Chapitre n°6

Suites et séries

I. Séries : Rappels de première année

I. 1 Définitions et premières propriétés

Définition 1.1

Soit $(u_n)_{n\geq n_0}$ une suite. La série de terme général u_n est la suite (S_n) définie par

$$\forall n \geq n_0, \quad S_n = \sum_{k=n_0}^{n} u_k.$$

- Le terme S_n est appelé **la somme partielle d'indice** n**.**
- **La série est notée** $\sum_{n\geq n_0} u_n$**. de la série.**

Faire l'étude d'une série revient à étudier la suite des sommes partielles.

Avec Python

- Si l'on dispose d'un programme qui renvoie la liste des termes consécutifs (jusqu'au rang n) de la suite (u_n), on peut obtenir la liste des termes consécutifs de la suite des sommes partielles grâce à la commande `np.cumsum( )`.
- Sinon on utilise une boucle `for`

Définition 1.2

La série $\sum_{n\geq n_0} u_n$ est dite

- convergente si et seulement si la suite $(S_n)_{n\geq n_0}$ des sommes partielles converge. Dans ce cas, sa limite est appelée la somme de la série et on note

$$\lim_{n\to+\infty} S_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k.$$

- divergente si et seulement si $(S_n)_{n\geq n_0}$ a une limite infinie ou pas de limite.

Étudier la nature d'une série, c'est déterminer si elle converge ou pas.

Dans le premier cas, on cherche alors à expliciter sa somme si c'est possible, mais ce n'est souvent pas le cas.

Attention:

- $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ est une limite (qui pourrait donc ne pas exister).
- On n'écrira donc **JAMAIS** $\sum\limits_{n=n_0}^{+\infty} u_n$ avant d'avoir au préalable justifié la convergence de la série !

Remarque :

Soit n_0 un entier fixé. La relation de Chasles donne la décomposition suivant

$$\sum_{k=0}^{n} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{n} u_k$$

On comprend dès lors que la nature de la série ne dépend pas de la somme des n_0 premiers termes, celle-ci étant constante.

En revanche, si la série converge, la relation

$$\sum_{k=0}^{+\infty} u_k = \sum_{k=0}^{n_0-1} u_k + \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k$$

montrer les premiers termes interviennent et modifient la valeur de la somme.

Définition 1.3

Soit $\sum\limits_{k\geq n_0} u_k$ une série convergente. On appelle reste de la série, et on note (R_n) la suite définie, pour $n \geq n_0$, par

$$R_n = \sum_{k=n_0}^{+\infty} u_k - \sum_{k=n_0}^{n} u_k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$$

Proposition 1.4

Il découle immédiatement de la définition que le reste d'une série convergente tend vers 0 :

$$\left(\sum_{k\geq n_0} u_k \text{ converge}\right) \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} R_n = 0$$

Exercice 1

On considère la série $\sum\limits_{n\geq 1} 1/n^2$, dont on note S_n la somme partielle d'indice n.

1. Montrer que la suite (S_n) est croissante.
2. Montrer que, pour tout $n \geq 2$, on a $\dfrac{1}{n^2} \leq \dfrac{1}{n-1} - \dfrac{1}{n}$.
3. En déduire que la série est convergente. On note S sa somme.
4. Déduire également de la Question (2), que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $p \geq n$, on a

$$\sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k^2} \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{p}$$

   En déduire une majoration du reste.
5. Écrire un programme en Python permettant d'obtenir une valeur approchée à 10^{-3} de S.

Proposition 1.5 — Lien suite - série

On a un lien très utile entre somme(s) partielle(s) et terme général

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n-1} u_k + u_{n+1} = S_{n-1} + u_n \iff u_n = S_n - S_{n-1}.$$

En particulier, si la série $\sum u_n$ est convergente, alors la suite (u_n) converge vers 0 .

Remarque :

La convergence vers 0 du terme général est une condition nécessaire mais absolument pas suffisante. Contre-exemple : la série harmonique.

Exercice 2

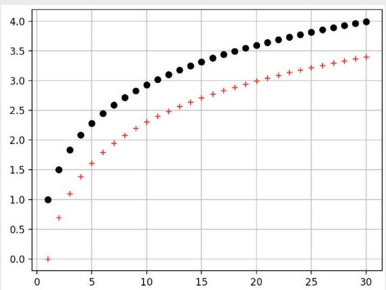
Soit H_n la somme partielle d'indice n de la série harmonique $\sum \frac{1}{k}$.

