Les basiques

Applications linéaires

Exercice 1

Montrer que les applications suivantes sont linéaires. Étudier (de façon « élémentaire ») leur injectivité, surjectivité. Dans le cas d'une applications bijective, on donnera la bijection réciproque.

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (x+2y, x-y) \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \mapsto & (-x+2y, x-2y) \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y-z, x-y+2z) \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^4 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z,t) & \mapsto & (x+y-z-t, x-y+2z+t, x+3y-4z-3t) \end{array}$
5. $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y+3z, x+y+2z) \end{array}$
6. $f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y+3z, 2x+4y+6z) \end{array}$

Exercice 2

Montrer que les applications suivantes sont linéaires.

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}^3 \\ P & \mapsto & (P(0), P(1), P(2)) \end{array}$
2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X+1) \end{array}$
3. $f_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$
4. $f_4 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$
5. $f_5 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P'(2X+1)+P(3X-1) \end{array}$
6. $f_6 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$
7. $f_7 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & X^2\displaystyle\int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t + X\int_{-1}^1 P(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$
8. $f_8 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \to & ? \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 P(X+t)\,\mathrm{d}t \end{array}$

Images et noyaux

Exercice 3

Calculer le noyau et l'image des applications suivantes.

1. $$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y) & \mapsto & (x+y, x-y, x+3y) \end{array}$$
2. $$\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+y+z, x-2y, x-y-3z) \end{array}$$

Exercice 4

Montrer que $f : \mathbb{R}_3[X] \to \mathbb{R}_3[X],\ P \mapsto P - XP'$ est une application linéaire. Déterminer son noyau et son image.

Exercice 5

On considère l'application linéaire f de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par

$$f(x,y,z) = (x+z, y-x, z+y, x+y+2z).$$

1. Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
2. Déterminer une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
3. L'application f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 6

Pour les trois applications suivantes calculer le noyaux et l'image. Les quelles sont injectives ? surjectives ? bijectives ?

1. $$\varphi_1 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \to & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$
2. $$\varphi_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$
3. $$\varphi_3 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \to & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$$

Exercice 7

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f\big((x,y,z)\big) = \big(x+y+z,\ x+2y+3z,\ x-z\big).$$

1. Déterminer une base de Ker f. L'application f est-elle injective ?
2. Déterminer une base de Im f. L'application f est-elle surjective ?

Exercice 8

Soit l'application linéaire :

$$f: \begin{array}{rl} \mathbb{R}^4 & \to \mathbb{R}^4 \\ (x,y,z,t) & \mapsto (0, y-z+t, 2x-y+z+3t, x-y+z+t). \end{array}$$

Trouver une base de chacun des sous-espaces vectoriels suivants : Ker f, Im f, Ker $f \cap$ Im f .

Exercice 9

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f(x,y) = (x+y, x-y, x+y).$$

1. Déterminer le noyau de f, son image ainsi qu'une base de ces deux ensembles
2. f est-elle injective ? surjective ?

Exercice 10

On pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ Soit

$$\varphi \ : \begin{array}{rcl} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$$

1. Montrer que φ est linéaire
2. En posant $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ donner une autre forme de φ.
3. Donner une base de Ker φ et de Im φ

Applications linéaires, représentation matricielle dans les bases canoniques

Exercice 11

Soit l'application linéaire :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x-y+z, x-y, y-z). \end{array}$$

1. Écrire la matrice de l'application f relativement aux bases canoniques.
2. Même question avec l'application linéaire g définie par :

$$g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x+2y+3z, y+2z, 2x+3y+4z). \end{array}$$

Exercice 12

Soit l'application linéaire

$$d: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \longmapsto & P'. \end{array}$$

Écrire la matrice canoniquement associée.

Exercice 13

Soient les applications linéaires f et g définies par :

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P(X+1). \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P(X-1). \end{array}$$

Écrire les matrices de ces applications relativement à la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$, puis multiplier ces matrices entre elles. Que remarque t-on ?

