Limite de Suites

Exercice 1

Calculer les limites en $+\infty$ des suites dont le terme général est donné par les expressions suivantes.

1. $n\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$
2. $n^2\ln\left(1-\dfrac{1}{n}\right)$
3. $\sqrt{n}\ln\left(1-\dfrac{1}{(n+2)^2}\right)$
4. $n\left(\mathrm{e}^{1/n}-\sqrt{1/n}\right)$
5. $\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n$
6. $\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{3n}$

Exercice 2

Calculer les limites en $+\infty$ des suites dont le terme général est donné par les expressions suivantes.

1. $\ln\left(\dfrac{n+1}{n^2+1}\right)\dfrac{1}{n}$
2. $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
3. $\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)^n$
4. $(1+n)^{\frac{n}{1+n^2}}$
5. $\dfrac{\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}$

Séries

Exercice 3

Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\sum \dfrac{n}{n^4+n^2+1}$
2. $\sum \dfrac{1}{n\cdot\sqrt{n}+1}$
3. $\sum \dfrac{1}{n!+n^2}$
4. $\sum \dfrac{\mathrm{e}^n}{n^{100}}$
5. $\sum \dfrac{n^{4/9}}{3^n}$
6. $\sum \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln n}}$

Exercice 4

Les séries suivantes sont-elles convergentes ?

1. $\sum \dfrac{n}{(\ln n)^n}$
2. $\sum \dfrac{(n!)^2}{\mathrm{e}^{n^2}}$
3. $\sum \dfrac{n^2}{(2n-1)!}$

Exercice 5

Calculer la somme des séries suivantes.

1. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\ln\left(\frac{1+n}{n-1}\right)$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 2}\frac{1}{\sqrt{n-1}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}$
3. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n}{3^n}$

Dans chacun des cas écrire une fonction python texttttfunction y =sommeapartielle(n) qui calcule la somme partielle de rang n.

Exercice 6

Calculer la somme des séries suivantes.

1. $u_n=\dfrac{1}{(3n+1)(3n+4)}\quad(n\geqslant 0)$
2. $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\ln\left(1+\frac{2}{n(n+3)}\right)$

Exercice 7 — Convergence absolue

Les séries suivantes sont-elles absolument convergentes ?

1. $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)^3}$
2. $\sum \dfrac{(-1)^{n-1}}{(3n-1)}$
3. $1-\dfrac{1}{\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{5}}-\dfrac{1}{\sqrt{7}}+\ \ldots$
4. $\dfrac{1}{8}-\dfrac{2}{12}+\dfrac{3}{16}-\dfrac{4}{20}+\ldots$
5. $\sum \dfrac{(-1)^n\ln n}{n}$
6. $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$

Exercice 8 — Convergence absolue

Les séries suivantes sont-elles absolument convergentes ?

1. $\sum\left(\dfrac{1}{n}-1\right)^n$
2. $\sum\left(\dfrac{1-n}{1+n}\right)^n$
3. $\sum \dfrac{(-1)^n}{\ln n+(-1)^n}$
4. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n+(-1)^n}$
5. $\sum \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$
6. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n^{1/n}}$
7. $\sum (-1)^n\dfrac{2^n}{n^2}$
8. $\sum \dfrac{(-1)^n n}{\mathrm{e}^n}$
9. $\sum \dfrac{(-1)^n}{n!}$

Exercice 9

Calculer la somme des séries dont le terme général est

1. $\dfrac{n^2-n}{(n+3)!}$
2. $\dfrac{(n+2)(n+1)}{2^{n+3}}$

Calcul de séries liées aux probabilités

Exercice 10

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0;1[$.

1. Rappeler le support de X ainsi que la loi de X.
2. **Montrer** que X admet une espérance et la **calculer**
3. **Montrer** que $X(X-1)$ admet une espérance et la **calculer**
4. En déduire que X admet une variance et la calculer

Exercice 11

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$ avec $p \in \mathbb{R}_+^*$.

1. Rappeler le support de X ainsi que la loi de X.
2. **Montrer** que X admet une espérance et la **calculer**
3. **Montrer** que $X(X-1)$ admet une espérance et la **calculer**
4. En déduire que X admet une variance et la calculer

Exercice 12

On suppose que X est une variable aléatoire telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad P(X=n) = (n+1)p^2(1-p)^n$$

ou $p \in]0;1[$.

