Les techniques utiles

Exercice 1

Soient x, y et z des réels.

1. Montrer que $x + y = \max(x, y) + \min(x, y)$
2. Montrer que $\max(x, y, z) = \max(\max(x, y), z)$
3. Montrer que $\min(x, y) = \dfrac{x + y - |x - y|}{2}$
4. Trouver une formule analogue pour $\max(x, y)$

Exercice 2

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires. Le but de cet exocice est de « commencer » à calculer la loi de $X + Y$. Compléter les formules suivantes

1. **Exemple** Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}$ alors $(X + Y)(\Omega) = \mathbb{N}$ et
$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad [X + Y = n] = \bigcup_{j=0}^{n} [X = j] \cap [Y = n - j] = \bigcup_{j=0}^{n} \cdots$$
et dans cette union les événements sont incompatibles deux à deux.
2. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors ...
3. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ alors ...
4. Si $X(\Omega) = \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{N}\backslash\{0, 1\}$ alors ...
5. Si $X(\Omega) = \mathbb{Z}$ et $Y(\Omega) = \mathbb{Z}$ alors ...

Exercice 3

Soit X, Y et Z trois vad de support $\mathbb{N}$ en s'inspirant du cours donner une méthode pour calculer $\min(X, Y, Z)$ et $\max(X, Y, Z)$

Exercice 4

On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires finies telles que
$$X(\Omega) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \text{ et } Y(\Omega) = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$$
Compléter la formule suivante
$$\mathrm{Cov}\,(X, Y) = \left(\sum\sum x_? y_?\, \mathrm{P}(?)\right) - E(X)E(Y)$$

Somme, max, min

Exercice 5

On lance deux pièces qui donnent pile avec la probabilité $p \in]0, 1[$.
On lance la première pièce jusqu'au premier pile et on note X_1 le rang du premier pile pour la première pièce. On prend la deuxième pièce et on la lance jusqu'à obtenir un pile et on note X_2 le rang d'apparition du premier pile .

1. Analyse dy sujet : X_1 et X_2 sont elles indépendantes ? Qu'elles sont leur loi.
2. Calculer la loi de $X_1 + X_2$
3. Calculer $\mathrm{P}_{X_1+X_2=n}(X_1 = k)$
4. Analyse du sujet : Décrire une expérience avec des dès qui nous ferait à faire le même type de calcul

Exercice 6

Soit X et Y deux variable aléatoires discrètes indépendantes de même loi $\mathcal{G}(p)$. Calculer la probabilité de l'évènement
$$\max(X, Y) = \min(X, Y)$$

Exercice 7

Soit A, B et C trois variables aléatoires indépendantes suivant une loi $\mathcal{B}(p)$ avec $p]0, 1[$.

1. Calculer la loi de ABC
2. A et ABC sont elles indépendantes ?

Exercice 8

Soit X, Y et Z trois variables aléatoires suivant la même loi uniforme sur $[|1, n|]$. On suppose de plus qu'elles sont indépendantes.

1. Calculer la loi de $\max(X, Y, Z)$.
2. Quelles sont les valeurs prises par $X + Y$?
3. Montrer que $\mathrm{P}(X + Y = k) = \begin{cases} \dfrac{k-1}{n^2} & \text{si } k \in [|2, n|] \\ \dfrac{2n - k + 1}{n^2} & \text{si } k \in [|n + 1, 2n|] \end{cases}$;
4. Vérifier que l'on a bien une loi de probabilité.
5. Calculer $\mathrm{P}(X + Y = Z)$.

Exercice 9

Soit p et r deux réels de $]0,1[$, et

$$X \hookrightarrow \mathcal{G}(p) \qquad Y \hookrightarrow \mathcal{G}(r)$$

On suppose de plus que X et Y sont indépendantes.

1. Calculer $\mathrm{P}(X \geqslant k)$.
2. En déduire la loi de $\min(X,Y)$
3. Calculer $\mathrm{P}(X \geqslant Y)$
4. Comment interpréter les résultats précédents en termes de lancer de pièces.

Calculs des espérances et variances des loi usuelles

Exercice 10

On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([|1,n|])$.