Exercice 14

1. Écrire la matrice A relativement aux bases canoniques de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathbb{R}^3$ de l'application linéaire
$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ P & \longmapsto & (P(0), P(1), P(2)). \end{array}$$
2. Montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.
3. Soient $a, b, c \in \mathbb{R}$, en déduire qu'il existe un unique polynôme P de degré 2 tel que $P(0) = a$, $P(1) = b$ et $P(2) = c$.
Calculer en fonction de a, b et c ce polynôme.

Dans d'autres base

Exercice 15

Soit : $\begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \mapsto & P(X+1)-P(X) \end{array}$

1. Écrire la matrice de f dans les bases canoniques.
2. Écrire la matrice de f avec $\mathbb{R}_2[X]$ muni de la base $(1, 1+X, 1+X^2)$ et $\mathbb{R}_2[X]$ muni de la base $(X(X-1), X(X+1), (X+1)(X-1)$.

Exercice 16

On note (J_1, J_2, J_3, J_4) la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Soit f l'application définie sur $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ par

$$f : M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \longmapsto M + (a+d)I_2$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
2. Déterminer la matrice A de f dans la base (J_1, J_2, J_3, J_4).
3. (a) Montrer que $(J_1 - J_4, J_2, J_3, I_2)$ est une base de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
   (b) Déterminer la matrice D de f dans cette base.
4. Montrer que f est un automorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Exercice 17

On considère l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par :

$$f(x, y, z) = (x + 2y - 2z, 2x + y - 2z, 2x + 2y - 3z)$$

et $\overrightarrow{e}u_1 = (1, 1, 1)$, $\overrightarrow{e}u_2 = (-1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{e}u_3 = (1, 0, 1)$.

1. Écrire la matrice A de f dans la base cannonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Calculer $f(\overrightarrow{e}u_1)$, $f(\overrightarrow{e}u_2)$ et $f(\overrightarrow{e}u_3)$ et écrire la matrice A' de f dans la base $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e}u_1, \overrightarrow{e}u_2, \overrightarrow{e}u_3)$.
3. Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.

Exercice 18

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

— Définir l'application f telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(f)$ où $\mathcal{C}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

— Définir l'application g telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(g)$ où $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.

— Définir l'application h telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{D}}(h)$ où $\mathcal{D}$ est la base $(1, 1+X, 1+X+X^2$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 19

On reprend les notations de l'exo .
On pose $P_0 = \dfrac{(X-1)(X-2)}{2}$, $P_1 = \dfrac{X(X-2)}{-1}$ et $P_2 = \dfrac{X(X-1)}{2}$.

1. Montrer que $(P_0,\ P_1,\ P_2)$ forme une base de $\mathbb{R}_2[X]$
2. Écrire la matrice de l'application f en prenant comme base de $\mathbb{R}_2[X]$ cette base et comme base de $\mathbb{R}^3$ la base canonique.
3. En déduire une expression de f^{-1} de la forme

$$f^{-1} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \rightarrow & R_2[X] \\ (a,b,c) & \mapsto & ? \end{array}.$$

Matrices de passage

Exercice 20

Déterminer la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$.

1. $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et $\mathcal{B}' = (u, v, w)$ avec $u = (1, 1, 1), v = (1, -1, 0)$ et $w = (1, 1, -2)$.
2. $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ et $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right)$.
3. $\mathcal{B}$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ et $\mathcal{B}' = (-X^2 + 2X + 1, X + 1, X^2 + 2)$.
4. $\mathcal{B} = \left(1, X - 2, X^2 - 3X + 3\right)$ et $\mathcal{B}'$ est la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$

Exercice 21

Soit $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ l'application linéaire, dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -6 \\ 1 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer des vecteurs $(\overrightarrow{e}u, \overrightarrow{e}v, \overrightarrow{e}w)$ non nuls tels que $f(\overrightarrow{e}u) = \overrightarrow{e}u$, $f(\overrightarrow{e}v) = 2\overrightarrow{e}v$, $f(\overrightarrow{e}w) = -3\overrightarrow{e}w$.
2. Montrer que la famille $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}u, \overrightarrow{e}v, \overrightarrow{e}w)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.