1. Montrer que cette formule définie une loi de probabilité.
2. Montrer que X admet une espérance et la **calculer**

Vers les concours

Suites définies par récurrence

Exercice 13

On considère la suite récurrente $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f(x) = x^2 + \dfrac{3}{16}$ et $u_0 \geqslant 0$.

1. Étudier f et le signe de $f(x)-x$. Quelles sont les limites possible de (u_n) ?
2. On suppose $u_0 \in [0; 1/4]$. Montrer que pour tout $u_n \in [0; 1/4]$ puis que (u_n) est croissante.
3. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite) ?
4. On suppose $u_0 \in [1/4; 3/4]$. Montrer que (u_n) est décroissante et minorée. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite) ?
5. On suppose $u_0 > 3/4$. Montrer que (u_n) est croissante. Quelle est la nature de (u_n) (si elle est convergente, préciser sa limite) ?

Exercice 14

On note f la fonction définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = 1 + \ln x$. Soit u la suite définie par son premier terme $u_0 \geqslant 1$ et par la relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Démontrer que la suite est bien définie et qu'elle est minorée par 1.
2. Étudier le signe de $f(x)-x$ sur $[1; +\infty[$.
3. Étudier la monotonie de u.
4. En déduire que (u_n) est convergente, et donner sa limite.

Exercice 15 — EML 1996

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{e^x}{e^{2x}+1}$

1. (a) Montrer que$f$ est paire.
   (b) Etudier les variations de f.
   (c) Montrer qu'il existe un unique réel ℓ tel que $f(\ell) = \ell$. Justifier : $0 \leqslant \ell \leqslant \dfrac{1}{2}$ (on donne $f(1/2) < 1/2$)
   (d) Montrer que pour tout réel x : $|f'(x)| \leqslant f(x) \leqslant \dfrac{1}{2}$
2. On définit la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par :

$$u_0 = 0 \qquad \text{et } \forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f(u_n)$$

(a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ $\quad u_n \in [0, \frac{1}{2}]$

(b) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} - \ell| \leqslant \frac{1}{2}|u_n - \ell| \qquad \text{puis} \qquad |u_n - \ell| \leqslant \frac{1}{2^{n+1}}$$

(c) En déduire que la suite (u_n) converge vers ℓ.

(d) Ecrire un programme Scilab permettant d'obtenir une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

Exercice 16

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = -2$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+1} = \frac{2u_n}{3 - u_n}$$

1. Écrire une fonction `function y=suite(n)` qui calcule le terme n de cette suite.
2. **Méthode 1 : Utilisation d'une suite auxiliaire :**
   Considérons la suite auxiliaire $v = (v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour $n \in \mathbb{N}$, par $v_n = \dfrac{u_n}{1 - u_n}$
   (a) Démontrez que v est une suite géométrique.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
   (c) Montrez que u est convergente et précisez sa limite.
3. **Méthode 2 : Utilisation d'une inégalité :**
   (a) Montrez que la suite u vérifie
   $$\forall n \in \mathbb{N}, |u_{n+1}| \leqslant \frac{2}{3}|u_n|$$
   .
   (b) En déduire que u converge et déterminez sa limite.
   (c) Déterminez un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont dans l'intervalle ouvert $]-10^{-2}, 10^{-2}[$.

Exercice 17

[suite définie par récurrence et série !] Soit u la suite définie par

$$u_0 \in]0; 1[\quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = u_n - u_n^2.$$

1. Montrer que pour tout entier n on a $u_n \in]0; 1[$.
2. Montrer que la suite u est décroissante et étudier sa limite.
3. Montrer que la série $\sum u_n^2$ est convergente et calculer sa somme.
4. En calculant les sommes partielles, montrer que la série $\sum \ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ est divergente.
5. Trouver un équivalent de $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$ et en déduire que la nature de la série $\sum u_n$.