1. Calculer $E(X)$.
2. En utilisant la formule de Koenig-Huyggens calculer $V(X)$
3. $Y \hookrightarrow \mathcal{U}([|a,b|])$ où a et b sont deux entiers telles que $a<b$. Trouver deux entiers p et n tels que $Y = Z + p$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{U}([|1,n|])$
4. En déduire $E(Y)$ et $V(Y)$

Exercice 11

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p)$

1. Démontrer que pour tout entier k et n tels que $0 \leqslant k \leqslant n$

$$k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$$

2. Utiliser la formule précédente pour calculer $E(X)$
3. Donner une formule analogue à celle de la question 1 pour $k(k-1)\binom{n}{k}$.
4. En déduire $E(X(X-1))$
5. En déduire $V(X)$

Exercice 12

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$.

1. Calculer $E(X)$
2. Calculer $E(X(X-1))$
3. En déduire $V(X)$

Exercice 13

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

1. Calculer $E(X)$
2. Calculer $E(X(X-1))$
3. En déduire $V(X)$

Covariance et ρ.

Exercice 14

Soit A et B deux variables indépendantes suivant la loi $\mathcal{U}([|1,n|])$

1. Simplifier $[A+B=2n] \cap [A-B=0]$
2. En déduire que $A+B$ et $A-B$ ne sont pas indépendantes
3. Montrer $\mathrm{cov}(A+B, A-B) = V(A) - V(B)$
4. $A+B$ et $A-B$ sont elles corrélées ?

Exercice 15

Soit X une variable aléatoire suivante la loi uniforme sur $[|1,n|]$. Soit z une variable aléatoire suivant la loi donnée par :

$$z(\Omega) = \{-1,\ 1\} \qquad \mathrm{P}(z=-1) = \mathrm{P}(z=1)$$

On suppose que X et z sont indépendantes et on note

$$Y = zX$$

1. X et Y sont-elles indépendantes ?
2. Calculer la loi du couple (X,Y)
3. Calculer $\mathrm{Cov}\,(X,Y)$ et $\rho(X,Y)$.
4. Conclusion ?

Exercice 16

Soit X, Y et Z trois variables aléatoires indépendantes suivant une loi de Poisson de même paramètre λ.

1. Donner la loi de $X+Y$ et la loi de $Y+Z$
2. Calculer la covariance de $X+Y$ et $Y+Z$
3. Calculer le coefficient de corrélation linéaire de $X+Y$ et $Y+Z$

Exercice 17

La variable X suit une loi de Poisson de paramètre λ et la variable aléatoire Y suit une loi binomiale $\mathcal{B}(X,p)$ où p est un réel fixé appartenant à $]0,1[$.

1. Calculer $P_{X=j}(Y=i)$. On distinguera les cas $i \leqslant j$ et $i > j$.
2. En déduire la loi du couple (X,Y).
3. Montrer que Y suit une loi de Poisson dont on déterminera le paramètre.
4. On note Z la variable aléatoire représentant le nombre d'échec. Montrer sans calcul que Z suit une loi de Poisson de paramètre λq.
5. Montrer que Y et Z sont indépendantes.
6. Montrer que $V(Z) = V(X) + V(Y) - 2\text{cov}(X,Y)$.
7. En déduire $\text{cov}(X,Y)$.
8. Que vaut $\text{cov}(X,Z)$?

Suites de variables aléatoires discrètes

Exercice 18

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toute la même loi de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$.
Quelle est la loi de $X_1 + \cdots + X_n$?

Exercice 19

[Somme de lois binomiales] Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes et telle que X_i suit une loi binomiale $\mathcal{B}(?,?)$.
Quelle est la loi de $X_1 + \cdots + X_n$?

Exercice 20

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes et telle que X_i suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_i)$.
Quelle est la loi de $X_1 + \cdots + X_n$?

Exercice 21

Soit X_1, X_2, $\ldots X_n$ des variables aléatoires indépendantes suivant la même loi $\mathcal{G}(p)$. On note $m = \min(X_1 X_2, \ldots, X_n)$ et $M = \max(X_1 X_2, \ldots, X_n)$. On note $q = 1-p$, et k désigne un entier naturel non nul.

1. Montrer que $P(X_i > k) = q^k$.
2. Calculer $P(m > k)$ et en déduire la loi de m.
3. Calculer $E(m)$.
4. Calculer la loi de M.

Exercice 22

On répartit aléatoirement m boules dans n urnes. On suppose que $m \geqslant 4$ et $n \geqslant 3$. Les urnes sont numérotées de 1 à n et on note X_i la variable aléatoire qui vaut 1 si l'urne i contient au moins une boule à la fin de l'expérience et 0 sinon.

