Sujet EML

E C G

Sujet de la semaine

Option économique

MATHEMATIQUES

14 octobre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
Les questions précédées de (*) sont réservées aux cubes.

Exercice 1

On note $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Partie I : Étude d'une fonction

1. (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

RÉPONSE:

Pour tout $x \neq 0$, $e^x - 1 \neq 0$, donc f est continue sur $\mathbb{R}^*$ comme quotient de fonctions continues de dénominateur jamais nul.
Au voisinage de 0 : $e^x - 1 \sim x$ et donc pour $x \neq 0$: $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{e^x - 1} = 1 = f(0)$
Conclusion : $\boxed{f \text{ est continue sur } \mathbb{R}}$

* * *

(b) Justifier que f est de classe C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$1 et calculer $f'(x)$pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

RÉPONSE:

Pour $x \neq 0$, $e^x - 1 \neq 0$ donc f est C^1 sur $]-\infty; 0[$ et sur $]0; +\infty[$ comme quotient de fonctions C^1 de dénominateur jamais nul et

$$f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{(1 - x)e^x - 1}{(e^x - 1)^2}$$

* * *

(c) Montrer : $\qquad f'(x) \underset{x\to 0}{\to} -\dfrac{1}{2}$

RÉPONSE:

On a le développement limité : $e^x = 1 + x + \dfrac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ *avec* $\varepsilon(x) \to 0$ *quand* $x \to 0$ *donc*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) - 1 - x\left[1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)\right]}{\left(1 + x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) - 1\right)^2} \\
&= \frac{\left(\frac{1}{2} - 1\right)x^2 + x^2\varepsilon_1(x)}{\left(x + x\varepsilon_2(x)\right)^2} \\
&= \frac{-\frac{1}{2} + \varepsilon_1(x)}{\left(1 + \varepsilon_2(x)\right)^2} \to -\frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{f'(x) \underset{x\to 0}{\to} -\dfrac{1}{2}}$

* * *

(d) Établir que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et préciser $f'(0)$.

RÉPONSE:

Soit $x \neq 0$ *:*

$$\frac{f(x) - f(0)}{x} = \frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x} = \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} =_0 \frac{-x^2/2 + o(x^2)}{x(e^x - 1)} \underset{0}{\sim} -\frac{1}{2}$$

Ainsi f *est dérivable en 0 et* $f'(0) = -\dfrac{1}{2}$. *Comme* f *est* C^1 *sur* $\mathbb{R}^*$ *et que* $\lim\limits_{x\to 0} f'(x) = f'(0)$ *alors*

Conclusion : $\boxed{f \text{ est de classe } C^1 \text{ sur } \mathbb{R} \text{ et } f'(0) = -\dfrac{1}{2}.}$

* * *

2. (a) Étudier les variations de l'application $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par

$$u(x) = (1 - x)e^x - 1$$

RÉPONSE:

La fonction u *est dérivable sur* $\mathbb{R}$ *par somme et produit de fonctions dérivables, et*

$$\begin{aligned}
u'(x) &= (1 - x)e^x - e^x \\
&= -xe^x
\end{aligned}$$

Donc

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $u'(t)$		$+$	0	$-$	
Variations de u		$\nearrow$	0	$\searrow$	

* * *

(b) Montrer : $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0.$

RÉPONSE:

Comme on a, pour tout $x \neq 0,\ f'(x) = \dfrac{u(x)}{(e^x-1)^2}$ *alors* f *est du signe de* $u(x) < 0$ *pour* $x \neq 0.$

Et pour $x = 0 : f'(x) = -\dfrac{1}{2} < 0$ *alors*

Conclusion : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) < 0.}$

* * *

(c) Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Dresser le tableau des variations de f.

RÉPONSE:

- *En* $-\infty : f(x) = \dfrac{x}{e^x-1}$ *donc* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = +\infty$.
- *En* $+\infty : f(x) = \dfrac{x}{e^x-1} = \dfrac{x}{e^x(1-1/e^x)}$ *donc* $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$ *car* $x = o(e^x)$ *par croissances comparées et*

x	$-\infty$		0		$+\infty$
Signe de $f'(t)$		$-$	$-1/2$	$-$	
Variations de f	$+\infty$	$\searrow$			0

* * *

(d) Montrer que la courbe représentative de f admet une droite asymptote en $-\infty$.