3. Écrire la matrice N de l'application f dans cette base.
4. Donner la matrice de passage P de la base canonique vers la base $\mathcal{B}$.
   Calculer son inverse P^{-1}.
5. Donner la relation entre les matrices M, N et P. En déduire le calcul de M^n.

Exercice 22

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & X(P(X+1) - P(X-1)) \end{array}$

1. Écrire la matrice de φ dans la base canonique
2. En utilisant une matrice de passage écrire la matrice de φ dans la base $(1, -1+X, -X+X^2, -X^2+X^3)$

Exercice 23

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_3[X] & \to & \mathbb{R}_3[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$

1. Écrire la matrice de φ dans la base canonique
2. En utilisant une matrice de passage écrire la matrice de φ dans la base $(X(X-1)(X-2), X(X-1)(X-3), X(X-2)(X-3), (X-1)(X-2)(X-3)$

Bases adaptées

Exercice 24

Soit

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & \left(x, \dfrac{x+y-z}{2}, \dfrac{x-y+z}{2}\right) \end{array}$$

1. Écrire A la matrice de f dans la base canonique
2. Calculer A^2, en déduire $f \circ f$.
3. f est elle bijective ? si oui calculer sa bijection réciproque
4. Soit $\mathcal{B}' = ((0,1,1), (1,0,1), (0,1,-1)$ montrer que c'est une base et calculer la matrice de f dans cette base. On note B cette matrice, quelle est le lien entre A et B (on fera apparaître P une matrice de passage)

Exercice 25

On considère les matrices carrées d'ordre trois suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer trois vecteurs u, v et w de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ tels que
   — les coefficients de la deuxième ligne de u, v et w soient respectivement $-1, 1$ et 1.
   — u forme une base de $\mathrm{Ker}(A)$;
   — $Av = -v$
   — $\mathrm{Ker}(A - I) = \mathrm{Vect}(w)$
2. Vérifier que (u, v, w) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$. Former la matrice P de passage de la base canonique vers cette nouvelle base.
3. Déterminer P^{-1}.
4. Vérifier que $P^{-1}AP = D$. Est-ce surprenant ? Expliquer.
5. On note φ l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ représenté dans la base canonique par la matrice B. Montrer que la matrice de φ dans la base (u, v, w) est encore une matrice diagonale, que l'on notera C. Expliciter un lien ente C et B.

Exercice 26

Soit u l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans leur base canonique respective est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

On appelle (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et (f_1, f_2) celle de $\mathbb{R}^2$. On pose

$$e_1' = e_2 + e_3,\ e_2' = e_3 + e_1,\ e_3' = e_1 + e_2 \text{ et } f_1' = \frac{1}{2}(f_1 + f_2),\ f_2' = \frac{1}{2}(f_1 - f_2).$$

1. Montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$ puis écrire la matrice de passage$P$ de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vers cette base.
2. Montrer que (f_1', f_2') est une base de $\mathbb{R}^2$ puis écrire la matrice de passage Q de la base canonique de $\mathbb{R}^2$ vers cette base $\mathbb{R}^2$.On note B la matrice de u dans les bases (e_1', e_2', e_3') (espace de départ) et (f_1', f_2') (espace d'arrivé). Trouver un lien entre A B eP et Q
3. Calculer B

Exercice 27

Soit $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \mapsto & (x - 2z, y - 2z, -z) \end{array}$

1. Écrire A la matrice de f dans la base canonique
2. Calculer A^2, en déduire $f \circ f$.
3. f est elle bijective ? si oui calculer sa bijection réciproque
4. Soit $\mathcal{B}' = ((1,0,0),(1,1,0),(1,1,1)$ montrer que c'est une base et tracer(directement) la matrice de f dans cette base.
5. On note B cette matrice, quelle est le lien entre A et B.On fera intervenir P une matrice de passage.

