Correction des exercices

I. Séries : Rappels de première année

Exercice 1

On considère la série $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$, dont on note S_n la somme partielle d'indice n.

1. Montrer que la suite (S_n) est croissante.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $\frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}$.
3. En déduire que la série est convergente. On note S sa somme.
4. Déduire également de la Question (2), que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \geq n$, on a
$$\sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{p}$$
En déduire une majoration du reste.
5. Écrire un programme en Python permettant d'obtenir une valeur approchée à 10^{-3} de S.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
$$S_{n+1} - S_n = \frac{1}{(n+1)^2} \geq 0$$
Donc la suite (S_n) est croissante.
2. Soit $n \geq 2$.
$$\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} = \frac{n-n+1}{n(n-1)} = \frac{1}{n^2-n} \geq \frac{1}{n^2}$$
3. Soit $N \geq 2$
$$\begin{aligned}\sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k^2} &\leq \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k} \\ &\leq \sum_{k=1}^{N-1} \frac{1}{k} - \sum_{k=2}^{N} \frac{1}{k} \\ &\leq 1 - \frac{1}{N} \qquad \text{par télescopage}\end{aligned}$$
Ainsi
$$S_n \leq 2 - \frac{1}{N} \leq 2$$
Comme la suite (S_n) est croissante et majorée, alors d'après le théorème de la limite monotone, elle converge.
4. En raisonnant de manière à la question précédente, par télescopage, le résultat vient directement.
5. Le reste d'ordre n est $R_n = \sum_{n+1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$. D'après l'inégalité précédente, en faisant tendre p vers $+\infty$, on trouve
$$R_n \leq \frac{1}{n}$$

6.
```
S=0
n=1
while 1/n > 10**(-3):
        S=S+1/n**2
        n=n+1
return(S)
```

Exercice 2

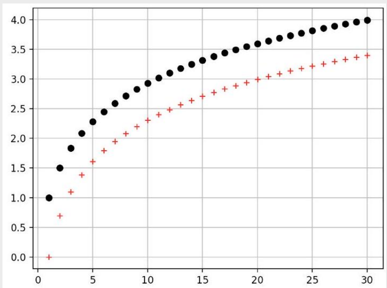
Soit H_n la somme partielle d'indice n de la série harmonique $\sum \frac{1}{k}$.

1. Que vérifie le terme général de cette série ?
2. On dispose du code suivant dont l' exécution renvoie l'affichage ci-contre. Que peut-on conjecturer ?

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def serie_h(n):
        return np.cumsum([1/k for k in range(1,n+1)])