RÉPONSE:

En $-\infty : \dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{1}{e^x-1}$ *donc* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x} = -1$, *et*

$$\begin{aligned} f(x)+x &= \frac{x}{e^x-1}+x \\ &= \frac{xe^x}{e^x-1} \end{aligned}$$

avec $X = -x \to +\infty$ *on a* $xe^x = -X/e^X \to 0$ *car* $X = o\left(e^X\right)$ *quand* $X \to +\infty$

Donc $f(x)+x \to 0$

Conclusion : $\boxed{\text{la droite d'équation } y = -x \text{ est asymptote à la courbe représentative de } f \text{ en } -\infty}$

* * *

(e) Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

RÉPONSE:

On attende le tracé de

- *l'asymptote en* $-\infty$,
- *l'asymptote horizontale* $(y = 0)$ *en* $+\infty$
- *et la tangente de pente* $-\dfrac{1}{2}$ *en* $(0, 1)$.

* * *

Partie II : Étude d'une suite récurrente associée à la fonction f

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Montrer que f admet un point fixe et un seul, noté α, que l'on calculera.

RÉPONSE:

On remarque que 0 *n'est pas point fixe puisque* $f(0) \neq 0$

Pour $x \neq 0 : f(x) = x \iff \dfrac{x}{e^x - 1} = x \iff 1 = e^x - 1 \iff e^x = 2 \iff x = \ln(2)$

Conclusion : $\boxed{f \text{ admet un point fixe et un seul, } \alpha = \ln(2)}$

* * *

2. (a) Établir : $\forall x \in [0; +\infty[\,,\ e^{2x} - 2x\ e^x - 1 \geq 0$

RÉPONSE:

Soit $g(x) = e^{2x} - 2x\ e^x - 1$. g *est dérivable sur* $\mathbb{R}^+$ *comme sommes et produit de fonctions dérivables et*

$$\begin{aligned} g'(x) &= 2e^{2x} - 2e^x - 2xe^x \\ &= 2e^x(e^x - 1 - x) \end{aligned}$$

On pose à présent $h(x) = e^x - 1 - x$. *La fonction* h *est dérivable sur* $\mathbb{R}^+$ *et*

$$h'(x) = e^x - 1$$

On a donc

x	0		$+\infty$
Signe de $h'(t)$	0	$+$	
Variations de h	0	$\nearrow$	$+\infty$

x	0		$+\infty$
Signe de $g'(t)$	0	$+$	
Variations de g	0	$\nearrow$	

Conclusion : $\boxed{\forall x \in [0; +\infty[\,,\ e^{2x} - 2x\ e^x - 1 \geq 0}$

* * *

(b) Montrer : $\forall x \in]0; +\infty[\,,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2x\ e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}$

RÉPONSE:

Pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} f'(x) + \frac{1}{2} &= \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{2e^x - 2 - 2xe^x + e^{2x} - 2e^x + 1}{2(e^x - 1)^2} \\ &= \frac{e^{2x} - 2x\ e^x - 1}{2(e^x - 1)^2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in]0; +\infty[\,,\ f'(x) + \dfrac{1}{2} = \dfrac{e^{2x} - 2x\ e^x - 1}{2(e^x - 1)^2}}$

* * *

(c) Montrer : $\forall x \in [0;+\infty[\,,\ -\dfrac{1}{2} \leq f'(x) < 0.$

RÉPONSE:

Comme $g(x) \geq 0$ *pour tout* $x > 0$, $f'(x) + \dfrac{1}{2} \geq 0$ *et* $-\dfrac{1}{2} \leq f'(x)$. *Et pour* $x = 0$, $f'(x) = -\dfrac{1}{2}$. *Enfin on a vu que* $f' < 0$ *sur* $\mathbb{R}$ *donc*