Suites implicites

Exercice 18 — D'après EDHEC 1997

Pour tout entier naturel n non nul, on note f_n la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \ f_n(x) = x - n.\ln(x)$$

1. (a) Etudier cette fonction et dresser son tableau de variations.
   (b) En déduire, lorsque n est supérieur ou égal à 3, l'existence de deux réels $u_n$et $v_n$solutions de l'équation $f_n(x) = 0$ et vérifiants $0 < u_n < n < v_n$.
2. Etude de la suite $(u_n)_{n\geqslant 3}$.
   (a) Montrer que $\forall n \geqslant 3, 1 < u_n < e$.
   (b) Montrer que $f_n(u_{n+1}) = \ln(u_{n+1})$, puis en conclure que (u_n) est décroissante.
   (c) En déduire que $(u_n)_{n\geqslant 3}$ converge et montrer, en encadrant $\ln(u_n)$, que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.
   (d) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln(u_n)}{u_n - 1} = 1$; en déduire que $u_n - 1 \sim \dfrac{1}{n}$.

Exercice 19 — D'après EDHEC 2008

Pour tout entier naturel n non nul, on définit la fonction f„ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_n(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^x} + n\, x$$

1. (a) Déterminer, pour tout réel x, $f_n'(x)$ et $f''(x)$.
   (b) En déduire que la fonction f_n est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
2. (a) Montrer que l'équation $f_n(x) = 0$ possède une seule solution sur $\mathbb{R}$, notée u_n.
   (b) Montrer que l'on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \dfrac{-1}{n} < u_n < 0$.
   (c) En déduire la limite de la suite (u_n)
   (d) En revenant à la définition de u_n, montrer que $u_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{-1}{2n}$.

Exercice 20

Soit $n \in \mathbb{N}$, Montrer que l'équation $x\mathrm{e}^x = n$ possède dans $\mathbb{R}_+$, une unique solution x_n . Étudier la limite de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Suites d'intégrales

Exercice 21

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \mathrm{e}^{-x} dx$.

1. Justifier que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie.
2. Étudier les variations de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$
3. Démontrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer la valeur de sa limite
4. Démontrer : $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} = (n+1)I_n - \mathrm{e}^{-1}$.
5. En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leqslant I_n - \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n+1} \leqslant \dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$. Trouver alors un équivalent simple de I_n quand n tend vers $+\infty$.
6. Écrire une fonction Python prenant en argument d'entrée un entier naturel n et renvoyant la valeur de I_n.

Exercice 22

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$ et $J_n = nI_n$.

1. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n$
2. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, J_n = \ln(2) - \displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx$.
3. Établir : $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 \ln(1+x^n)\, dx = 0$.
4. En déduire la limite de $(J_n)_{n\in\mathbb{N}}$ puis un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$

Divers

Exercice 23

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^* \qquad u_n = \sqrt{n + \sqrt{n-1+\sqrt{\cdots + \sqrt{2+\sqrt{1}}}}}$$

1. Écrire une fonction `function y=suite(n)` qui calcule le terme n de cette suite.
2. Montrer que $\lim u_n = +\infty$
3. Trouver une relation simple entre u_n et u_{n+1}.
4. Montrer que pour $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \leqslant n$ et que $u_n = o(n)$
5. Trouver un équivalent simple de (u_n).
6. Trouver la limite de $u_n - \sqrt{n}$

Exercice 24

On pose pour n entier strictement plus grand que 1

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{1}{k}$$

1. Montrer que $(S_{2n})_n$ et $(S_{2n+1})_n$ sont adjacentes.
2. En déduire la convergence de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. La série converge-t'elle absolument ?

Exercice 25

1. Critères de comparaison sur les séries à terme général positif.
2. Soit $x \in [0;+\infty$. Établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k+x}$. On notera $f(x)$ sa somme.
3. Calculer $f(0)$.
4. Étudier les variations de la fonction f ainsi définie sur $[0;+\infty[$.
5. Établir : $\forall x \in \Big[0;+\infty\Big[, f(2x) = \dfrac{1}{2}f(x) + \dfrac{1}{2x+1}$
6. Déduire des deux questions précédentes que f possède une limite en $+\infty$ et la déterminer.
   7. item Montrer que pour tous réels positifs x et y, on a : $|f(x)-f(y)| \leqslant \dfrac{4}{3}|x-y|$.

   En déduire que f est continue sur $[0;+\infty[$.

Exercice 26 — Somme de la série harmonique alternée

On pose, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$T_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}, \qquad \text{et} \qquad I_n = \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{(1+t)^{n+1}}\, \mathrm{d}t.$$

(d) En intégrant par parties, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$I_{n+1} = \frac{1}{n+1} - I_n$$

2. Calculer I_0 et en déduire I_1.
3. En déduire que, pour tout entier $n \geqslant 1, T_n = \ln(2) + (-1)^{n+1} I_n$.
4. Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,
5. Conclure.

