Réduction de matrices

I. Éléments propres d'une matrice carrée

Définition 1.1

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$

- Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Le réel λ est de A lorsqu'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ **non nul** tel que :

  Un tel vecteur X est de A associé à la valeur propre λ
- Le spectre de A, noté $\text{Sp}(A)$, est l'ensemble des valeurs propres de A.

Remarque :

La condition $X \neq 0_{n,1}$ est nécessaire, sinon tous les réels seraient valeur propre de toutes les matrices.

Méthode :

Vérifier qu'un vecteur X est un vecteur propre :

- on vérifie que $X \neq 0_{n,1}$,
- on calcule AX pour l'écrire sous la forme *constante* $\times X$, la *constante* étant alors une valeur propre de A.

Exercice 1

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. Montrer que le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A.

Définition/Proposition 1.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si λ est une valeur propre de A, le sous-espace $E_\lambda(A) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) / AX = \lambda X\}$ est appelé

- $E_\lambda(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
- $1 \leq \dim\left(E_\lambda(A)\right) \leq n$

Démonstration. □

Remarques :

R1 – $E_\lambda(A)$ n'est pas l'ensemble des vecteurs propres associés à λ.... C'est l'ensemble constitué du vecteur nul **et** de tous les vecteurs propres de A associés à la valeur propre λ

R2 – On aurait aussi pu remarquer que $E_\lambda(A) =$

En particulier : $E_0(A) =$

Proposition 1.3 — Principe de concaténation

Une concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes forme une famille libre.
Ceci signifie que, si $\mathcal{F}_i$ est une famille libre de $E_{\lambda_i}(A)$, alors la famille $\mathcal{F} = \bigcup\limits_i \mathcal{F}_i$ est une famille libre.

Remarque :

En particulier, si on forme une famille de vecteurs en prenant un vecteur propre par valeur propre, la famille obtenue est libre. C'est à dire si $X_1, X_2, \dots, X_p$ sont des vecteurs propres de A associés respectivement aux valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$, alors la famille $(X_1, X_2, \dots, X_p)$ est une famille libre de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
Ceci a la conséquence suivante :

Théorème 1.4

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors,

$$\operatorname{card}(\operatorname{Sp}(A)) \leq n.$$

Autrement dit, une matrice de taille n admet au plus n valeurs propres distinctes.

Exercice 2

Soient la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$ et les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, et $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Calculer AX_1, AX_2 et AX_3. En déduire $\operatorname{Sp}(A)$.

Méthode :

Pour déterminer une base de $E_\lambda(A)$, on peut :

1. résoudre le système linéaire $AX = \lambda X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$,
2. ou déterminer la dimension de $E_\lambda(A)$ puis trouver une famille libre de bon cardinal.

Exercice 3

On reprend la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$. D'après l'exemple précédent, le vecteur $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre 2. Déterminons, deux deux façons différentes, une base de $E_2(A)$.

II. Recherche des valeurs propres

Proposition 2.1 — Caractérisation des valeurs propres

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

$$\begin{aligned}(\lambda \text{ est valeur propre de } A) &\Longleftrightarrow \ker(A-\lambda I_n) \neq \{0_{n,1}\} \\ &\Longleftrightarrow \operatorname{rg}(A-\lambda I_n) \neq n \\ &\Longleftrightarrow (A-\lambda I_n \text{ n'est pas inversible })\end{aligned}$$

Retenir

0 est valeur propre de A si et seulement si $A-\lambda I_n$ n'est pas inversible.

Méthode :

Pour déterminer les valeurs propres de A :

1. si A est triangulaire (ou diagonale), alors ses valeurs propres sont ses coefficients diagonaux ;
2. si $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, alors on utilise le déterminant pour trouver les réels λ tels que $A-\lambda I_2$ n'est pas inversible ;
3. sinon, on utilise l'algorithme du pivot de Gauss pour trouver les réels λ tels que $\operatorname{rg}(A-\lambda I_n)$ n'est pas maximal (on se ramène au rang d'une matrice triangulaire).