Conclusion : $\boxed{\forall x \in [0;+\infty[\,,\ -\dfrac{1}{2} \leq f'(x) < 0.}$

* * *

(d) Établir : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$

RÉPONSE:

On a donc $|f'(x)| = -f'(x) \leq \dfrac{1}{2}$ *pour tout* $x \in \mathbb{R}^+$

On montre alors, par récurrence, que pour tout n : $u_n \in \mathbb{R}^+$ *(la récurrence est ici inutile car* $f > 0$ *sur* $\mathbb{R}$ *)*

$u_0 = 1 \in \mathbb{R}^+$ *et pour tout* $n \geq 1$: $u_n = f(u_{n-1}) > 0$ *car* $f > 0$ *sur* $\mathbb{R}$.

Donc, pour tout entier n : u_n *et* $\alpha \in \mathbb{R}^+$ *et* $|f'| \leq \dfrac{1}{2}$ *sur* $\mathbb{R}^+$ *donc d'après l'inégalité des accroissements finis,*

$|f(u_n) - f(\alpha)| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|$ *et*

Conclusion : $\boxed{\forall n \in \mathbb{N},\ |u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha|}$

* * *

3. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N},\ |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$

RÉPONSE:

On montre alors par récurrence :

Pour $n = 0$: $|u_0 - \alpha| = \dfrac{1}{2}|1 - \alpha|$

Soit $n \in \mathbb{N}$ *tel que* $|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$ *alors* $|u_{n+1} - \alpha| \leq \dfrac{1}{2}|u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)\dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2^{n+1}}(1 - \alpha)$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N} : |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)}$

* * *

4. Conclure que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

RÉPONSE:

Et comme $\left|\dfrac{1}{2}\right| < 1$ *alors* $\dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha) \to 0$ *et comme* $0 \leq |u_n - \alpha| \leq \dfrac{1}{2^n}(1 - \alpha)$, *par encadrement* $|u_n - \alpha| \to 0$ *et*

Conclusion : $\boxed{\text{la suite } (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge vers } \alpha = \ln(2)}$

* * *

5. Écrire un programme Python qui calcule et affiche le plus petit entier naturel n tel que $|u_n - \alpha| < 10^{-9}$

RÉPONSE:

```python
import numpy as np
u=1
n=0
while np.abs(u-np.log(2))>=10**(-9):
        u=u/(np.exp(u)-1)
        n=n+1
print(n)
```

* * *

Partie III : Étude d'une fonction définie par une intégrale

On note $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application définie, pour tout $x \in \mathbb{R}$, par :

$$G(x) = \int_x^{2x} f(t)\,dt$$

1. Montrer que G est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$ et que, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

RÉPONSE:

Comme f est continue sur $\mathbb{R}$, elle y admet une primitive F qui est C^1 sur $\mathbb{R}$.
On a alors $G(x) = F(2x) - F(x)$ et donc G est C^1 sur $\mathbb{R}$ comme composée de fonctions C^1.
et on a :

$$\begin{aligned} G'(x) &= 2F'(2x) - F'(x) \\ &= 2f(2x) - f(x) \\ &= 2\frac{2x}{e^{2x}-1} - \frac{x}{e^x-1} \quad \textit{si } 2x \textit{ et } x \neq 0 \\ &= \frac{4x - x(e^x+1)}{e^{2x}-1} \\ &= \frac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} \\ G'(0) &= 2f(0) - f(0) = 1 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{G \textit{ est de classe } C^1 \textit{ sur } \mathbb{R} \textit{ et } G'(x) = \begin{cases} \dfrac{x(3-e^x)}{e^{2x}-1} & \textit{si } x \neq 0 \\ 1 & \textit{si } x = 0 \end{cases}}$

* * *

2. (a) Montrer : $\forall x \in [0; +\infty[\,,\ 0 \leq G(x) \leq x\, f(x)$.
En déduire la limite de G en $+\infty$.

