$\boxed{\text{Devoir Libre n°3}}$

Réponse le 04/11/24

Exercice n°1

On note f la fonction définie, pour tout réel strictement positif x, par : $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et exprimer I_n en fonction de n.
   (b) En déduire : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.
2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = f(n)$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.
3. (a) Établir : $\forall k \in \mathbb{N}^*, f(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$.
   (b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$
   (c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

Exercice n°2

Le but de l'exercice est de déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n}dt$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n
2. Calculer u_0 et u_1
3. (a) Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ln(2)$.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire $\ln(2) - u_n$ sous la forme d'une intégrale.
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(2) - u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.
   (c) Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , on pose $v_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$.

5. (a) Justifier, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, la convergence de l'intégrale définissant v_n.
   (b) Montrer : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![, 0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{n-1}$.
   (c) En déduire $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} v_n$ puis donner la valeur de $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$.

Exercice n°3

Soit n est un entier supérieur ou égal à 2 . On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et Id l'application identité de E. L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant l'équation $(\mathcal{E})$: $f \circ f = 4$ Id .

Partie A : Étude du cas $n = 2$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $u = (\sqrt{2} - 2; \sqrt{2})$.

1. Montrer que f vérifie l'équation $(\mathcal{E})$, puis préciser le noyau et l'image de f.
2. On note $F = \operatorname{Ker}(f - 2Id)$ et $G = \operatorname{Im}(f - 2Id)$.
   (a) Montrer que G est engendré par le vecteur u. En déduire la dimension de F et donner une base de F.
   (b) (*) Vérifier que G est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre -2 .
3. (*) Montrer que f est diagonalisable ; préciser les valeurs propres de f et donner la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

Partie B : Étude du cas général.

On se place désormais dans le cas où n est supérieur ou égal à 2 , et on considère un endomorphisme f de E vérifiant l'équation $(\mathcal{E})$.

1. (a) Justifier que f est un automorphisme de E et exprimer l'automorphisme réciproque f^{-1} en fonction de f.
   (b) (*)Déterminer les valeurs propres possibles de f.
   (c) Vérifier que $2Id$ et $-2Id$ satisfont l'équation $(\mathcal{E})$.

On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2$ Id et $f \neq -2$ Id , et on note $F = \operatorname{Ker}(f - 2 \text{ Id })$ et $G = \operatorname{Im}(f - 2Id)$.

2. Soit x un élément de E.
   (a) Montrer que $(f(x) - 2x)$ appartient à $\operatorname{Ker}(f + 2Id)$ et que $(f(x) + 2x)$ appartient à F.
   (b) En déduire que $G \subseteq \operatorname{Ker}(f + 2Id)$ et que $\operatorname{Im}(f + 2Id) \subseteq F$.
   (c) (*) Montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f.
3. Soit x un vecteur de $\operatorname{Ker}(f + 2Id)$.
   (a) Exprimer $(f - 2Id)(x)$ en fonction de x uniquement. En déduire que x appartient à G, puis que $G = \operatorname{Ker}(f + 2Id)$
   (b) (*) Montrer que f est diagonalisable.