1. Analyse du sujet Comment interpréter l'énoncé « répartit aléatoirement… » ?
2. Calculer $P(X_i = 0)$, en déduire la loi de X_i
3. Calculer $P([X_i = 1] \cap [X_j = 1])$ (distinguer les cas $i = j$ et $i \neq j$)
4. Calculer Cov (X_i, X_j).
5. X_i et X_j sont elles indépendantes
6. Analyse du sujet décrire une expérience qui nous ferait faire le même type de calculs.

Exercice 23

Une urne contient n_1 boules portant le numéro 1, n_2 boules portant le numéro 2 et n_3 boules portant le numéro 3. On effectue k tirages avec remise et no note X_1 la variable aléatoire donnant le nombre de boules 1 obtenues, X_2 le nombre de billes 2 obtenues et X_3 le nombre de billes 3.

1. Donner les lois des variables X_1, X_2, X_3 ainsi que leur espérance et leur variance.
2. Donner la loi de $X_1 + X_2$ et en déduire $\text{cov}(X_1, X_2)$.
3. Que peut on dire du signe de cette covariance ?
4. Calculer $\rho(X_1, X_2)$.
5. On suppose maintenant que $n_2 = n_1$ et $n_3 = 0$. Que vaut alors $\rho(X_1, X_2)$

Exercice 24

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, à valeur dans $\{-1,\ 1\}$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$P(X_n = 1) = p \text{ avec } p \in]0,1[$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$Y_n = \prod_{i=1}^{n} X_i$$

1. Déterminer les lois de Y_2 et Y_3 .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\mathrm{P}(Y_n = 1) = p_n$. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n .
3. En déduire la loi de Y_n .
4. Calculer, pour tout $n \in N$, $\mathrm{Cov}(Y_n, Y_{n+1})$.
5. Existe-t-il des valeurs de p pour lesquelles Y_n et Y_{n+1} sont indépendantes ?
6. Écrire une fonction `simulationY(n,p)` en python pour simuler la variable aléatoire Y_n.

Exercice 25

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, à valeur dans $\{-1,\ 1\}$, telles que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$\mathrm{P}(X_n = 1) = p \text{ avec } p \in]0,1[$$

On pose

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

et on note B_i une variable aléatoire suivant la loi de Bernouilli $\mathcal{B}(p)$

1. Trouver deux réels a et b tel que $X_i = aB_i + b$
2. Trouver la loi de S_n, donner son espérance et sa variance.
3. Ecrire une fonction `simulationS(n,p)` en python pour simuler la loi de S_n .
4. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathrm{Cov}(S_n, S_{n+1})$.
5. Existe-t-il des valeurs de p pour lesquelles S_n et S_{n+1} sont indépendantes ?

Pour aller plus loin

Exercice 26

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoires mutuellement indépendantes et suivant toute la loi $\mathcal{B}(p)$.

Soit N un variable aléatoire indépendante des précédentes qui suit une loi $\mathcal{P}(\lambda)$ On note pour tout entier

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

1. Pour n fixé donner la loi de S_n.
2. On pose $Y = S_N$. Donner $\mathrm{P}_{N=n}(Y = k)$
3. En déduire la loi de Y.
4. Bonus reprendre l'exo pour $X_i \hookrightarrow \mathcal{B}(n, p)$

Exercice 27

Un auto-stoppeur attend au péage d'une autoroute pendant une certaine période. On admet que le nombre de véhicules franchissant le péage pendant cette période est une variable aléatoire suivant la loi de Poisson de paramètre $\lambda\left(\lambda \in \mathbb{R}_*^+\right)$. A chaque fois qu'un véhicule franchit le péage, l'auto-stoppeur lance une pièce donnant PILE avec la probabilité $p(p \in]0;1[)$.

On note N, X et Y respectivement le nombre de lancers, nombre de PILE obtenus et nombre de FACE obtenus.

1. 1.a. Pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$, déterminer $\mathbb{P}_{[N=j]}([X = i])$. 1.b. En déduire que X suit la loi de Poisson de paramètre λp.
2. Sans aucun calcul, mais en justifiant, donner la loi de Y.
3. Démontrer que X et Y sont indépendantes.
4. (a) Démontrer : $\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(N) + \mathbb{V}(X) - 2\,\mathrm{Cov}(N, X)$.
   (b) En déduire $\mathrm{Cov}(N, X)$.

Exercice 28 — ESC 2009 E

Dans cet exercice, n désigne un entier naturel non nul. On dispose d'une pièce dont la probabilité de faire PILE est $p \in]0;1[$ et de $n+1$ urnes numérotées de 0 à n.

Pour $k \in [|0;n|]$, l'urne numéro k contient k balles vertes et $n-k$ balles rouges.