RÉPONSE:

Soit $x \geq 0$. On a alors $x \leq 2x$ et pour tout $x \leq t \leq 2x : 0 \leq f(2x) \leq f(t) \leq f(x)$ car f est décroissante sur $\mathbb{R}$.
Donc $0 \leq \displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt \leq \int_x^{2x} f(x)\,dt = f(x)(2x - x)$

Conclusion : $\boxed{\forall x \in [0;+\infty[\,,\ 0 \leq G(x) \leq x\ f(x).}$

Et comme $x\ f(x) = \dfrac{x^2}{e^x - 1} = \dfrac{x^2}{e^x}\dfrac{1}{1-e^{-x}}$ *et* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$, *par croissances comparées, alors par encadrement :*

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} G(x) = 0}$

* * *

(b) Montrer : $\forall x \in]-\infty;0]\,,\ G(x) \leq x\ f(x)\,.$
En déduire la limite de G en $-\infty$.

RÉPONSE:

Pour $x \leq 0$ *on a* $2x \leq x \leq 0$ *et pour tout* $2x \leq t \leq x$: $f(t) \geq f(x)$ *car* f *est décroissante sur* $\mathbb{R}$.

D'où $\displaystyle\int_x^{2x} f(t)\,dt \leq \int_x^{2x} f(x)\,dt = f(x)(2x - x)$ *car les bornes sont en ordre décroissant.*

Conclusion : $\boxed{\forall x \in]-\infty;0]\,,\ G(x) \leq x\ f(x)\,.}$

Et comme $\lim\limits_{x\to-\infty} x\ f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x^2}{e^x - 1} = -\infty$, *alors ,*

Conclusion : $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} G(x) = -\infty}$

* * *

3. Dresser le tableau des variations de G. On n'essaiera pas de calculer $G(\ln 3)$.

RÉPONSE:

On rassemble tout :

x	$-\infty$		0		$\ln(3)$		$+\infty$
$e^{2x} - 1$		$-$	0	$+$		$+$	
$3 - e^x$		$+$		$+$	0	$-$	
Signe de $G'(t)$		$+$	1	$+$	0	$-$	
Variations de G	$-\infty$	$\nearrow$			$G(\ln(3))$	$\searrow$	0

* * *

Exercice 2

On considère les matrices carrées d'ordre trois : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

Partie I : Réduction de A

1. Est-ce que A est inversible ?

RÉPONSE:

Les colonnes de A sont liées (première colonne nulle) donc
Conclusion : $\boxed{\textit{A n'est pas inversible.}}$

* * *

2. Déterminer les valeurs propres de A, c'est à dire les valeurs de λ telles que $A - \lambda I_3$ n'est pas inversible. (*)Justifier, sans calcul, que A est diagonalisable.

RÉPONSE:

A est triangulaire donc
Conclusion : $\boxed{\textit{ses valeurs propres sont } 0,\ 1 \textit{ et } 4}$

A est une matrice d'ordre 3 qui possède 3 valeurs propres distinctes
Conclusion : $\boxed{\textit{A est diagonalisable.}}$

* * *

3. (*) Déterminer une matrice carrée P d'ordre trois, inversible, dont tous les termes diagonaux sont égaux à 1, telle que $A = P\ D\ P^{-1}$ et calculer P^{-1}.

RÉPONSE:

On détermine des vecteurs propres associés à chacune des valeurs propres (paramètrage choisi pour avoir des 1 sur la diagonale)

- $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} y + 3z = 0 \\ y + 3z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$ *donc un vecteur propre associé à la valeur propre* 0 *est* $(1, 0, 0)$
- $(A - I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -x + y + 3z = 0 \\ 3z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ z = 0 \end{cases}$ *donc* $(1, 1, 0)$ *est un vecteur propre associé à la valeur propre* 1.
- $(A - 4I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -4x + y + 3z = 0 \\ -3y + 3z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = z \\ y = z \end{cases}$ *donc* $(1, 1, 1)$ *est un vecteur propre associé à la valeur propre* 4.