Exercice 4

Déterminer le spectre des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Proposition 2.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Alors $\operatorname{Sp}(A) = \operatorname{Sp}\left({}^tA\right)$.

En effet :

Polynôme annulateur

Définition 2.3

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $P \in \mathbb{R}[X]$.
On dit que P est un polynôme annulateur de A lorsque :

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

1. Montrons que le polynôme $P(X) = X^2 - X - 2$ est annulateur de A.
2. En déduire que A est inversible et donner A^{-1}.
3. Peut-on donner un autre polynôme annulateur de A ?

Proposition 2.4

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et P un polynôme. Alors,

- Si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et X vecteur propre associé à λ, alors $P(A)X = P(\lambda)X$.
- Toute valeur propre de A est racine de tout polynôme annulateur de A.
- Si P est un polynôme annulateur de A alors

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{x \in \mathbb{R} : P(x) = 0\}$$

Méthode :

Pour déterminer les valeurs propres de A :

Si l'énoncé fait apparaître un polynôme annulateur de A, alors :

- on cherche les racines de ce polynôme,
- pour chaque racine r trouvée :
  - soit on résout $AX = rX$, et si l'ensemble des solutions est non réduit au vecteur nul, alors r est valeur propre de A (sinon, r n'est pas valeur propre de A)
  - soit on justifie / on voit que la matrice $A - rI_n$ n'est pas inversible, et dans ce cas, r est valeur propre de A (sinon, r n'est pas valeur propre de A)
  - soit on trouve un vecteur non nul X tel que $AX = rX$, et dans ce cas, r est valeur propre de A.

Exercice 6

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 4 & -8 & 5 \end{pmatrix}$ et on admet que $A^3 - 5A^2 + 8A - 4I_3 = 0_3$.
Déterminer les valeurs propres de A ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre associé.

Remarque :

On dira toujours **UN** polynôme annulateur, car s'il en existe un, il y en a une infinité : En effet si $P \in \mathbb{R}_[X]$ annule A,

Attention:

Toutes les racines d'un polynôme annulateur n'est pas forcément une valeur propre de A. En effet, si on reprend l'exercice précédent,

Exercice 7

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^2.
2. En déduire que $\mathrm{Sp}(A) = \emptyset$.

Type Concours

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $(A-I)^2$ puis $(A-I)^3$. En déduire un polynôme annulateur de A.
2. Déterminer le spectre de A.

Quelques cas particuliers

Voici quelques petites astuces pour déterminer, quand elles marchent, rapidement des valeurs propres :

- si A n'est pas inversible (donc si $\ker(A) \neq \{0_{n,1}\}$ ou si $\mathrm{rg}(A) \neq n$), alors 0 est valeur propre de A ;
- si la somme des coefficients de chacune des lignes de A est égale au même réel s, alors s est valeur propre de A et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ en est un vecteur propre associé ;
- puisque $\mathrm{Sp}\left({}^tA\right) = \mathrm{Sp}(A)$, si la somme des coefficients de chacune des colonnes de A est égale au même réel s, alors s est valeur propre de A (mais nous n'avons pas d'expression générale d'un vecteur propre associé) ;
- si A est carrée de taille n et que l'on connait déjà $n-1$ valeurs propres de A, alors la dernière s'obtient en soustrayant la somme des VP déjà trouvées à la somme des coefficients diagonaux de A (la trace de A).

Exercice 8

Déterminons les valeurs propres de la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -6 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ ainsi qu'une base de chaque sous-espace propre associé sans résoudre aucun système.

III. Réduction des matrices carrées

Définition 3.1 — matrice diagonalisable

On dit qu'une matrice A est **diagonalisable** si et seulement si il existe une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que :

Remarques :

R1 – Diagonaliser une matrice A c'est trouver une matrice D diagonale semblable à A. C'est faire une changement de base vers une base de vecteurs propres pour l'endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ canoniquement associé.