n=50
N=[k for k in range(1,n+1)]
Y=series_h(n)
Z=[np.log(k) for k in N]
plt.grid()
plt.plot(N,Y,'ko')
plt.plot(N,Z,'k+',color='red')
plt.show()
```



3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$$

4. En déduire la divergence de la série harmonique.

1. Le terme général tend vers 0. Il est positif, donc la suite des sommes partielles est croissante.
2. Le code suivant renvoie la représentation graphique des 50 premiers termes de la suite des sommes partielles, en comparaison avec la fonction ln. On peut conjecturer que la série diverge, que la suite des sommes partielles tend vers $+\infty$ à une vitesse logarithmique.
3. Un simple télescopage donne, pour tout $n \geq 1$

$$H_{2n} - H_n = \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{k} = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k}$$

Comme pour tout $k \llbracket n+1, 2n \rrbracket$, $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2n}$

$$\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n}$$

Or $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{n}{2n} = \frac{1}{2}$, donc

$$H_{2n} - H_n = \geq \frac{1}{2}$$

4. Comme le reste est minoré par $1/2$, il ne peut pas tendre vers 0. Donc la série harmonique diverge.

Exercice 3

Soient f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f : x \mapsto x - x^2$ et (u_n), de premier terme $u_0 \in]\,0;1[$, vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f\left(u_n\right) = u_n - u_n^2.$$

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]\,0;1[$.
3. Étudier la monotonie puis la convergence de (u_n). Déterminer sa limite.
4. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge et préciser sa somme.

1. La fonction f est dérivable sur $[0,1]$, et pour tout $x \in [0,1]$ $f'(x) = 1 - 2x$. Cette dérivée est positive sur $[0,1/2]$ et négative sur $[1/2,1]$, donc f est décroissante sur $[1/2,1]$ et croissante sur $[0,1/2]$. Elle atteint son maximum en $1/2$ qui vaut $f(1/2) = 1/4$.
2. Simple raisonnement par récurrence, en se servant dans l'hérédité des valeurs prises par la fonction f.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$,
$$u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$$
Donc la suite (u_n) est décroissante. Comme elle est minorée, alors d'après le TLM elle converge. La fonction f étant continue sur $[0,1]$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [0,1]$, alors le théorème du point fixe nous assure que la limite de suite est solution de l'équation $f(x) = x$. Or
$$f(x) = x \Leftrightarrow x = x - x^2 \Leftrightarrow x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$$
Donc la suite (u_n) converge vers 0.
4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$\sum_{k=0}^{n} u_k^2 = \sum_{k=0}^{n} u_k - u_{k+1} = u_0 - u_{n+1} \qquad \text{par télescopage}$$
Comme (u_n) converge vers 0, $\left(\displaystyle\sum_{k\geq 0} u_k^2\right)$ converge vers $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_k^2 = u_0$.

Exercice 4

Soit $p \in]0,1\,[$. Montrer que la série $\sum k^2\left(p^k(1-p) + (1-p)^k p\right)$ converge et calculer sa somme.

Soit $N \in N$

$$\sum_{k=0}^{N} k^2\left(p^k(1-p) + (1-p)^k p\right) = (1-p)\sum_{k=0}^{N} k^2 p^k + p\sum_{k=0}^{N} k^2(1-p)^k$$

$$= (1-p)\sum_{k=0}^{N} k(k-1)p^k + (1-p)\sum_{k=0}^{N} kp^k + p\sum_{k=0}^{N} k(k-1)(1-p)^k + p\sum_{k=0}^{N} k(1-p)^k$$

$$= p^2(1-p)\sum_{k=0}^{N} k(k-1)p^{k-2} + p(1-p)\sum_{k=0}^{N} kp^{k-1} + (1-p)^2 p\sum_{k=0}^{N} k(k-1)(1-p)^{k-2} + p(1-p)\sum_{k=0}^{N} k(1-p)^{k-1}$$

On reconnait les termes généraux de séries géométriques dérivées d'ordre 1 et 2. Comme $p \in]0,1[$, ces séries convergent et :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} k^2 \left(p^k(1-p) + (1-p)^k p\right) = p^2(1-p) \times \frac{2}{(1-p)^3} + p(1-p) \times \frac{1}{(1-p)^2} + (1-p)^2 p \times \frac{2}{(1-(1-p))^3} + p(1-p) \times \frac{1}{(1-(1-}$$
$$= \frac{2p^2}{(1-p)^2} + \frac{p}{1-p} + \frac{2(1-p)^2}{p^2} + \frac{1-p}{p} = \frac{2p^2+p-p^2}{(1-p)^2} + \frac{2-4p+2p^2+p-p^2}{p^2} = \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} + \frac{p^2-3p+2}{p^2}$$
$$= \frac{p(1+p)}{(1-p)^2} + \frac{(1-p)(2-p)}{p^2} = \frac{p^3(1+p)+(1-p)^3(2-p)}{p^2(1-p)^2}$$

Exercice 5

Série Harmonique alternée On considère la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n/n$ (appelée *série Harmonique alternée*), dont on note (S_n) la suite des sommes partielles.

1. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire la nature de la série harmonique alternée. Est-elle absolument convergente ?

1. soit $n \in \mathbb{N}^*$.

$$S_{2n+2} - S_{2n} = \sum_{k=1}^{2n+2}(-1)^k/k - = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k/k = \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} + \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1} = \frac{1}{2n+2} - \frac{1}{2n+1} \leq 0$$

   Donc la suite (S_{2n}) est décroissante.

$$S_{2n+3} - S_{2n+1} = \sum_{k=1}^{2n+3}(-1)^k/k - = \sum_{k=1}^{2n+1}(-1)^k/k = \frac{(-1)^{2n+3}}{2n+3} + \frac{(-1)^{2n+2}}{2n+2} = \frac{-1}{2n+3} + \frac{1}{2n+2} \geq 0$$

   Donc la suite (S_{2n+1}) est croissante.

$$S_{2n+1} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+1}}{2n+1}$$

   Donc la suite $(S_{2n+1} - S_{2n})$ tend vers 0. Les suites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. Comme elles sont adjacentes, elles convergent vers une même limite ℓ. Et comme la suite des termes pairs, et la suite des termes impairs convergent vers la même limite, la série (S_n) converge également vers cette limite ℓ. Elle n'est pas absolument convergente,car en passant à la valeur absolue dans la somme, on retrouve le terme général d'une série harmonique.