Donc la famille $((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ *est une base de* $\mathbb{R}^3$, *et la matrice de passage* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est inversible.*

On note D la matrice diagonale avec les valeurs propres dans le même ordre que les vecteurs propres, et on a $A = P\ D\ P^{-1}$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ *et* $B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. *On résout* $PX = B$.

$$\begin{cases} x & +y & +z & = & a \\ & y & +z & = & b \\ & & z & = & c \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x & = & a-b \\ y & = & b-c \\ z & = & c \end{cases}$$

Ainsi $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

* * *

Partie II : Résolution de l'équation $M^2 = A$

On se propose de résoudre l'équation (1) : $M^2 = A$, d'inconnue M, matrice carrée d'ordre trois.
Soit M une matrice carrée d'ordre trois. On note $N = P^{-1}M\ P$. (La matrice P a été définie en **I.3.**)

1. Montrer : $\quad M^2 = A \Longleftrightarrow N^2 = D$.

RÉPONSE:

Avec $A = P\ D\ P^{-1}$ et $M = P\ N\ P^{-1}$ on a $M^2 = P\ N^2\ P^{-1}$ et
$M^2 = A \Longleftrightarrow P\ N^2\ P^{-1} = P\ D\ P^{-1} \Longleftrightarrow N^2 = D$. (en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P)

* * *

2. Établir que, si $N^2 = D$, alors $N\ D = D\ N$.

RÉPONSE:

Si $N^2 = D$, alors $N\ D = N\ N^2 = N^3 = N^2\ N = D\ N$.
Conclusion : $\boxed{\text{si } N^2 = D, \text{ alors } N\ D = D\ N.}$

* * *

3. En déduire que, si $N^2 = D$, alors N est diagonale.

RÉPONSE:

On développe l'écriture de $N = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ *et on ne calcule pas N^2 : on commence par exploiter la conséquence.*

$$N\ D = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & b & 4c \\ 0 & e & 4f \\ 0 & h & 4i \end{pmatrix}$$

$$D\ N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ d & e & f \\ 4g & 4h & 4i \end{pmatrix}$$

$$\textit{Si } N^2 = D, \textit{ alors } N\ D = D\ N \textit{ donc } \left\{\begin{array}{ccc} b & = & 0 \\ 4c & = & 0 \\ 0 & = & d \\ e & = & e \\ 4f & = & f \\ 0 & = & 4g \\ h & = & 4h \\ 4i & = & 4i \end{array}\right. \textit{ et } b = c = d = f = g = h = 0.$$

Conclusion : $\boxed{\textit{Si } N^2 = D \textit{ alors } N \textit{ est diagonale}}$

* * *

4. Déterminer toutes les matrices diagonales N telles que $N^2 = D$.

RÉPONSE:

$$\textit{Soit } N = \begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \end{pmatrix} \textit{ on a } N^2 = \begin{pmatrix} x^2 & 0 & 0 \\ 0 & y^2 & 0 \\ 0 & 0 & z^2 \end{pmatrix}$$

Donc $N^2 = D \iff x^2 = 0 : y^2 = 1 : z^2 = 4 \iff x = 0 : y = \pm 1$ *et* $z = \pm 1$

$$\textit{Les 4 solutions sont } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \textit{ et } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

* * *

5. (*) En déduire la solution B de l'équation (1) dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles.

RÉPONSE:

Avec $M = P\ N\ P^{-1}$, *les valeurs propres de* M *et de* N *sont les mêmes.*

$$\textit{La seule solution de } N^2 = D \textit{ de valeurs propres positives est } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc la seule solution de (1) *dont toutes les valeurs propres sont positives ou nulles est*

$$B = P\ N\ P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Conclusion : $\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}}$

* * *

Partie III : Intervention d'un polynôme

1. Montrer qu'il existe un polynôme Q de degré deux, et un seul, que l'on calculera, tel que :

$$Q(0) = 0, \quad Q(1) = 1, \quad Q(4) = 2.$$

RÉPONSE:

Un polynôme de degré 2 s'écrit : $Q = aX^2 + bx + c$ *avec* a, b *et* c *réels,* $a \neq 0$.