Théorème du rang, image, noyaux

Exercice 28

Déterminer en un coup d'oeil le rang, le noyau et l'image de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 29

On désigne par $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}e_1,\ \overrightarrow{e}e_3,\ \overrightarrow{e}e_3,\ \overrightarrow{e}e_4)$ la base canonique de R^4, et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer une base du noyau et une base de l'image de f et le rang de f.
2. Montrer que $\mathcal{B}' = (\overrightarrow{e}e_3,\ \overrightarrow{e}e_1 - \overrightarrow{e}e_4,\ -2\overrightarrow{e}e_2,\ \overrightarrow{e}e_1 + \overrightarrow{e}e_4)$ est une base de $\mathbb{R}^4$.
3. Ecrire la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$.

Exercice 30

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^4$ dans lui-même défini par $f(x,y,z,t) = (x-y+z, y+z+t, 0, x+y+3z+2t)$.

1. Déterminer les images par f des vecteurs de la base canonique (e_1,e_2,e_3,e_4) de $\mathbb{R}^4$.
2. Écrire la matrice A représentant l'endomorphisme f dans cette base.
3. Montrer que $f(e_3)$ et $f(e_4)$ sont combinaisons linéaires de $f(e_1)$ et $f(e_2)$.
4. En déduire la dimension de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Im}(f)$.
5. Quelle est la dimension du noyau de f ? Montrer que la famille de vecteurs (u,v) avec $u = (-2,-1,1,0)$ et $v = (-1,-1,0,1)$ forme une base de $\mathrm{Ker}(f)$.

Exercice 31

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$, et le rang de f.

Exercice 32

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Donner une base de $\mathrm{Ker}(f)$ et de $\mathrm{Im}(f)$ ainsi que le rang de f.
2. En déduire que $M^n = 0$ pour tout $n \geqslant 2$.

Exercice 33

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $\varphi : P(X) \mapsto (1-X^2)\, P''(X) - 3XP'(X)$ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Calculer $\varphi(1)$. L'endomorphisme φ est-il un automorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$?
2. (a) Donner la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{R}_3[X]$.
   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$ et une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
   Dans cette question, on prend $n = 3$.

Exercice 34

On considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Justifier, sans aucun calcul que f est un automorphisme.
2. Vérifier que $f \circ f \circ f \circ f = \mathrm{Id}$ (sans aucun calcul non plus) et en déduire l'expression de A^{-1} en fonction de A.
3. Déterminer $E_1 = \mathrm{Ker}(f - \mathrm{Id})$ et $E_{-1} = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id})$.

Type concours

Exercice 35

1. On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base $\mathcal{B}$ est

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   (a) Vérifier que l'on a $A^2 \neq 0$ et calculer A^3.

   (b) Déterminer une base (u) de $\mathrm{Ker}(f)$ ainsi qu'une base (v, w) de $\mathrm{Im}(f)$.

   (c) Montrer que $\mathrm{Im}\left(f^2\right) = \mathrm{Ker}(f)$.

   Dans la suite, on considère un endomorphisme g de R^3 tel que

$$g^2 \neq 0, \quad \text{et} \quad g^3 = 0$$

   ce qui signifie que $g \circ g$ n'est pas l'endomorphisme nul, mais que $g \circ g \circ g$ est l'endomorphisme nul. En désignant par M la matrice de g dans la base canonique $\mathbb{R}^3$ de $\mathbb{R}^3$ on a donc : $M^2 \neq 0$ et $M^3 = 0$.

   On se propose de montrer, dans ce cas plus général, que $\mathrm{Im}\left(g^2\right) = \mathrm{Ker}(g)$.

2. (a) Justifier qu'il existe un vecteur u de $\mathbb{R}^3$ tel que $g^2(u) \neq 0$.

   (b) Montrer que $\left(u, g(u), g^2(u)\right)$ est une base de $\mathbb{R}^3$, que l'on notera $\mathcal{B}'$.

   (c) Donner la matrice N de g dans la base $\mathcal{B}'$.

