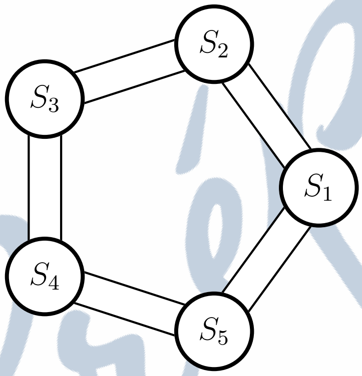
MATHÉMATIQUES I - ESSEC E 2008

Proposition de corrigé par David Meneu

Lycée Champollion - Grenoble, pour Major-Prépa

Exercice 1 : Probabilités discrètes

Deux personnes P_1 et P_2 ont rendez-vous dans un complexe formé de cinq sites S_1, S_2, S_3, S_4 et S_5, disposés en pentagone et reliés par des routes, comme l'illustre le schéma ci-contre. Ils arrivent au rendez-vous à l'heure prévue, mais suite à un malentendu, P_1 se présente au site S_1 et P_2 au site S_2.
Ils décident alors de partir à la recherche l'un de l'autre. Ils empruntent les différentes routes du complexe, avec les règles suivantes :



- à partir d'un site, chacun choisit de se rendre sur l'un des deux sites voisins, les deux possibilités étant équiprobables ;
- les déplacements des deux personnes se font simultanément ;
- tous les choix de déplacements se font indépendamment les uns des autres.

Ils continuent à se déplacer ainsi jusqu'à se retrouver éventuellement sur un même site (ils ne se rencontrent pas le long des routes). Une fois retrouvés, ils ne se déplacent plus.
Pour tout entier naturel n, on définit les trois événements A_n, B_n, C_n :

- A_n : « les deux personnes sont sur le même site après le n-ième déplacement »
- B_n : « les deux personnes sont sur des sites adjacents après le n-ième déplacement »
- C_n : « les deux personnes sont à deux routes de distance après le n-ième déplacement »

On note a_n, b_n, c_n les probabilités des événements A_n, B_n, C_n.

1. À tout instant n, étant donné la configuration des lieux, il y a exactement trois possibilités : soit les deux personnes se trouvent sur le même site, soit elles sont à un site d'écart (sur des sites adjacents), soit elles se trouvent à deux sites d'écart (ce qui est l'éloignement maximal possible). C'est-à-dire qu'à tout instant n, un et un seul des trois événements $A_n,\ B_n,\ C_n$ est réalisé : $A_n \cup B_n \cup C_n = \Omega$, et les événements sont deux à deux incompatibles.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, (A_n, B_n, C_n) est donc un système complet d'événements.
2. Étant donné les conditions initiales données par l'énoncé, à l'instant $n = 0$, les deux personnes sont sur deux sites adjacents. Donc $b_0 = 1$, et $a_0 = c_0 = 1$.
3. a) Si les deux personnes se trouvent, à un certain instant n, à deux routes de distance (événement C_n), alors elles se retrouvent à l'instant suivant ssi elles se dirigent toutes les deux vers le site qui les sépare (dans l'autre sens, deux sites les séparent). Comme les déplacements des deux personnes sont *indépendants*, et vu l'hypothèse d'équiprobabilité donnée par l'énoncé, on a donc bien : $P_{C_n}(A_{n+1}) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{4}$.
   b) On sait que si les deux personnes se retrouvent sur le même site à un instant donné, alors elles ne se quittent plus et restent donc sur le même site. Donc, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_{A_n}(A_{n+1}) = 1$.

c) L'argument précédent donne aussi, directement : $P_{A_n}(B_{n+1}) = P_{A_n}(C_{n+1}) = 0$.
Si l'événement B_n est réalisé : partant de deux suites adjacents, les deux personnes ne pourront jamais se rencontrer à l'instant d'après, donc $P_{B_n}(A_{n+1}) = 0$. Par contre, elles peuvent s'éloigner l'une de l'autre toutes les deux, et se retrouver à l'instant suivant à deux routes de distance : toujours par indépendance des deux personnes, $P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.

Comme $(A_{n+1},\ B_{n+1},\ C_{n+1})$ forment un s.c.e., on a aussi :
$P_{B_n}(B_{n+1}) = 1 - P_{B_n}(A_{n+1}) - P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{3}{4}$.
Si les deux personnes sont à deux routes d'écart, en s'éloignant toutes deux du site qui les sépare, elles se retrouvent sur des sites adjacents, donc :
$P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{4}$, et $P_{C_n}(C_{n+1}) = 1 - P_{C_n}(A_{n+1}) - P_{C_n}(B_{n+1}) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$.

4. C'est un cas typique d'utilisation de la formule des probabilités totales, avec le système complet d'événements $(A_n,\ B_n,\ C_n)$:

$$\begin{aligned}\forall n \in \mathbb{N},\ P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1})\\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1})\\ a_{n+1} &= 1.a_n + 0.b_n + \frac{1}{4}.b_n = a_n + \frac{1}{4}b_n\end{aligned}$$

d'après les calculs précédents. De même :

$$\begin{aligned}P(B_{n+1}) &= P(A_n \cap B_{n+1}) + P(B_n \cap B_{n+1}) + P(C_n \cap B_{n+1})\\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(B_{n+1})\\ b_{n+1} &= 0.a_n + \frac{3}{4}.b_n + \frac{1}{4}.c_n = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{4}c_n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(C_{n+1}) &= P(A_n \cap C_{n+1}) + P(B_n \cap C_{n+1}) + P(C_n \cap C_{n+1})\\ &= P(A_n) \times P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1})\\ c_{n+1} &= 0.a_n + \frac{1}{4}.b_n + \frac{1}{2}.c_n = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n\end{aligned}$$