$$\left\{\begin{array}{c} Q(0) = 0 \\ Q(1) = 1 \\ Q(4) = 2. \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} c = 0 \\ a + b + c = 1 \\ 16a + 4b + c = 2. \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{c} c = 0 \\ a + b = 1 \\ 16a + 4b = 2 \quad L_3 - 4L_2 \to L_3 \end{array}\right. ,$$

$$\iff \begin{cases} c = 0 \\ a + b = 1 \\ 12a = -2 \end{cases} \iff \begin{cases} c = 0 \\ b = 7/6 \\ a = -1/6 \end{cases} \quad \text{et } a \neq 0$$

Conclusion : $\boxed{\text{Cet unique polynôme de degré 2 est : } Q = -\frac{1}{6}X^2 + \frac{7}{6}X}$

* * *

2. (*) En déduire : $-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = B$. (La matrice B a été définie en **II.5.**)

RÉPONSE:

On reconnaît $-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = Q(A)$

$$-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = P\left(-\frac{1}{6}D^2 + \frac{7}{6}D\right)P^{-1} = P\begin{pmatrix} Q(0) & 0 & 0 \\ 0 & Q(1) & 0 \\ 0 & 0 & Q(4) \end{pmatrix}P^{-1} = PNP^{-1} = B$$

Conclusion : $\boxed{-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A = B}$

* * *

3. Montrer, pour toute matrice carrée F d'ordre trois :

$$A\ F = F\ A \iff B\ F = F\ B.$$

RÉPONSE:

Pour toute matrice carrée F d'ordre trois :
Si $A\ F = F\ A$ *alors* $A^2F = AFA = FAA = FA^2$ *et donc* $\left(-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A\right)F = F\left(-\frac{1}{6}A^2 + \frac{7}{6}A\right)$ *d'où* $B\ F = F\ B$
Réciproquement,
si $B\ F = F\ B$ *alors* $B^2F = BFB = FBB = FB^2$ *et comme* $B^2 = A$, *on a donc* $A\ F = F\ A$
Conclusion : $\boxed{A\ F = F\ A \iff B\ F = F\ B.}$

* * *

EXERCICE 3

Une urne contient des boules blanches et des boules noires. La proportion de boules blanches est p et la proportion de boules noires est q.
Ainsi, on a : $0 < p < 1$, $0 < q < 1$et $p + q = 1$.

Partie I : Tirages avec arrêt dès qu'une boule noire a été obtenue

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu une boule noire.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués et U la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.

1. Reconnaître la loi de T. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, donner $\mathrm{P}(T = k)$ et rappeler l'espérance et la variance de T.

RÉPONSE:

La variable T est le rang du premier succès lors de la répétition d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes.

Conclusion : $\boxed{T \hookrightarrow \mathcal{G}(q)\,,\ E(T) = \dfrac{1}{q},\ V(T) = \dfrac{p}{q^2} \text{ et pour tout } k \geq 1 : \mathrm{P}(T = k) = p^{k-1}q}$

* * *

2. En déduire que U admet une espérance et une variance. Déterminer $E(U)$ et $V(U)$.

RÉPONSE:

L'évènement $(U = k)$ se réalise si et seulement si $(T = k + 1)$ se réalise, donc $U = T - 1$ et

Conclusion : $\boxed{U \text{ a une espérance et une variance, } E(U) = E(T) - 1 = \dfrac{p}{q} \text{ et } V(U) = V(T) = \dfrac{p}{q^2}}$

* * *

Partie II : Tirages avec arrêt dès qu'une boule blanche et une boule noire ont été obtenues

Dans cette partie, on effectue des tirages successifs avec remise et on s'arrête dès que l'on a obtenu au moins une boule blanche et au moins une boule noire.
On note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages effectués.
On note Y la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches obtenues.
On note Z. la variable aléatoire égale au nombre de boules noires obtenues.
Ainsi, on peut remarquer que la probabilité de l'événement $(Y = 1) \cup (Z = 1)$ est égale à 1.
Pour tout entier naturel non nul i, on note :

B_i l'événement "la i-ème boule tirée est blanche",
N_i l'événement "la i-ème boule tirée est noire".