1. Que vérifie le terme général de cette série ?
2. On dispose du code suivant dont l' exécution renvoie l'affichage ci-contre. Que peut-on conjecturer ?

```python
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

def serie_h(n):
        return np.cumsum([1/k for k in range(1,n+1)])

n=50
N=[k for k in range(1,n+1)]
Y=series_h(n)
Z=[np.log(k) for k in N]
plt.grid()
plt.plot(N,Y,'ko')
plt.plot(N,Z,'k+',color='red')
plt.show()
```



3. Montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$H_{2n} - H_n \geq \frac{1}{2}$$

4. En déduire la divergence de la série harmonique.

Remarque :

Si le terme général ne tend pas vers 0, la série diverge : *on dit d'ailleurs dans ce cas que la série diverge grossièrement.*

Proposition 1.6

Soient $\sum_{n \geq n_0} u_n$ et $\sum_{n \geq n_0} v_n$ deux séries convergentes, et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Alors la série $\lambda \sum u_n + \mu \sum v_n$, de terme général $(\lambda u_n + \mu v_n)$, est encore convergente. Sa somme est égale à la combinaison linéaire correspondante des sommes des deux séries.

Remarque :

La réciproque de la proposition précédente est fausse. Il est tout à fait possible que $\sum (u_n + v_n)$ converge sans qu'aucune des deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ ne converge. Par exemple,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}.$$

La série $\sum 1/k(k+1)$ est convergente, mais les deux séries $\sum 1/k$ et $\sum 1/(k+1)$ divergent.

I. 2 Techniques et séries usuelles

Télescopage

Proposition 1.7

Une suite (u_n) est convergente si et seulement si la série $\sum (u_{n+1} - u_n)$ est convergente. Auquel cas, on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = \lim_{n \to +\infty} u_n - u_0$$

Exercice 3

Soient f la fonction définie sur $[0\,;1]$ par $f : x \mapsto x - x^2$ et (u_n), de premier terme $u_0 \in]\,0;1[$, vérifiant la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = f(u_n) = u_n - u_n^2.$$

1. Dresser le tableau de variations de f.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \in]\,0;1[$.
3. Étudier la monotonie puis la convergence de (u_n). Déterminer sa limite.
4. Montrer que la série $\sum u_n^2$ converge et préciser sa somme.

Comparaison série/intégrale

cf. Complément sur le sujet.

Séries géométriques et dérivées.

Proposition 1.8

Les séries

$$\sum_{n\geq 0} q^n, \quad \sum_{n\geq 1} nq^{n-1}, \quad \text{et} \quad \sum_{n\geq 2} n(n-1)q^{n-2}$$

sont convergentes si et seulement si $|q|<1$. Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}, \quad \sum_{k=1}^{+\infty} kq^{k-1} = \frac{1}{(1-q)^2}, \quad \text{et} \quad \sum_{k=2}^{+\infty} k(k-1)q^{k-2} = \frac{2}{(1-q)^3}.$$

Exercice 4

Soit $p \in]0,1[$. Montrer que la série $\sum k^2\left(p^k(1-p)+(1-p)^k p\right)$ converge et calculer sa somme.

Série exponentielle

Proposition 1.9

La série exponentielle $\sum \frac{x^n}{n!}$ converge pour tout réel x. De plus, on a $\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$.

On utilise énormément ces résultats en probabilités ; les séries géométriques apparaissent dès qu'intervient la loi géométrique, la série exponentielle dès qu'intervient la loi de Poisson.

Séries de Riemann

La comparaison série/intégrale avec la fonction $t \mapsto t^{-\alpha}$ (pour $\alpha>0$) permet d'obtenir le résultat suivant, essentiel dans le cadre de l'étude des séries ; les séries de Riemann étant les séries de référence.

Proposition 1.10 — Critère de convergence des séries de Riemann

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{converge} \iff \alpha > 1$$

Remarques :

R1 – On retrouve notamment que la série harmonique $\sum 1/k$ diverge, alors que la série $\sum 1/k^2$ converge.

R2 – ATTENTION !! la série $\sum \frac{1}{n^n}$ n'est pas une série de Riemann.

I. 3 Convergence absolue

Définition 1.11

On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument (ou est absolument convergente) si la série $\sum |u_n|$ est convergente.