5. a) D'après les relations obtenues précédemment, on peut écrire, pour tout $n \in \mathbb{N}$:
$b_{n+2} = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}c_{n+1} = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{4}(\frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}c_n) = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{8}c_n$.
Or : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{4}c_n = b_{n+1} - \frac{3}{4}b_n$, donc :
$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+2} = \frac{3}{4}b_{n+1} + \frac{1}{16}b_n + \frac{1}{2}(b_{n+1} - \frac{3}{4}b_n) = \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right)b_{n+1} + \left(\frac{1}{16} - \frac{3}{8}\right)b_n$, soit :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ b_{n+2} = \frac{5}{4}b_{n+1} - \frac{5}{16}b_n.$$

b) La suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2, d'équation caractéristique :
$x^2 = \frac{5}{4}x - \frac{5}{16} \iff x^2 - \frac{5}{4}x + \frac{5}{16} = 0$; $\Delta = \frac{25}{16} - 4 \times \frac{5}{16} = \frac{5}{16} > 0$, donc l'équation possède deux solutions réelles distinctes : $\alpha = \dfrac{\frac{5}{4} - \frac{\sqrt{5}}{4}}{2} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{8}$ et $\beta = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8}$.
Il existe donc deux réels a et b fixés tels que : $\forall n \in \mathbb{N},\ b_n = a.\alpha^n + b.\beta^n$.

On détermine a et b en écrivant la relation pour $n = 0$ et $n = 1$, on obtient le système :

$$(S)\ \left\{\begin{array}{ccccc} a.\alpha^0 & + & b.\beta^0 & = & b_0\\ a.\alpha^1 & + & b.\beta^1 & = & b_1\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 1\\ a.\alpha & + & b.\beta & = & \frac{3}{4}\end{array}\right.$$

(en effet, $b_1 = \frac{3}{4}b_0 + \frac{1}{4}c_0$ avec $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$).

$$(S) \iff \begin{cases} a + b = 1 \\ (\beta-\alpha).b = \frac{3}{4} - \alpha \quad L_2 \leftarrow L_2 - \alpha.L_1 \end{cases}$$

$\beta - \alpha = \dfrac{5+\sqrt{5}}{8} - \dfrac{5-\sqrt{5}}{8} = \dfrac{2\sqrt{5}}{8} = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$, et $\dfrac{3}{4} - \alpha = \dfrac{3}{4} - \dfrac{5-\sqrt{5}}{8} = \dfrac{6-5+\sqrt{5}}{8} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{8}$.

D'où : $\begin{cases} a &= 1 - b = 1 - \dfrac{5+\sqrt{5}}{10} = \dfrac{5-\sqrt{5}}{10} \\ b &= \dfrac{3/4-\alpha}{\beta-\alpha} = \dfrac{4}{\sqrt{5}} \times \dfrac{1+\sqrt{5}}{8} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}} = \dfrac{5+\sqrt{5}}{10}, \end{cases}$ et :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{5-\sqrt{5}}{10} \cdot \alpha^n + \frac{5+\sqrt{5}}{10} \cdot \beta^n$$

c) On a vu plus haut que : $\forall n \in \mathbb{N},\ \frac{1}{4}c_n = b_{n+1} - \frac{3}{4}b_n \iff c_n = 4b_{n+1} - 3b_n$, soit :

$$\begin{aligned}
\forall n \in \mathbb{N},\ c_n &= \frac{4}{10}(5-\sqrt{5}).\alpha^{n+1} + \frac{4}{10}.(5+\sqrt{5}).\beta^{n+1} - \frac{3}{10}(5-\sqrt{5}).\alpha^n - \frac{3}{10}(5+\sqrt{5}).\beta^n \\
&= \left[\frac{2}{5}(5-\sqrt{5}).\alpha - \frac{15-3\sqrt{5}}{10}\right].\alpha^n + \left[\frac{2}{5}.(5+\sqrt{5}).\beta - \frac{15+3\sqrt{5}}{10}\right].\beta^n \\
&= \left[\frac{(5-\sqrt{5})^2}{20} - \frac{15-3\sqrt{5}}{10}\right].\alpha^n + \left[\frac{(5+\sqrt{5})^2}{20} - \frac{15+3\sqrt{5}}{10}\right].\beta^n \\
&= \frac{25-10\sqrt{5}+5-30+6\sqrt{5}}{20}.\alpha^n + \frac{25+10\sqrt{5}+5-30-6\sqrt{5}}{20}.\beta^n
\end{aligned}$$

ce qui donne bien :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ c_n = \frac{\sqrt{5}}{5}(\beta^n - \alpha^n).$$

