage entre ces deux bases.

Proposition 5.5

- Deux matrices semblables ont le même rang.
- Si deux matrices sont semblables et que l'une est inversible, alors l'autre aussi.

Une récurrence immédiate qu'il faut savoir refaire parfaitement donne la relation ci-dessous, très pratique comme on l'a déjà compris.

Proposition 5.6

Soient M et N deux matrices semblables telles que $M = P^{-1}NP$. Alors, pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $M^k = P^{-1}N^kP$.