Théorème 1.12

Théorème. Si la série $\sum u_n$ est absolument convergente alors elle est aussi convergente.

Attention:

La réciproque de cette propriété est fausse. Le contre-exemple classique est celui de la série harmonique alternée, proposé ci-dessous.

Exercice 5

Série Harmonique alternée On considère la série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n/n$ (appelée *série Harmonique alternée*), dont on note (S_n) la suite des sommes partielles.

1. Montrer que (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. En déduire la nature de la série harmonique alternée. Est-elle absolument convergente ?

II. Relations de comparaisons entre suites

Dans toute la suite $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $w = (w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ désignent des suites à valeurs réelles.

Définition 2.1

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites avec (v_n) qui ne s'annule pas à partir d'un certain rang,

- on dit que (u_n) est **négligeable devant** (v_n) si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \qquad = 0$$

  On note alors $u_n \underset{+\infty}{=} o\,(v_n)$.

- on dit que (u_n) est **équivalente à** (v_n) si et seulement si

$$\lim_{n\to+\infty} \qquad =$$

  On note alors $u_n \underset{+\infty}{\sim} (v_n)$.

Remarques :

R1 – Pour une suite on ne peut utiliser ces relation qu'au voisinage $+\infty$. De ce fait on peut omettre le $+\infty$ en indice.

R2 – La plupart des relations sur les suites peuvent être obtenues par changement de variable dans une relation sur les fonctions.

R3 – On peut aussi donner les définitions plus rigoureuses et plus générales :

- $u_n = o(v_n)$ si et seulement si il existe une suite (e_n) définie au voisinage de $+\infty$, telle qu'au voisinage de $+\infty$ $u_n = \mathrm{e}_n v_n$. et telle que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}_n = 0$.
- $u_n \sim v_n$ si et seulement si il existe une suite (e_n) définie au voisinage de $+\infty$, telle qu'au voisinage de $+\infty$ $u_n = (1+\mathrm{e}_n)v_n$ et telle que $\lim_{n\to+\infty} \mathrm{e}_n = 0$

R4 – On retrouve également une caractérisation vue pour les fonctions : $\boxed{u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n \Leftrightarrow u_n = v_n + o(v_n).}$

Exemple :

Trouvons un équivalent de la suite $\left(n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}^*}$ au voisinage de $+\infty$. On sait que au voisinage de 0

$$\ln(1+u) \underset{u\to 0}{\sim} u$$

Donc comme (*Cet argument est indispensable pour faire le changement de variable, il doit donc apparaitre clairement dans votre réponse.*)

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2} = 0$$

$$\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$$

et finalement

$$n\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) \sim \frac{1}{n}$$

ce qui permet de calculer la limite de cette suite.

Théorème 2.2

Si les suites (u_n) et (v_n) sont équivalentes, alors elles ont même nature. Autrement dit

- Si $u_n \sim v_n$ et (u_n) converge vers ℓ alors
- Si $u_n \sim v_n$ et (u_n) diverge vers $\pm\infty$ alors

Proposition 2.3

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite convergente vers 0. Alors

$$e^{u_n} - 1 \sim \qquad \ln(1+u_n) \sim \qquad (1+u_n)^\alpha - 1 \sim$$

Définition 2.4

Obtenir un développement asymptotique d'une suite (u_n) c'est trouver par exemple des réels α, β et γ tels que au voisinage de $+\infty$

$$u_n = \alpha + \beta\frac{1}{n} + \gamma\frac{1}{n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Exemple :

On a $\ln\left(\frac{2n}{n+1}\right) = \ln 2 - \frac{1}{n} - \frac{1}{2n^2} + o\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Attention:

Parfois on a des formes plus compliquées par exemple

$$\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 + \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

Remarque :

Les opérations vues sur les relations de comparaison entre fonctions s'appliquent aux relations de comparaison entre suites.

Exercice 6

1. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\ln\left(1-\dfrac{1}{2n}\right)$.
2. Déterminer un équivalent en $+\infty$ de $\sqrt{1+\dfrac{1}{n}}-1$.
3. (a) Que ferait un étudiant qui n'a pas bien écouté son prof, lorsqu'on lui demande de trouver un équivalent pour
$$u_n=\sqrt{1+\frac{1}{n}}-1+\ln\left(1-\frac{1}{2n}\right)?$$
   (b) Déterminer alors un équivalent à la suite u_n.