6. a) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, (A_n, B_n, C_n) est un système complet d'événements, on dispose en particulier de la relation : $a_n + b_n + c_n = 1 \iff a_n = 1 - b_n - c_n$, ce qui permet d'obtenir :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ a_n = 1 - \left[\frac{5-\sqrt{5}}{10} - \frac{\sqrt{5}}{5}\right] \cdot \alpha^n + \left[\frac{5+\sqrt{5}}{10} + \frac{\sqrt{5}}{5}\right] \cdot \beta^n = 1 - \left(\frac{5-3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \alpha^n - \left(\frac{5+3\sqrt{5}}{10}\right) \cdot \beta^n$$

b) L'encadrement : $2 = \sqrt{4} < \sqrt{5} < \sqrt{9} = 3$ donne rapidement : $0 < \frac{1}{4} < \alpha < \frac{3}{8} < 1$, et $\frac{7}{8} < \beta < 1$, ce qui implique : $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha^n = 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \beta^n$.
Par opérations sur les limites, on obtient :

$$\lim_{n\to+\infty} b_n = 0 = \lim_{n\to+\infty} c_n, \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} a_n = 1.$$

c) L'événement "les deux personnes ne se retrouvent jamais" a pour contraire : "le deux personnes finissent par se retrouver", qui est réalisé si et seulement si l'un des événements A_n est réalisé, c'est donc $\bigcup\limits_{n=1}^{+\infty} A_n$.
Or si pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, A_n est réalisé : les deux personnes sont ensemble à l'instant n, et elles le restent à l'instant $n+1$, donc $A_n \subset A_{n+1}$: les événements $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ forment une suite croissante d'événements, donc par propriété de limite motonone :

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n) = \lim_{n\to+\infty} a_n = 1$$

Il est donc presque sûr qu'au bout d'un nombre fini de déplacements, les deux personnes finiront par se retrouver. Au contraire, il est quasi-impossible qu'elles ne se retrouvent jamais.

B. Nombre de déplacements avant rencontre

1. Vu que les deux personnes sont à l'instant 0 sur des sites adjacents, on a établi que dans ce cas elles ne pouvaient pas se retrouver à l'instant 1, mais seulement à partir de l'intant $n = 2$, et $X(\Omega) = [\![2; +\infty[\![$.
2. Dire que les deux personnes se sont retrouvées à l'insant n, c'est dire qu'elles sont sur le même site à l'instant n, et qu'à l'instant précédent elles étaient sur des sites différents, ce qui d'après l'étude précédente n'est alors possible que si elles sont à deux routes de distance à l'instant $n-1$.
   Autrement dit : $\quad \forall n \geqslant 2, \quad [X = n] = C_{n-1} \cap A_n$.
   Le calcul de probabilité est alors immédiat :
$$\forall n \geqslant 2, \quad P(D_n) = P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}) = c_n \times \frac{1}{4} = \frac{\sqrt{5}}{20}\left(\beta^{n-1} - \alpha^{n-1}\right)$$
3. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} nP(X = n)$ est absolument convergente.
   Pour tout $N \geqslant 2$: $\sum\limits_{n=2}^{N} nP(X = n) = \frac{\sqrt{5}}{20}\left[\sum\limits_{n=2}^{N} n\beta^{n-1} - \sum\limits_{n=2}^{N} n\alpha^{n-1}\right]$. On reconnaît deux séries géométriques dérivées, toutes deux convergentes puisque α et β appartiennent à $]-1; 1[$.
   La variable aléatoire X admet donc une espérance qui vaut :
$$E(X) = \sum_{n=2}^{+\infty} nP(X = n) = \frac{\sqrt{5}}{20}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} n\beta^{n-1} - 1 - \sum_{n=1}^{+\infty} n\alpha^{n-1} + 1\right] = \frac{\sqrt{5}}{20}\left[\frac{1}{(1-\beta)^2} - \frac{1}{(1-\alpha)^2}\right]$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{20}\left[\frac{1}{\left(\frac{3-\sqrt{5}}{8}\right)^2} - \frac{1}{\left(\frac{3+\sqrt{5}}{8}\right)^2}\right] = \frac{\sqrt{5}}{20} \times 64 \times \frac{(3+\sqrt{5})^2 - (3-\sqrt{5})^2}{\left((3+\sqrt{5})(3-\sqrt{5})\right)^2}$$
$$= \frac{16\sqrt{5}}{5} \times \frac{9 + 6\sqrt{5} + 5 - 9 + 6\sqrt{5} - 5}{(9-5)^2} = \frac{16\sqrt{5}}{5} \times \frac{12\sqrt{5}}{16}$$
   Soit : $\qquad E(X) = 12$.
4. Le calcul de la variance passe ici par celui de $E\big(X(X-1)\big)$: d'après le théorème de transfert, ce nombre est bien défini si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 2} n(n-1)P(X = n)$. Pour tout $N \geqslant 2$: $\sum\limits_{n=2}^{N} n(n-1)P(X = n) = \frac{\sqrt{5}}{20}\left[\beta\sum\limits_{n=2}^{N} n(n-1)\beta^{n-2} - \alpha\sum\limits_{n=2}^{N} n(n-1)\alpha^{n-2}\right]$; on reconnaît deux séries géométriques dérivées deux fois, toujours convergentes, donc $E\big(X(X-1)\big)$ est bien défini et vaut :
$$E\big(X(X-1)\big) = \frac{\sqrt{5}}{20}\left[\beta\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\beta^{n-2} - \alpha\sum_{n=2}^{+\infty} n(n-1)\alpha^{n-2}\right] = \frac{\sqrt{5}}{20}\left[\frac{2\beta}{(1-\beta)^3} - \frac{2\alpha}{(1-\alpha)^3}\right]$$
$$= \frac{\sqrt{5}}{10}\left[\frac{5+\sqrt{5}}{8} \times \frac{8^3}{(3-\sqrt{5})^3} - \frac{5-\sqrt{5}}{8} \times \frac{8^3}{(3+\sqrt{5})^3}\right]$$
$$= \frac{32\sqrt{5}}{5}\left[\frac{5+\sqrt{5}}{27 - 27\sqrt{5} + 45 - 5\sqrt{5}} - \frac{5-\sqrt{5}}{27 + 27\sqrt{5} + 45 + 5\sqrt{5}}\right]$$
$$= \frac{32\sqrt{5}}{5}\left[\frac{5+\sqrt{5}}{72 - 32\sqrt{5}} - \frac{5-\sqrt{5}}{72 + 32\sqrt{5}}\right] = \frac{4\sqrt{5}}{5}\left[\frac{(5+\sqrt{5})(9+4\sqrt{5}) - (5-\sqrt{5})(9-4\sqrt{5})}{(9-4\sqrt{5})(9+4\sqrt{5})}\right]$$
$$= \frac{4\sqrt{5}}{5} \times \frac{\cancel{45} + 20\sqrt{5} + 9\sqrt{5} + \cancel{20} - \cancel{45} + 20\sqrt{5} + 9\sqrt{5} - \cancel{20}}{81 - 16 \times 5} = \frac{4}{\sqrt{5}} \times 58\sqrt{5} = 232$$