1. (a) Montrer, pour tout entier $k \geq 2 : \mathrm{P}(X = k) = q\, p^{k-1} + p\, q^{k-1}$.

RÉPONSE:

L'évènement $(X = k)$ se réalise si on a effectué k tirages et on a eu $k - 1$ blanches puis une noire ou $k - 1$ noires puis une blanche. Donc

$$[X = k] = \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} N_i \cap B_k\right) \cup \left(\bigcap_{i=1}^{k-1} B_i \cap N_k\right)$$

La formule des probabilités composées donne alors :

$$\mathrm{P}(X = k) = \mathrm{P}(N_1)\,\mathrm{P}_{N_1}(N_2)\cdots \mathrm{P}_{N1\cap\cdots\cap N_{k-1}}(B_k) + \mathrm{P}(B_1)\,\mathrm{P}_{B_1}(B_2)\cdots \mathrm{P}_{B_1\cap\cdots\cap B_{k-1}}(N_k)$$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout entier } k \geq 2 : \mathrm{P}(X = k) = q\, p^{k-1} + p\, q^{k-1}.}$

* * *

(b) Vérifier : $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(X = k) = 1$

RÉPONSE:

Soit $N`geq2$.

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} \mathrm{P}(X=k) &= \sum_{k=2}^{N}\left[q\ p^{k-1}+p\ q^{k--1}\right] \\
&= q\sum_{h=1}^{N-1} p^h + p\sum_{h=1}^{N-1} q^h \\
&= q\sum_{h=0}^{N-1} p^h - q + p\sum_{h=0}^{N-1} q^h - p
\end{aligned}$$

On reconnait les termes généraux de séries géométriques convergentes car $|p|<1$, $|q|<1$ et $p+q=1$. Donc

$$\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(X=k) = q\frac{1}{1-p} - q + p\frac{1}{1-q} - p$$

Conclusion : $\boxed{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(X=k)=1}$

* * *

(c) Montrer que la variable aléatoire X admet une espérance et que : $E(X) = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1$.

RÉPONSE:

Pour $k \geq 2$, on a $|k\mathrm{P}(X=k)| = k\mathrm{P}(X=k)$. Soit $N \geq 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{N} k\mathrm{P}(X=k) &= q\sum_{k=2}^{N} k\ p^{k-1} + p\sum_{k=2}^{N} k\ q^{k-1} \\
&= q\sum_{k=1}^{N} k\ p^{k-1} - q + p\sum_{k=1}^{N} k\ q^{k-1} - p
\end{aligned}$$

On reconnait les termes généraux de séries géométriques dérivées d'ordre 1 convergentes car $|p|<1$, $|q|<1$ et $p+q=1$. Donc la série converge absolument, X a une espérance et

$$E(X) = \sum_{k=2}^{+\infty} k\mathrm{P}(X=k) = q\frac{1}{(1-p)^2} - q + p\frac{1}{(1-q)^2} - p = \frac{1}{q} - q + \frac{1}{p} - p$$

Conclusion : $\boxed{X \text{ admet une espérance et que : } E(X) = \frac{1}{p}+\frac{1}{q}-1.}$

* * *

2. (a) Pour tout entier $k \geq 2$, déterminer $\mathrm{P}((X=k)\cap(Y=1))$
   (On distinguera les cas $k=2$ et $k \geq 3$.)