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$$

Exercice 27 — D'après EML 2015

On considère l'application $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, x \longmapsto f(x) = x^3 e^x$.

1. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{f(n)}$ converge. On note S sa somme.
2. Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| S - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{f(n)} \right| \leqslant \frac{1}{(e-1)e^n}.$$

3. En déduire une fonction en Python qui calcule une valeur approchée de S à 10^{-4} près.

Exercice 28

1. Rappeler la formule de Taylor-Young, à l'ordre 2 au voisinage de 0.
2. Soit $f : t \mapsto \ln(1+t) - t$.
   (a) Donner le domaine de définition de f puis un équivalent de $f(t)$ au voisinage de 0 .
   (b) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f\left(\frac{1}{n}\right)$.
3. On considère un nombre réel $a > 0$ et une suite à termes strictement positifs $(u_n)_{n \geqslant 1}$. On introduit alors les suites (w_n) et (ℓ_n) définies, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par

$$w_n = \frac{u_{n+1}}{u_n} - 1 + \frac{a}{n}, \quad \ell_n = \ln\left(n^a u_n\right).$$

   On suppose que la série de terme général w_n est absolument convergente.
   (a) Montrer la convergence des séries $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} w_n^2$ et $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{w_n}{n}$.
   (b) Vérifier que

$$\ell_{n+1} - \ell_n = f\left(w_n - \frac{a}{n}\right) + w_n + af\left(\frac{1}{n}\right).$$

   (c) Préciser

$$\lim_{n \to +\infty} w_n - \frac{a}{n}$$

   puis la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} f\left(w_n - \frac{a}{n}\right)$.
   (d) En déduire la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} (\ell_{n+1} - \ell_n)$.
   (e) Que peut-on en déduire à propos de la suite (ℓ_n) ?
   (f) Conclure qu'il existe une constante $A > 0$ telle que

$$u_n \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{A}{n^a}.$$

4. Application. On considère la suite (u_n) définie, pour $n \geqslant 1$ par

$$u_n = \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1}.$$

   (a) Expliciter u_1, u_2, u_3.
   (b) Déterminer la nature de la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} u_n$.

Exercice 29

On cherche l'ensemble des couples $(a, b) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ tels que la série $\displaystyle\sum \frac{a^k}{1+b^k}$ soit convergente.

1. Montrer que si $0 < a < b$, alors la série est convergente.
2. On considère $0 < b \leqslant a$.
   (a) Traiter les cas $b < 1$ et $b = 1$.
   (b) Que se passe-t-il pour $b > 1$?

Exercice 30 — D'après ECRICOME 1997

Soit α est un réel strictement positif. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose

$$u_n(\alpha) = \frac{n!}{\prod_{k=0}^{n}(\alpha+k)}.$$

1. (a) Montrer que la suite (u_n) est monotone et convergente. On note $\ell(\alpha)$ sa limite.
   (b) Que peut-on déduire pour la série de terme général $(u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha))$?
   (c) On suppose que $\ell(\alpha)$ est non nulle. Démontrer que

$$u_n(\alpha) - u_{n+1}(\alpha) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\alpha\ell(\alpha)}{n}.$$

   (d) Déduire de ce qui précède que $\ell(\alpha) = 0$.
2. Dans cette question : $\alpha \in]0,1]$.
   (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n(\alpha) \geqslant \frac{1}{n+\alpha}.$$

   (b) Quelle est la nature de la série de terme général $u_n(\alpha)$?