   (d) Déterminer $\mathrm{Im}(g)$ et donner sa dimension. En déduire une base de $\mathrm{Ker}(g)$. Pour finir, déterminer $\mathrm{Im}\left(g^2\right)$ puis conclure.

Exercice 36

On considère la matrice $A \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ définie par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est A.

1. Montrer, sans pivot, que A n'est pas inversible et déterminer $\mathrm{Im}(f)$.
2. (a) Calculer A^2, A^3, A^4.

   (b) Déterminer noyau de f et préciser sa dimension.
3. (a) Montrer que si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^4$, avec $u \neq 0$ et $f(u) = \lambda u$, alors $f^4(u) = \lambda^4 u$. En déduire que $\lambda^4 = 0$ puis que $\lambda = 0$.

   (b) Existe-t-il une base de $\mathbb{R}^4$ dans laquelle la matrice de f est diagonale ?
4. On note

$$\varepsilon_1 = e_1, \quad \varepsilon_2 = f(\varepsilon_1), \quad \varepsilon_3 = f(\varepsilon_2), \quad \varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$$

   et $\mathcal{C} = \{\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4\}$.

   (a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

   (b) Déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$.
5. Existe-t-il un endomorphisme bijectif g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$?

Exercice 37

On note E l'espace vectoriel des fonctions polynomiales de degré inférieur ou égal à 2 et on rappelle que la famille (e_0, e_1, e_2) est une base de E, les fonctions e_0, e_1 e_2 étant définies par :

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad e_0(t) = 1 \quad e_1(t) = t \quad e_2(t) = t^2$$

On considère l'application φ qui, à toute fonction P de E, associe la fonction, notée $\varphi(P)$, définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad (\varphi(P))(x) = \int_0^1 P(x+t)dt$$

1. (a) Montrer que φ est linéaire.

   (b) Déterminer $(\varphi(e_0))(x), (\varphi(e_1))(x)$ et $(\varphi(e_2))(x)$ en fonction de x, puis écrire $\varphi(e_0), \varphi(e_1)$ et $\varphi(e_2)$ comme combinaison linéaire de e_0, e_1 et e_2.

   (c) Déduire des questions précédentes que φ est un endomorphisme de E.
2. Écrire la matrice A de φ dans la base (e_0, e_1, e_2). On vérifiera que la première ligne de A est :

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

   Justifier que φ est un automorphisme de E.

(3) (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, il existe un réel u_n tel que l'on ait :

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & \frac{n}{2} & u_n \\ 0 & 1 & n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   Donner u_0 et établir que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{6}(3n+2)$.

(b) En déduire, par sommation, l'expression de u_n pour tout entier n.

(c) Écrire A^n sous forme de tableau matriciel.

Exercice 38

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

et on note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $E = \mathcal{M}_{3,1}$.

1. (a) Déterminer $(A - I)^2$.
   (b) En déduire que A est inversible et écrire A^{-1} comme combinaison linéaire de I et A.
2. On pose $A = N + I$.
   (a) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n comme combinaison linéaire de I et N, puis l'écrire comme combinaison linéaire de I et A.
   (b) Vérifier que l'expression précédente est aussi valable pour $n = -1$.
   (c) On pose $u_1 = (A - I)(e_1)$ et $u_2 = e_1 + e_3$.
3. (a) Montrer que l'ensemble $E_1 = \{X \in E : (A - I)X = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E et que (u_1, u_2) en est une base.
   (b) Montrer que la famille (u_1, u_2, e_1) est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (c) On note T la matrice dont les colonnes sont respectivement les coordonnées de Au_1, Au_2 et Ae_1 dans la base (u_1, u_2, e_1). Expliciter T.
4. Soit la matrice $P = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible puis que $A = PTP^{-1}$.
5. On note $(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$ la base canonique de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on rappelle que, pour tout (i,j) de $[\![1,3]\!]^2$, la matrice $E_{i,j}$ n'a que des coefficients nuls sauf celui situé à l'intersection de la i-ème ligne et de la j-ème colonne qui vaut 1.
   (a) Montrer que l'ensemble E des matrices M qui commutent avec T, c'est-à-dire des matrices vérifiant l'égalité $MT = TM$, est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille $(E_{1,1} + E_{3,3}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,2}, E_{2,3})$. Vérifier que la dimension de E est égale à 5.
   (b) Soit N une matrice quelconque de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Établir l'équivalence :
   $$NA = AN \iff \left(P^{-1}NP\right)T = T\left(P^{-1}NP\right)$$
   (c) En déduire que l'ensemble F des matrices qui commutent avec A est le sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ engendré par la famille :
   $$\left(P\left(E_{1,1} + E_{3,3}\right)P^{-1}, PE_{1,2}P^{-1}, PE_{1,3}P^{-1}, PE_{2,2}P^{-1}, PE_{2,3}P^{-1}\right)$$