RÉPONSE:

- *Pour $k=2$, $(X=2)\cap(Y=1)$ signifie que l'on a effectué 2 tirages et obtenu une seule blanche (donc une seule noire)*
  On a donc pu avoir $N_1 \cap B_2$ ou $B_1 \cap N_2$ (incompatibles) et $\mathrm{P}((X=2)\cap(Y=1)) = pq+qp = 2pq$

- *Si $k \geq 3$ alors $(X = k) \cap (Y = 1)$ signifie que l'on n'a obtenu qu'une seule blanche (et plusieurs noires) et donc s'est arrêté sur une boule blanche.*
  $(X = k) \cap (Y = 1) = N_1 \cap \cdots \cap N_{k-1} \cap B_k$ *et* $\mathrm{P}((X = k) \cap (Y = 1)) = q^{k-1}p$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}((X = 2) \cap (Y = 1)) = 2pq \text{ et pour } k \geq 3 : \mathrm{P}((X = k) \cap (Y = 1)) = q^{k-1}p}$

* * *

(b) En déduire : $\mathrm{P}(Y = 1) = q(1 + p)$.

RÉPONSE:

La loi de Y est une loi marginale du couple (X, Y) donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(Y = 1) &= \sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}((X = k) \cap (Y = 1)) \\
&= \mathrm{P}((X = 2) \cap (Y = 1)) + \sum_{k=3}^{+\infty} \mathrm{P}((X = k) \cap (Y = 1)) \\
&= 2pq + \sum_{k=3}^{+\infty} q^{k-1}p = 2pq + p\sum_{h=2}^{+\infty} q^h \\
&= 2pq + p\left[\sum_{h=0}^{+\infty} q^h - 1 - q\right] \\
&= 2pq + p\left[\frac{1}{1-q} - 1 - q\right] \\
&= pq + \frac{p}{p} - p = 1 - p + pq \\
&= q + pq
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(Y = 1) = q(1 + p).}$

* * *

(c) Déterminer la loi de la variable aléatoire Y.

RÉPONSE:

$Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour $n \geq 2$ quand $(Y = n)$ on a plus d'une blanche, donc on s'arrête sur une boule noire.
$(Y = n)$ signifie donc que l'on a eu n blanches puis une boule noire.
Donc $\mathrm{P}(Y = n) = p^{n-1}q$

Conclusion : $\boxed{Y(\Omega) = \mathbb{N}^* : \mathrm{P}(Y = 1) = q(1 + p). \text{et } \mathrm{P}(Y = n) = p^{n-1}q \text{ pour } n \geq 2}$

* * *

On admet que l'espérance de Y existe et que : $E(Y) = \dfrac{1}{q}\left(1 - p + p^2\right)$.

3. Donner la loi de Z et son espérance.

RÉPONSE:

En inversant les rôles de blanc et noir, on inverse les rôles de Y et de Z.
La loi de Z est donc la même que celle de Y en inversant les rôles de p et de q.

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} Z(\Omega) = \mathbb{N}^* : \mathrm{P}(Z = 1) = p(1 + q). \text{et } \mathrm{P}(Z = n) = q^{n-1}p \text{ pour } n \geq 2 \\ \text{et } E(Z) = \dfrac{1}{p}\left(1 - q + q^2\right) \end{array}}$

* * *

4. Montrer que les variables aléatoires Y Z et $X - 1$ sont égales.

RÉPONSE:

Pour tout $k \geq 1$: $(X - 1 = k)$ signifie qu'il y a eu k tirages avant le changement de couleur.
Si les tirages se finissent par noir, on a alors $Y = k$ et $Z = 1$ donc $Y\ Z = k$
Si les tirages se finissent par blanc, on a alors $Y = 1$ et $Z = k$ donc $Y\ Z = k$
Conclusion : $\boxed{Y\ Z = X - 1}$

$* * *$

5. Montrer que le couple (Y, Z) admet une covariance et exprimer $\operatorname{cov}(\mathrm{Y}, \mathrm{Z})$ à l'aide de $E(X)$, $E(Y)$ et $E(Z)$.

RÉPONSE:

Y et Z ont une espérance.
X a une espérance donc $X - 1$ et $Y\ Z$ également $E(Y\ Z) = E(X) - 1$
Donc (Y, Z) admet une covariance et $\operatorname{cov}(Y, Z) = E(Y\ Z) - E(Y)EZ$
Conclusion : $\boxed{\operatorname{cov}(Y, Z) = E(X) - E(Y)E(Z) - 1}$

$* * *$