$\boxed{\text{Devoir Libre n°4}}$

Réponse le 18/11/24

Les questions précédées de (*) sont réservées aux cubes.

Exercice n°1

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.
Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = -3XP(X) + X^2P'(X)\text{, où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P$$

1. (a) Rappeler la dimension de E.
   (b) Montrer que f est un endomorphisme de E.
   (c) Déterminer la matrice M de f dans 1a base canonique de E.
   (d) (*) La matrice M est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n.
   (e) Préciser le noyau $Kerf$ de f ainsi qu'une base de $Kerf$.
   (f) Déterminer 1'image Imf de f.
2. On note id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0 = id_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k = v \circ v^{k-1}$.
   Soit u et g deux endomorphîsmes de E tels que : $u^4 = 0_E$, $u^3 \neq 0_E$ et $g = id_E + u + u^2 + u^3$.
   (a) Soit P un polynôme de E tel que $P \notin Ker\left(u^3\right)$. Montrer que la. famille $\left(P, u(P), u^2(P), u^3(P)\right)$ est une base de E.
   (b) Montrer que g est un automorphisme de E. Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u.
   (c) Établir l'égalité $Ker\ u = Ker(g - id_E)$
   (d) (*) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.

Exercice n°2

Soit m un réel donné strictement positif et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
Pour tout endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ on pose $g^0 = \mathrm{Id}$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $g^k = g \circ g^{k-1}$.

1. Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ et l'image $\mathrm{im}(f)$ de l'endomorphisme f. La matrice M est-elle inversible ?
2. (a) Montrer que la matrice M^2 est une combinaison linéaire de I et de M.
   (b) Déterminer un polynôme annulateur non nul de la matrice M .
   (c) (*) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M . Montrer que matrice M est-elle diagonalisable et déterminer les matrices R et D telles que $M = RDR^{-1}$.
3. À l'aide des résultats de la question 2.(c), indiquer une méthode, sans faire les calculs, qui permettrait d'obtenir pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de M^n en fonction de n .
4. On pose : $p = \dfrac{1}{3}(f + \mathrm{Id})$ et $q = -\dfrac{1}{3}(f - 2\mathrm{Id})$.
   (a) Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$, puis pour tout n de $\mathbb{N}$, p^n et q^n.
   (b) En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de f^n en fonction de p et q .
   (c) Déterminer les deux suites réelles telles que pour tout n de $\mathbb{N}$, on ait : $M^n = a_nI + b_nM$.
   (d) La formule précédente reste-t-elle valable si n appartient à $\mathbb{Z}$?