Type Concours

On considère la suite (S_n) définie, pour $n \geq 1$, par $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

1. Montrer que, pour tout $k \geq 2$, on a $\displaystyle\int_k^{k+1}\frac{\mathrm{d}t}{t} \leq \frac{1}{k} \leq \int_{k-1}^{k}\frac{\mathrm{d}t}{t}$.
2. Obtenir alors l'encadrement suivant, pour tout $n \geq 1$: $\ln(n+1) \leq S_n \leq 1+\ln(n)$.
3. En déduire un équivalent de S_n.

Type Concours

Montrer que $\exp\left(\left(2-\dfrac{1}{n}\right)\ln(n)\right)-n^2 \underset{+\infty}{\sim} -n\ln(n)$

III. Séries à termes positifs

Dans toute cette section, on considère des séries définies par des suites dont tous les termes sont positifs.

III. 1 Pourquoi des séries à termes positifs ?

Retenir

Lorsque l'on utilise un des résultats suivants, il est indispensable d'avoir justifié et de bien mentionner que la série est à termes positifs.

Remarque :

Il est clair que si $\sum u_n$ est une série à termes positifs, la suite (S_n) des sommes partielles est croissante (à chaque rang on ajoute une quantité positive)
$$S_{n+1}-S_n=u_{n+1}\geq 0.$$
Le théorème de convergence monotone permet alors d'établir le résultat suivant.

Proposition 3.1

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs.

- La série est convergente si et seulement si ses sommes partielles sont majorées.
- Si la série diverge alors elle diverge vers $+\infty$.

III. 2 Critères de comparaisons

Proposition 3.2 — Critère avec inégalités

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles qu'à partir d'un certain rang,
Alors,

$$0 \leq u_n \leq v_n$$

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Exercice 7

On considère la série $\displaystyle\sum_{k \geq 0} \frac{1}{4^k + \ln(k+1) + 1}$.

1. Montrer que cette série converge. On note S sa somme.
2. On souhaite déterminer une valeur approchée de S.
   (a) Montrer que : $\displaystyle\left| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4^k + \ln(k) + 1} - S \right| \leq \frac{1}{3 \times 4^n}$..
   (b) Écrire une fonction Python $S_$ap (eps) prenant en paramètre un réel eps et renvoyant une valeur approchée de S à eps près.

Proposition 3.3 — Critère avec négligeabilité

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n = o(v_n)$.

- Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.
- Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge.

Retenir

Pour montrer la convergence de $\sum u_n$, on regarde donc souvent la limite de $n^2 u_n$.

Exercice 8

1. Montrer que $\displaystyle\frac{n^2 - 4}{e^n - n - 2\ln(n)} = o\left(\frac{1}{n^2}\right), \quad n \to +\infty$..
2. En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum \frac{n^2 - 4}{e^n - n - 2\ln(n)}$.

Proposition 3.4 — Critère avec équivalents

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs telles que

$$u_n \sim v_n, \quad n \to +\infty$$

Alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Exercice 9

Déterminer la nature de la série $\sum \dfrac{3n^2 + 7n + \ln(n) - 1}{2n^3 - n + 3}$.

Méthode :

Pour utiliser ces critères, on travaille sur le terme général.

On rédige soigneusement le raisonnement.

- On commence par vérifier et justifier que celui-ci est positif (au moins à partir d'un certain rang) ;
- On compare (algébriquement, par équivalent ou par négligeabilité) au terme général d'une série usuelle (bien souvent une série de Riemann)
- On peut enfin conclure.

Exercice 10

Déterminer la nature des séries de terme général

$$\text{(i) } u_n = \frac{1}{3^n \ln(n)}, \qquad \text{(ii) } v_n = \sqrt{n}\left(\exp\left(\frac{1}{n}\right) - 1\right).$$

III. 3 Et si les termes positifs ne sont pas positifs ?

La convergence absolue permet de ramener l'étude à une série à termes positifs, ce qui permet d'utiliser les résultats de comparaison associés à ces séries.

On commence donc par étudier la série de terme général $|u_n|$ et si celle-ci converge, on peut affirmer grâce au théorème que $\sum u_n$ converge.

Exercice 11

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2 + \ln(2n)}$.

Remarques :

R1 – Les séries dont les termes changent de signe selon la parité de n sont appelées *séries alternées*.

R2 – Si les termes sont tous négatifs, étudier la convergence absolue de $\sum u_n$ revient à étudier la convergence de $\sum(-u_n)$.