On en déduit que $X^2 = X(X-1) + X$ admet une espérance comme somme de deux variables aléatoires qui en admettent une, et par linéarité de l'espérance :

$$E(X^2) = E\big(X(X-1)\big) + E(X) = 232 + 16 = 244$$

On en déduit que X admet une variance donnée par la formule de Koenig-Huygens :

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 244 - 144 = 100$$

Et X a donc pour écart-type : $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = 10.$

Exercice 2 : Probabilités et Analyse

Dans certaines situations (paris sportifs, investissements financiers...), on est amené à miser de l'argent de façon répétée sur des paris à espérance favorable. On se propose de mettre en place une stratégie afin d'optimiser les gains à long terme.

On adopte ici le cadre simplifié suivant : on considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes et suivant toutes la même loi de Bernoulli de paramètre p.

Un joueur mise une partie M_n de son capital sur la réalisation de l'événement $(X_n = 1)$, pour chaque $n \geqslant 1$. La variable M_n est supposée indépendante des variables $X_k,\ k \in \mathbb{N}^*$.
En cas de victoire, il double sa mise (son capital est donc augmenté de M_n), en cas de défaite il perd sa mise (son capital diminue de M_n).

Initialement, le joueur dispose du capital $C_0 > 0$, puis on note C_n la variable aléatoire égale au capital détenu à l'issue du n^{e} pari.
On a ainsi l'encadrement : $0 \leqslant M_{n+1} \leqslant C_n$ pour tout entier n.

Le jeu est supposé favorable, on considérera dans tout le problème : $\frac{1}{2} < p < 1$.

I. Quitte ou double

1. On cherche ici deux constantes réelles a et b vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N},\ C_{n+1} = C_n + (aX_{n+1} + b)M_{n+1}$. Cette égalité de variables aléatoires, vues comme applications de Ω dans $\mathbb{R}$, est vérifiée si et seulement si pour toute issue $\omega \in \Omega$ de l'expérience : $C_{n+1}(\omega) = C_n(\omega) + (aX_{n+1}(\omega) + b)M_{n+1}(\omega)$.

   Or pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, et toute issue ω de Ω :

   - Soit $X_{n+1}(\omega) = 1$ (le pari est gagné), et dans ce cas le capital C_n est augmenté de la mise $M_{n+1}(\omega)$: $C_{n+1}(\omega) = C_n(\omega) + M_{n+1}(\omega)$, et $aX_{n+1}(\omega) + b = a + b$ doit être égal à 1.

   - Soit $X_{n+1}(\omega) = 0$ (le pari est perdu), et dans ce cas la mise $M_{n+1}(\omega)$ est perdue : $C_{n+1}(\omega) = C_n(\omega) - M_{n+1}(\omega)$, et $aX_{n+1}(\omega) + b = b$ est égal à -1.

   Ainsi : $b = -1$ et $a + b = 1 \iff a = 2$, donc : $\forall \omega \in \Omega,\ C_{n+1}(\omega) = C_n(\omega) + (2X_{n+1}(\omega) - 1)M_{n+1}(\omega)$, soit :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\quad C_{n+1} = C_n + (aX_{n+1} + b)M_{n+1}$$

2. Les variables $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont toutes finies, donc admettent une espérance, et par indépendance des X_n et M_n :

   $$\forall n \in \mathbb{N},\quad E(C_{n+1}) = E(C_n) + \big(2E(X_{n+1}) - 1\big) \times E(M_{n+1}) \iff E(C_{n+1}) = E(C_n) + (2p-1)E(M_{n+1})$$

   Ainsi, de proche en proche, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

   $$\begin{aligned} E(C_n) &= E(C_{n-1}) + (2p-1)E(M_n) = E(C_{n-2}) + (2p-1)E(M_{n-1}) + (2p-1)E(M_n) \\ &= \dots = E(C_0) + (2p-1)\sum_{k=1}^{n} E(M_k) \end{aligned}$$

formule générale qu'on démontre facilement par récurrence.

Par définition, la mise est toujours inférieure au capital : $\forall k \in \mathbb{N}^*,\ M_k \leqslant C_k$, donc $E(M_k) \leqslant E(C_k)$ selon la propriété de *croissance de l'espérance.*

De plus, comme on a supposé $\frac{1}{2} < p < 1$: alors $1 < 2p < 2 \iff 0 < 2p-1 < 1$, et :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ E(C_n) = C_0 + (2p-1)\sum_{k=1}^{n} E(M_k) \leqslant E(C_0) + (2p-1)\sum_{k=1}^{n} E(C_k).$$

On maximise donc effectivement le capital moyen, en misant tout son capital à chaque pari.

