Sujet EML

E C G

Sujet de la semaine

Option économique

MATHEMATIQUES

14 octobre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
Les questions précédées de (*) sont réservées aux cubes.

Exercice 1

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
   (b) Justifier que f est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[1$ et calculer $f'(x)$pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.
   (c) Montrer : $\qquad f'(x) \underset{x\to 0}{\to} -\dfrac{1}{2}$
   (d) Établir que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.
2. (a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

   $$u(x) = (1 - x)e^x - 1$$

   (b) Montrer : $\qquad \forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0.$
   (c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$
   Dresser le tableau des variations de f.
   (d) Montrer que la courbe représentative de f admet une droite asymptote en $-\infty$.
   (e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.
2. (a) Établir : $\quad \forall x \in [0;+\infty[\,,\ e^{2x} - 2x\ e^{x} - 1 \geq 0$

   (b) Montrer : $\quad \forall x \in]0;+\infty[\,,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2x\ e^{x} - 1}{2\,(e^{x}-1)^2}$

   (c) Montrer : $\quad \forall x \in [0;+\infty[\,,\ -\dfrac{1}{2} \leq f'(x) < 0.$

   (d) Établir : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}\,|u_n - \alpha|$
3. En déduire : $\quad \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1-\alpha)$
4. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.
5. Écrire un programme Python qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$$

1. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x\,(3-e^{x})}{e^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

2. (a) Montrer : $\quad \forall x \in [0;+\infty[\,,\ 0 \leq G(x) \leq x\ f(x).$
   En déduire la limite de G en $+\infty$.

   (b) Montrer : $\quad \forall x \in]-\infty;0]\,,\ G(x) \leq x\ f(x)\,.$
   En déduire la limite de G en $-\infty$.
3. Dresser le tableau des variations de G. On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.

Exercice 2

On considère les matrices carrées d'ordre trois : $\quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Partie I : Réduction de A

1. Est-ce que A est inversible ?
2. Déterminer les valeurs propres de A, c'est Ã dire les valeurs de λ telles que $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible.
   (*)Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.
3. (*) Déterminer une matrice carrée P d'ordre trois, inversible, dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1, telle que $A = P\ D\ P^{-1}$ et calculer P^{-1}.

Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$

On se propose de résoudre l'équation (1) : $M^2 = A$, d'inconnue M, matrice carrée d'ordre trois.
Soit M une matrice carrée d'ordre trois. On note $N = P^{-1}M\ P$. (La matrice P a été définie en **I.3.**)

1. Montrer : $\qquad M^2 = A \Longleftrightarrow N^2 = D$.
2. Établir que, si $N^2 = D$, alors $N\ D = D\ N$.
3. En déduire que, si $N^2 = D$, alors N est diagonale.
4. Déterminer toutes les matrices diagonales N telles que $N^2 = D$.
5. (*) En déduire la solution B de l'équation (1) dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

Partie III : Intervention d'un polynôme

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré deux, et un seul, que l'on calculera, tel que :
$$Q(0) = 0, \quad Q(1) = 1, \quad Q(4) = 2.$$
2. (*) En déduire : $\qquad -\dfrac{1}{6}A^2 + \dfrac{7}{6}A = B$. (La matrice B a été définie en **II.5.**)
3. Montrer, pour toute matrice carrée F d'ordre trois :
$$A\ F = F\ A \Longleftrightarrow B\ F = F\ B.$$

EXERCICE 3

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q.
Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$et $p + q = 1$.

Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de T. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donner $\mathrm{P}(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T.
2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$.

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
On note Z. la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.
Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ est égale à 1.
Pour tout entier naturel non nul i, on note :
 B_i l'événement "la i-ème boule tirée est blanche",
 N_i l'événement "la i-ème boule tirée est noire".

1. (a) Montrer, pour tout entier $k \geq 2$: $\mathrm{P}(X = k) = q\ p^{k-1} + p\ q^{k-1}$.
 (b) Vérifier : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k) = 1$

(c) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $E(X) = \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} - 1$.

2. (a) Pour tout entier $k \geq 2$, déterminer $\mathrm{P}((X = k) \cap (Y = 1))$
   (On distinguera les cas $k = 2$ et $k \geq 3$.)

   (b) En déduire : $\mathrm{P}(Y = 1) = q(1 + p)$.

   (c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

   On admet que l'espérance de Y existe et que : $E(Y) = \dfrac{1}{q}\left(1 - p + p^2\right)$.

3. Donner la loi de Z et son espérance.

4. Montrer que les variables aléatoires Y Z et $X - 1$ sont égales.

5. Montrer que le couple (Y, Z) admet une covariance et exprimer $\mathrm{cov}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ à l'aide de $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$.