L'expérience consiste à lancer n fois la pièce, puis piocher une unique balle dans l'urne dont le numéro correspond au nombre de PILE obtenus. On note X la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus lors des n lancers et Y la variable aléatoire qui vaut 1 si une balle verte a été tirée, 0 sinon. Toutes les variables aléatoires de l'exercice sont définies sur un certain espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ que l'on ne cherchera pas à déterminer.

1. (a) Reconnaître la loi de X. On précisera en particulier $X(\Omega)$ et, pour tout $k \in X(\Omega), \mathbb{P}([X = k])$. Donner $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.
   (b) Calculer $\mathbb{E}\left(X^2\right)$.
2. Déterminer $\mathbb{P}_{[X=0]}([Y = 0])$ et $\mathbb{P}_{[X=n]}([Y = 0])$. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
3. Calculer $\mathbb{P}([Y = 1])$
4. Donner alors la loi de Y ainsi que son espérance et sa variance.
5. (a) Montrer que $\mathbb{E}(XY) = \dfrac{\mathbb{E}\left(X^2\right)}{n}$.

(b) En déduire la covariance du couple (X, Y).

Exercice 29

On dispose d'un dé équilibré à 6 faces et d'une pièce dont la probabilité d'obtenir PILE est un réel $p \in]0;1[$. Dans tout l'exercice N désigne un entier naturel non nul.

On effectue N lancers du dé et, si n désigne le nombre de 6 obtenus, alors on lance n fois la pièce. On définit ensuite les variables aléatoires suivantes : Z indique le nombre de 6 obtenus, X indique le nombre de PILE obtenus et Y indique le nombre de FACE obtenus.

Ainsi, $X + Y = Z$.

1. Donner la loi de Z, son espérance et sa variance.
2. Justifier que $X(\Omega) \subset [|0; N|]$.
3. Soit $n \in [|0; N|]$. Déterminer la loi conditionnelle de X sachant $[Z = n]$.
4. Établir que pour tous entiers k et n tels que $0 \leqslant k \leqslant n \leqslant N$, on a : $\begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} N \\ k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N-k \\ n-k \end{pmatrix}$. En déduire, pour tout $k \in [|0; N|]$, la valeur de $\mathbb{P}([X = k])$; puis reconnaître la loi de X.
5. Quelle est la loi de la variable aléatoire Y ?
6. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
7. En exprimant $\mathbb{V}(X + Y)$, calculer $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

Exercice 30 — ESC 1997 E

On dispose de deux urnes U_1 et U_2, de six boules numérotées de 1 à 6 ainsi que d'un dé équilibré. Initialement, l'urne U_1 contient les boules 1 et 2 ; alors que l'urne U_2 contient les boules 3,4,5,6.

On note $\mathcal{E}$ l'expérience consistant à lancer une fois le dé et à changer d'urne la boule portant le numéro obtenu avec le dé. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire égale au nombre de boules contenues dans U_1 après n répétitions de $\mathcal{E}$.

1. Les cinq premiers lancers du dé donnent : 1,3,2,3,5. Quel est le contenu de U_1 à l'issue des 5 expériences $\mathcal{E}$ ainsi réalisées ?
2. Quelle est la loi de X_1 ? Calculer son espérance.
3. (a) Déterminer la loi du couple (X_1, X_2).
   (b) En déduire la loi de X_2.
   (c) Calculer $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.
4. (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a
   — $\mathbb{P}([X_{n+1} = 0]) = \frac{1}{6}\mathbb{P}([X_n = 1])$
   — $\forall k \in [|1; 5|]$,
   $$\mathbb{P}([X_{n+1} = k]) = \frac{7-k}{6}\mathbb{P}([X_n = k-1]) + \frac{k+1}{6}\mathbb{P}([X_n = k+1])$$
   — $\mathbb{P}([X_{n+1} = 6]) = \frac{1}{6}\mathbb{P}([X_n = 5])$.
   (b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(X_{n+1}) = \frac{2}{3}\mathbb{E}(X_n) + 1$.
   (c) Calculer alors, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \mathbb{E}(X_n)$. Donner alors $\lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}(X_n)$ et interpréter le résultat obtenu.
5. Écrire une fonction Python prenant en argument d'entrée un entier naturel non nul n et renvoyant une réalisation de X_n.
6. En déduire un programme Python demandant une valeur de n à l'utilisateur et permettant d'obtenir un histogramme approchant la loi de probabilité de X_n.