3. Dans la stratégie du quitte ou double, le moindre pari perdu provoque la ruine du joueur. La ruine du joueur correspond à l'événement : $\bigcup_{k=1}^{+\infty}[X_k = 0]$, qui est en fait l'événement contraire de $\bigcap_{k=1}^{+\infty}[X_k = 1]$ (gagner indéfiniment) ; la propriété de limite monotone pour les probabilités, et l'indépendance des paris donne la probabilité de ruine :

$$1-P\left(\bigcap_{k=1}^{+\infty}[X_k = 0]\right) = \lim_{n\to+\infty} 1-P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k = 0]\right) = \lim_{n\to+\infty} 1-\prod_{k=1}^{n} P(X_k = 0) = \lim_{n\to+\infty} 1-(1-p)^n = 1$$

puisque $0 < 1-p < 1$. La ruine est bien presque certaine !

On est aussi amené à considérer la variable aléatoire Y égale au rang du premier pari perdu du joueur : c'est donc le temps d'attente d'un premier "succès" (si on peut appeler ainsi perdre un pari...), dans la répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et sans mémoire, de probabilité de succès $1-p$. Le nombre moyen de parties conduisant à la ruine du joueur est $E(Y) = \dfrac{1}{1-p}$.

II. Stratégies à mises proportionnelles

La stratégie précédente étant risquée, le joueur décide d'engager dans chaque pari, une fraction du capital dont il dispose : on a ainsi $M_n = \alpha.C_n$, avec $\alpha \in]0,1[$, indépendant de n.

1. On vérifie à nouveau que l'égalité de variables aléatoires demandée, correspond à une égalité de leurs valeurs, pour toute issue ω de Ω :
   - Si $X_{n+1}(\omega) = 1$, alors :
   $$(1+\alpha)^{X_{n+1}(\omega)}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}(\omega)}C_n(\omega) = (1+\alpha)^1(1-\alpha)^0 C_n(\omega) = (1+\alpha)C_n(\omega) = C_n(\omega)+Mn+1(\omega)$$
   qui est bien égal à $C_{n+1}(\omega)$ dans ce cas.
   - Sinon $X_{n+1}(\omega) = 0$, et alors :
   $$(1+\alpha)^{X_{n+1}(\omega)}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}(\omega)}C_n(\omega) = (1+\alpha)^0(1-\alpha)^1 C_n(\omega) = (1-\alpha)C_n(\omega) = C_n(\omega) - M_n(\omega)$$
   qui est là encore, bien égal à $C_{n+1}(\omega)$.

   L'égalité est donc vraie pour toute issue, et :
   $$\forall n \in \mathbb{N},\quad C_{n+1} = (1+\alpha)^{X_{n+1}}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}}C_n$$

2. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$: comme chaque v.a.r. X_k contribue d'une unité à la somme dès que le pari correspondant est gagné, S_n représente le nombre total de paris gagnés parmi les n premiers paris effectués. Comme les variables $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes et suivent toute la loi de Bernoulli de paramètre p : on sait que leur somme S_n suit donc la loi binomiale de paramètres (n,p) :
$$S_n(\Omega) = [\![0;n]\!],\quad \forall k \in S_n(\Omega),\ P(S_n = k) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} \quad \text{et} \quad E(S_n) = np$$

3. Rédigeons ici la récurrence qui montre que la propriété $\mathcal{P}(n)$: "$C_n = (1+\alpha)^{S_n}(1-\alpha)^{n-S_n}C_0$", est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$\boxed{\text{I.}}$ Pour $n = 1$: $S_1 = X_1$, et $(1+\alpha)^{S_1}(1-\alpha)^{1-S_1}C_0$ est bien égal à $(1+\alpha)^{X_1}(1-\alpha)^{1-X_1}C_0 = C_1$ d'après la question 1.

$\boxed{\text{H.}}$ Supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$, et montrons sous cette hypothèse, que $\mathcal{P}(n+1)$ est encore vraie :

——————————————————————-

On part de la relation obtenue en 1. :

$$\begin{aligned} C_{n+1} &= (1+\alpha)^{X_{n+1}}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}}C_n \\ &= (1+\alpha)^{X_{n+1}}(1-\alpha)^{1-X_{n+1}} \times (1+\alpha)^S_n(1-\alpha)^{n-S_n}C_0 \qquad (H.R.) \\ &= (1+\alpha)^{S_n+X_{n+1}}(1-\alpha)^{n-S_n+1-X_{n+1}}C_0 \\ C_{n+1} &= (1+\alpha)^{S_{n+1}}(1-\alpha)^{n+1-S_{n+1}}C_0 \qquad \text{puisque } S_{n+1} = S_n + X_{n+1} \end{aligned}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie si $\mathcal{P}(n)$ l'est.

$\boxed{\text{C.}}$ La propriété est initialisée et héréditaire : elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, d'après le principe de récurrence.