Exercice 31

On considère la fonction f définie sur $[0;1]$ par $f(x) = 2xe^x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0;1]$ sur un ensemble que l'on déterminera. On note f^{-1} sa bijection réciproque. Donner les tableaux de variations de f et de f^{-1}.
2. Vérifier qu'il existe un unique nombre $\alpha \in [0;1]$ tel que $\alpha e^\alpha = 1$. Montrer que $\alpha \neq 0$.
3. Montrer, par récurrence, que la suite (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 = \alpha \\ u_{n+1} = f^{-1}(u_n), \quad n \geqslant 0. \end{cases}$$

   est bien définie (i.e. que u_n existe pour tout entier n) et que $u_n \in]0;1]$.
4. Montrer que, pour tout $x \in [0;1]$, $f(x) - x \geqslant 0$ et que l'égalité ne se produit que pour $x = 0$.
5. En déduire la monotonie de la suite (u_n), puis qu'elle converge. On précisera sa limite.
6. On s'intéresse alors à la série de terme général u_n dont on note (S_n) la suite des sommes partielles.
   (a) Montrer que, pour tout entier $n, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n e^{-u_{n+1}}$.
   (b) En déduire, par récurrence, que pour tout entier n,

$$u_n = \frac{e^{-S_n}}{2^n}.$$

   (c) À l'aide du critère de comparaison, montrer que la série $\sum u_n$ converge. On note L sa somme. Montrer que $\alpha \leqslant L \leqslant 2$.
   (d) Montrer finalement que

$$u_n \sim \frac{e^{-L}}{2^n}, \quad n \to +\infty.$$

Exercice 32 — Série alternée.

1. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite décroissante de limite nulle. Pour $N \in \mathbb{N}$, on pose $S_N = \displaystyle\sum_{n=0}^{N}(-1)^n u_n$.
   (a) Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geqslant 0$.
   (b) Démontrer que les suites $(S_{2N})_{n\in\mathbb{N}}$ et $(S_{2N+1})_{n\in\mathbb{N}}$ sont adjacentes.
   (c) En déduire que la série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente.
2. Établir la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.
3. Donner un équivalent simple de $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$ quand n tend vers $+\infty$.
4. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite qui converge vers 0 . Établir :

$$\frac{1}{1+u_n} = 1 - u_n + u_n^2 + \underset{n\to+\infty}{o}(u_n^2)$$

En déduire :

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n} = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{n\sqrt{n}} + \underset{n\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$$

5. Étudier alors la nature de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$.
6. Qu'a permis de mettre en évidence cet exercice ?

Exercice 33

Partie I - Étude d'une suite récurrente

On considère une suite (u_n) définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n+1}.$$

On introduit également la suite (v_n) définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par

$$v_n = \frac{\ln(u_n)}{2^n}.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$. En déduire que la suite (v_n) est bien définie.
   (2) Trouver un réel $q \in]0;1[$ tel que

$$\frac{\ln(n)}{2^n} = o(q^n), \quad n \to +\infty.$$

   En déduire que la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{\ln(k)}{2^k}$ converge. Dans toute la suite, on note

$$\sigma = -\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$$

2. (a) Pour tout entier $k \geqslant 1$, exprimer $v_k - v_{k-1}$ en fonction de k.
   (b) Déterminer alors la nature de la série $\sum_{k \geqslant 1} (v_k - v_{k-1})$.
   (c) En déduire la convergence de la suite (v_n) et exprimer sa limite ℓ en fonction de u_0 et σ.
   3. On suppose dans cette question que $u_0 \neq e^{-\sigma}$.
   En distinguant les cas $u_0 < e^{-\sigma}$ et $u_0 > e^{-\sigma}$, déterminer le signe de ℓ.
   (b) En déduire la limite de la suite $(\ln(u_n))$ puis le comportement en $+\infty$ de u_n.
   4. On suppose dans cette question que $u_0 = e^{-\sigma}$.
   Vérifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k}$$

   (b) Montrer alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(u_n) \geqslant \frac{\ln(n+1)}{2}.$$

   (c) Déterminer alors $\lim_{n \to +\infty} u_n$.

Partie II - Approximation de σ

5. (a) Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*, \ln(x) \leqslant x$.
   (b) Soient $m, n \in \mathbb{N}^*$, avec $m \geqslant n+1$. Déterminer

$$\lim_{m \to +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \times \sum_{k=1}^{m-n} k \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} \quad \text{et} \quad \lim_{m \to +\infty} n \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \times \sum_{k=1}^{m-n} \left(\frac{1}{2}\right)^{k}.$$

   (c) En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\ln(k)}{2^k} \leqslant \frac{n+2}{2^n}.$$

6. Montrer alors que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \left| \sigma - \left(-\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{2^k} \right) \right| \leqslant \frac{n+2}{2^n}.$$

7. Écrire alors une fonction Python approx(eps) prenant en argument un réel eps et renvoyant une approximation de σ à eps près.