Approfondissement

Exercice 39

On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère un vecteur v fixé de $\mathbb{R}^3$.

On considère également l'application f qui à tout vecteur $u = (a, b, c)$ de $\mathbb{R}^3$ associe le vecteur $f(u)$ définie par :

$$f(u) = u - (a + b + c)v$$

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$.
2. Étude d'un cas particulier. Dans cette question 3 seulement, on suppose que $v = (2, -1, 0)$.
   (a) Vérifier que $f(v) = 0$.f est-il un automorphisme ?
   (b) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (c) On note $w = (-1, 1, 0)$ et $z = (0, -1, 1)$. Montrer que la famille (w, z) est également une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (d) En déduire, sans calculs supplémentaires, une base de $\mathrm{Ker}(f)$.
   (e) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v, w, z)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
   (f) Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ puis dans la base $\mathcal{C}$.

   Retour au cas général. On suppose maintenant que $v = (\alpha, \beta, \gamma)$ vérifie $\alpha + \beta + \gamma = 1$. Montrer que $f(v) = 0$.
3. (a) En déduire que $f \circ f = f$.
   (b) Montrer que le vecteur y appartient à $\mathrm{Im}(f)$ si et seulement si $f(y) = y$.
   (c) En déduire que les vecteurs $e_2 - e_1$ et $e_3 - e_2$ appartiennent à $\mathrm{Im}(f)$.
   (d) Déduire de la question 3a que $\mathrm{rg}(f) \leqslant 2$.
   (e) Déterminer une base de $\mathrm{Im}(f)$.
   (f) Déterminer, en fonction de (α, β, γ) la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Cette matrice est-elle inversible ?
   (g) Montrer que la famille $\mathcal{C} = (v, e_2 - e_1, e_3 - e_2)$ est une base de $\mathbb{R}^3$ puis déterminer la matrice de f dans cette base.

Exercice 40

Les questions sont indépendantes

1. Soient E un espace vectoriel et u, v deux endomorphismes de E qui commutent. Montrer que $\mathrm{Ker}(u)$ et $\mathrm{Im}(u)$ sont stables sous l'action de v.
2. Soient $u = (1,0,0), v = (1,1,1)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$ et $F = \mathrm{Vect}(u, v)$. Trouver un endomorphisme f de $\mathbb{R}^3$ tel que $\mathrm{Ker}(f) = F$.

Exercice 41

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle telle que $A^2 = 0$ et $\mathrm{rg}(A) = r$. On note $(u_1, u_2, \ldots, u_r)$ une base de $\mathrm{Im}(A)$.

1. Quelle est la dimension de Ker(A) ?
2. Montrer que $\mathrm{Im(A)} \subset \mathrm{Ker}(A)$. En déduire que $n \geqslant 2r$.
3. En déduire qu'il existe des vecteurs $v_1, v_2, \ldots, v_{n-2r}$ tels que $(u_1, \ldots, u_r, v_1, \ldots, v_{n-2r})$ forme une base de $\mathrm{Ker}(A)$.
4. Montrer qu'il existe une matrice P inversible telle que

$$A = P \left(\begin{array}{c|c} 0 & I_r \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right) P^{-1}$$

où I_r désigne la matrice identité de taille r.