4. Les variables C_n sont toutes strictement positives, et $\alpha \in]0;1[$ donc $1+\alpha > 1-\alpha > 0$ et on peut écrire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \ln(C_n) = S_n \ln(1+\alpha) + (n-S_n)\ln(1-\alpha) + \ln(C_0) \iff \frac{1}{n}\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right) = \frac{S_n}{n}\ln(1+\alpha) + \frac{n-S_n}{n}\ln(1-\alpha)$$

Et la linéarité de l'intégrale s'applique (C_0, C_n et S_n sont des v.a.r. finies) pour donner, vu que $\mathbb{E}(S_n) = np$:

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\ln\left(\frac{C_n}{C_0}\right)\right] = \frac{1}{n}\mathbb{E}(S_n)\ln(1+\alpha) + \frac{n-\mathbb{E}(S_n)}{n}\ln(1-\alpha) = p\ln(1+\alpha) + (1-p)\ln(1-\alpha).$$

Par la suite, on cherche à maximiser cette quantité, ce qui équivaut à maximiser l'espérance du *taux moyen de croissance* du capital.

III. Optimisation : le critère de Kelly

On pose, pour tout $x \in [0;1[$, $\quad f(x) = p\ln(1+x) + (1-p)\ln(1-x)$.

1. Étude de f.

a) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;1[$, avec :

$$\forall x \in]0;1[, \quad f'(x) = \frac{p}{1+x} - \frac{1-p}{1-x} \quad \text{et} \quad f''(x) = -\frac{p}{(1+x)^2} - \frac{1-p}{(1-x)^2}$$

Puisque $p \in]0;1[$, il est clair que : $\quad \forall x \in]0;1[,\ f''(x) < 0$, donc f est concave sur $]0;1[$.

Par ailleurs : $\forall x \in]0;1[,\ f'(x) = \dfrac{p(1-x)-(1-p)(1+x)}{(1+x)(1-x)} = \dfrac{p-px-1-x+p+px}{1-x^2} = \dfrac{(2p-1)-x}{1-x^2}$.

Pour tout x de $]0;1[$: $1-x^2 > 0$, donc le signe de $f'(x)$ est celui de $(2p-1)-x$, et :

$$(2p-1)-x > 0 \iff x < 2p-1.$$

Comme $\frac{1}{2} < p < 1$, alors $0 < 2p-1 < 1$, on en déduit le tableau de variation de f :

x	0		$\alpha_K = 2p-1$		1
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$
f	0	$\nearrow$	$f(\alpha_K)$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$

La fonction f admet bien un maximum sur $]0;1[$, atteint en $\alpha_K = 2p-1$.

b) On a : $\lim\limits_{x\to 1} p\ln(1+x) = p\ln(2)$ par continuité de ln en 2 ; par ailleurs, $\lim\limits_{x\to 1^-} 1-x = 0^+$, donc $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1-x) = \lim\limits_{u\to 0^+} \ln(u) = -\infty$, donc puisque $1-p>0$:

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$$

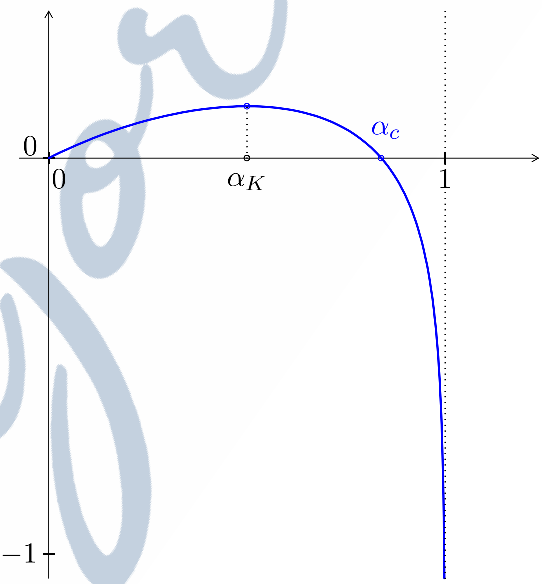
Au vu de la dernière question de la Partie II : ce résultat signifie que lorsque la proportion du capital risqué tend vers sa totalité, le taux moyen de croissance du capital tend vers $-\infty$, ce qui est une façon de dire que le capital lui-même, tend vers 0, ce qui est bien cohérent avec ce qui a été déterminé à la fin de la partie I !

c) • Sur $[0;\alpha_K]$, la fonction f est continue, strictement croissante et $f(0) = p\ln(1)+(1-p)\ln(1) = 0$: f ne s'annule qu'en 0 sur cet intervalle.

• Sur $[\alpha_K;1[$: la fonction f est continue, strictement décroissante, à valeurs dans $]-\infty; f(\alpha_K)]$ qui contient bien 0 puisque $f(\alpha_K) > f(0) = 0$. D'après le théorème de la bijection, il existe donc une unique solution α_c à l'équation $f(x) = 0$ sur cet intervalle.

Finalement, la fonction f s'annule exactement deux fois sur $[0;1[$: en 0 et en α_c vérifiant $\alpha_K < \alpha_c$.

d) La courbe de f a pour allure :



2. **Conclusion :** le choix $\alpha = \alpha_K$ est celui qui optimise la croissance de gain à long terme.

Dans le cas limite $p = \frac{1}{2}$: $\alpha_K = 2p-1 = 0$, en cas d'équiprobabilité des gains et des pertes, ne rien risquer est la meilleure stratégie !

Dans le cas limite $p = 1$: $\alpha_K = 2p-1 = 1$, si on est sûr de gagner, il faut évidemment tout miser à chaque pari !

IV. Étude de la valeur critique α_c.

Les choix de α au-delà de la valeur critique α_c conduisent à une perte de capital. On cherche dans cette partie un équivalent de α_c lorsque p est proche de $\frac{1}{2}$.
On considérera dans ce qui suit que α_c est une fonction de p (on écrira ainsi $\alpha_c(p)$).

1. On définit la fonction φ sur $]0,1[$ par : $\quad \varphi(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}$.

   a) La fonction φ est tout d'abord continue sur $]0;1[$ comme quotient de fonctions continues sur cet intervalle, où le dénominateur ne s'annule pas.

   Lorsque x tend vers 0^+ : $\quad \ln(1+x) \underset{0^+}{\sim} x \quad$ et $\quad \ln(1-x) \underset{0^+}{\sim} -x \quad$ d'après les équivalents classiques.

   Par compatibilité de l'équivalence, on en déduit : $\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{x}{-x} = -1$, donc : $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = -1$,

   et φ se prolonge par continuité en 0 en posant $\varphi(0) = -1$.

   Lorsque x tend vers 1^- : $\quad \lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1+x) = \ln(2)$ et $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$, donc par quotient de limites :

   $\lim\limits_{x\to 1^-} \varphi(x) = 0$, et φ se prolonge par continuité en 1 en posant $\varphi(1) = 0$.

   Finalement, φ est prolongeable par continuité sur l'intervalle $[0,1]$. On notera encore φ ce prolongement.

   b) La fonction φ est dérivable sur $]0,1[$ comme quotient de fonctions dérivables sur cet intervalle, et :

   $$\forall x \in]0,1[, \quad \varphi'(x) = \frac{\frac{1}{1+x}\ln(1-x) - \ln(1+x)\frac{-1}{1-x}}{\big[\ln(1-x)\big]^2} = \frac{(1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x)}{(1+x)(1-x)\big[\ln(1-x)\big]^2}$$

   Qui est bien de la forme : $\quad \forall x \in]0,1[, \quad \varphi'(x) = \dfrac{h(x)}{(1-x^2)\big[\ln(1-x)\big]^2}$

   avec $h : \ x \mapsto (1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x)$.

   c) La fonction h est dérivable sur $]0,1[$, et :

   $$\forall x \in]0,1[, \ h'(x) = -\ln(1-x) + (1-x)\cdot\frac{-1}{1-x} + \ln(1+x) + (1+x)\cdot\frac{1}{1+x} = \ln(1+x) - \ln(1-x)$$

   Pour tout $x \in]0,1[$:
   $h'(x) > 0 \iff \ln(1+x) > \ln(1-x) \iff 1+x > 1-x \iff 2x > 0 \iff x > 0$ par stricte croissance de ln sur $\mathbb{R}_+^*$.
   La fonction h est donc strictement croissante sur $]0,1[$.

   d) Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} (1-x)\ln(1-x) + (1+x)\ln(1+x) = \ln(1) + \ln(1) = 0$, on en déduit que :
   $\forall x \in]0,1[, \ h(x) > 0$.

   Et puisque pour tout $x \in]0,1[, \ 1-x^2 > 0$ et $\big[\ln(1-x)\big]^2 > 0$, alors : $\quad \forall x \in]0,1[, \ \varphi'(x) > 0$.

   La fonction φ est ainsi strictement croissante sur $]0,1[$.

   Par prolongement par continuité, la fonction φ est continue, strictement croissante sur $[0,1]$: elle réalise donc une bijection de $[0,1]$ dans $[\varphi(0), \varphi(1)] = [-1, 0]$.

2. Le développement limité de ln à l'ordre 2 en 1 peut s'écrire : $\ln(1+u) = u - \frac{1}{2}u^2 + o(u^2)$ lorsque u est au voisinage de 0.

Le taux d'accroissement de φ en 0 est : $\dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = \dfrac{\dfrac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)}+1}{x} = \dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)}$, où :

$\ln(1+x)+\ln(1-x) = x - \dfrac{x^2}{2} + (-x) - \frac{1}{2}(-x)^2 + o(x^2) = -x^2 + o(x^2)$,

et $x\ln(1-x) = x\big(-x+\frac{1}{2}x^2+o(x^2)\big) = -x^2+o(x^2)$.

Ainsi : $\dfrac{\ln(1+x)+\ln(1-x)}{x\ln(1-x)} \underset{0^+}{\sim} \dfrac{-x^2}{-x^2} = 1$, ce qui prouve que $\displaystyle\lim_{x\to 0^+} \dfrac{\varphi(x)-\varphi(0)}{x-0} = 1$,

donc que φ est dérivable en 0, avec $\varphi'(0) = 1$.

3. a) On rappelle ici que α_c est l'unique solution non nulle de l'équation :

$$f(x) = 0 \iff p\ln(1+x) + (1-p)\ln(1-x) = 0 \iff p\ln(1+x) = -(1-p)\ln(1-x)$$

$$\iff \frac{\ln(1+x)}{\ln(1-x)} = \frac{p-1}{p} \iff \varphi(x) = 1 - \frac{1}{p}$$

Comme $\frac{1}{2} < p < 1$: alors $1\dfrac{1}{p} < 2$, donc $-1 < 1 - \dfrac{1}{p} < 0$ et $1 - \dfrac{1}{p}$ appartient bien à l'intervalle image de φ ; on a bien :

$$\forall p \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[, \quad \alpha_c(p) = \varphi^{-1}\Big(1 - \frac{1}{p}\Big).$$

b) Lorsque p tend vers $\frac{1}{2}$ par valeurs supérieures : $1 - \dfrac{1}{p}$ tend vers -1^+, donc par bijectivité de φ de $[0;1]$ dans $[-1,0]$: $\displaystyle\lim_{p\to\frac{1}{2}^+} \varphi^{-1}\Big(1-\frac{1}{p}\Big) = \lim_{u\to -1^+} \varphi^{-1}(u) = 0$.

La limite : $\displaystyle\lim_{p\to\frac{1}{2}^+} \alpha_c(p) = 0$ signifie que la fonction α_c est prolongeable par continuité en $\frac{1}{2}$, avec $\alpha_c(\frac{1}{2}) = 0$.

Après prolongement, on a vu que la fonction φ est dérivable en 0 avec $\varphi'(0) = 1 \neq 0$:
le théorème de dérivabilité de la bijection réciproque assure alors que φ^{-1} est dérivable en $\varphi^{-1}(0) = -1$, avec $\big(\varphi^{-1}\big)'(-1) = \dfrac{1}{\varphi'(0)} = 1$.

Par composition avec la fonction $i : p \mapsto 1 - \dfrac{1}{p}$, bien dérivable en $\frac{1}{2}$, avec $i(\frac{1}{2}) = -1$: la fonction $\alpha_c = \varphi \circ i$ est dérivable en $\frac{1}{2}$, et :

$$\alpha_c'(\frac{1}{2}) = i'(\frac{1}{2}) \times \big(\varphi^{-1}\big)'(i(\frac{1}{2})) = \frac{1}{(\frac{1}{2})^2} \times \big(\varphi^{-1}\big)'(-1) = 4 \times 1 = 4$$

puisque $i'(p) = \dfrac{1}{p^2}$ pour tout $p \in \left]\frac{1}{2}, 1\right[$.

c) Pour p au voisinage de $\frac{1}{2}$ (avec $p > \frac{1}{2}$) :

$\dfrac{\alpha_c(p)}{2\alpha_K(p)} = \dfrac{\alpha_c(p)}{2(2p-1)} = \dfrac{1}{4} \cdot \dfrac{\alpha_c(p) - \alpha_c(\frac{1}{2})}{p - \frac{1}{2}}$ puisque $\alpha_c(\frac{1}{2}) = 0$. On a reconnu le taux d'accroissement de α_c en $p = \frac{1}{2}$, et ainsi :

$$\lim_{p\to\frac{1}{2}^+} \frac{\alpha_c(p)}{2\alpha_K(p)} = \lim_{p\to\frac{1}{2}^+} \frac{1}{4} \cdot \frac{\alpha_c(p)-\alpha_c(\frac{1}{2})}{p-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4} \cdot \alpha_c'(\frac{1}{2}) = \frac{4}{4} = 1$$

Ce qui prouve bien l'équivalence : $\quad \alpha_c \underset{\frac{1}{2}^+}{\sim} 2\alpha_K$.

Conclusion : pour des valeurs de p proches de $\frac{1}{2}$ (c'est-à-dire des paris "légèrement" favorables), il faut prendre $\alpha < 2\alpha_K$. Par sécurité, les parieurs choisissent souvent $\alpha = \dfrac{\alpha_K}{2}$, la moitié de la valeur de Kelly.

V. Simulation informatique

Le script qui suit, écrit en langage `Scilab`, permet d'illustrer ce qui précède :

- le capital initial est fixé à 100 ;
- en entrée, le programme demande la valeur de p, la valeur de α à utiliser et le capital que l'on souhaite atteindre ;
- en sortie, le programme renvoie le nombre de parties jouées pour atteindre l'objectif demandé.

1. Le script suivant simule les paris successifs à faire jusqu'à ce qu'on atteigne le capital fixé pour objectif ; la variable `n` est incrémentée d'une unité à chaque pari, et représente en définitive le nombre total de paris effectués lorsqu'on a atteint l'objectif.

```
p = input('valeur de p : ')
cap_obj = input('capital à atteindre : ')
alpha = input('valeur de alpha : ')
cap = 100;
n = 0;
while cap < cap_obj
    u=rand()
    if u < p then
        cap = (1+alpha)*cap
    else
        cap = (1-alpha)*cap
    end
    n = n+1
end
disp("nombre de parties jouées : " + string(n))
disp("capital atteint : " + string(cap))
```

2. Afin de vérifier que la stratégie de Kelly est optimale, on modifie le script précédent de la façon suivante :
   - les entrées restent les mêmes ;
   - le nouveau programme calcule la valeur de Kelly α_K ;
   - en sortie, le programme renvoie, en plus du nombre de parties jouées pour atteindre l'objectif demandé, le capital que l'on aurait obtenu si on avait choisi la valeur α_K à la place de α pendant ces mêmes parties.

   Le nouveau script est :

```
p = input('valeur de p : ')
cap_obj = input('capital à atteindre : ')
alpha = input('valeur de alpha : ')
alpha_K = 2*p-1
cap = 100;
cap_K = 100;
n = 0;
while cap < cap_obj
    u=rand()
    if u < p then
        cap = (1+alpha)*cap
        cap_K = (1+alpha_K)*cap_K
    else
        cap = (1-alpha)*cap
        cap_K = (1-alpha_K)*cap_K
    end
    n = n+1
```

```
end
disp("nombre de parties jouées : " + string(n))
disp("capital atteint : " + string(cap))
disp("avec la valeur de Kelly on aurait atteint le capital : "+string(cap_K))
```

★★★ FIN DU SUJET ★★★