R2 – On peut écrire la relation $A = PDP^{-1}$ sous la forme

$$AP = PD$$

Si on note C_i la $i$ème colonne de P.

$$A(C_1C_2 \ldots C_n) = (C_1C_2 \ldots C_n)D$$

et on retrouve

$$AC_i = \lambda_i C_i$$

donc les C_i sont des vecteurs propres,

- P est une matrice de passage (souvent de la base canonique) vers une base de vecteurs propres.
- D est une matrice diagonale dont les éléments diagonaux sont les valeurs propres de A.

R3 – Les valeurs propres ne sont pas forcément distinctes dans la matrice D. En fait elles apparaissent autant de fois dans D que la valeur de dim (E_λ).

Proposition 3.2

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (A diagonalisable)$\Leftrightarrow$ (il existe une base de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ constitué des vecteurs propres de A)
- Si A possède n valeurs propres distinctes, alors A diagonalisable.
- On suppose que $Sp(A) = \{\lambda_1, ..., \lambda_p\}$ (valeurs propres distinctes). Alors

$$(A \text{ diagonalisable } \Leftrightarrow \left(\sum_{i=1}^{p} \text{dim } (E_{\lambda_i}(A))\right) = n$$

- Si A est diagonalisable avec une seule valeur propre, alors $A = \lambda I_n$.

Méthode :

Pour montrer qu'une matrice est diagonalisable :

1. On trouve les valeurs propres et les sous espaces propres associés à chacune des valeurs propres et on constate que la somme de leur dimension est égale à l'ordre de la matrice (c'est à dire la taille d'une matrice carrée). Cette méthode permet en pratique de calculer la matrice de passage et donc de diagonaliser la matrice A
2. Il suffit de constater qu'une matrice a autant de valeurs propres différentes que son ordre (c'est à dire la taille d'une matrice carrée). Cette méthode ne donne pas les vecteurs propres associées ni les valeurs propres.

Exercice 9

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$

1. Vérifier que $A^3 = A$.
2. Diagonaliser A.

Exercice 10

Montrer que les matrices suivantes sont diagonalisables et les réduire :

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 & 3 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Méthode :

Pour montrer qu'une matrice **n'est pas** diagonalisable :

Soit A une matrice n'ayant qu'une unique valeur propre λ. Alors la seule façon pour que la matrice A soit diagonalisable c'est que $A = \lambda I$, ce que est la plupart du temps faux (sinon la question n'est pas intéressante !)

Théorème 3.3

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est une matrice symétrique alors elle est diagonalisable.

Méthode :

Pour montrer qu'une matrice est diagonalisable : Il suffit de constater qu'une matrice est symétrique pour pouvoir affirmer qu'elle est diagonalisable (cette méthode ne donne ni les vecteurs propres ni les valeurs propres).

Exercice 11

La matrice suivante est-elle diagonalisable ?

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

IV. Hors-Programme : Transcription pour un endomorphisme

Dans toute le suite u désigne un endomorphisme de E un espace vectoriel (de dimension finie).

Définition 4.1

Soit λ un réel on dit que λ est une **valeur propre** de u si et seulement si il existe

Méthode :

Pour trouver les valeurs propres d'un endomorphisme : λ est une valeur propre de u si et seulement si $u - \lambda Id_E$ n'est pas .

Un cas particulier de la méthode précédente : $\lambda = 0$.

Méthode :

Si on constate qu'un endomorphisme u admet 0 pour valeur propre alors u n'est pas injective .

Définition 4.2 — Spectre

L'ensemble des valeurs propres d'un endomorphisme est nommé le .

Définition 4.3

Soit u un endomorphisme et λ une valeur propre de u

- $x \in$ est un **vecteur propre** associé à λ si et seulement si x est et
- Le **sous espace propre associé à** λ est

$$E_\lambda = \{x \in \quad / \quad \} = \mathrm{Ker}$$

Théorème 4.4 — liens avec les polynômes annulateurs

Soit u un endomorphisme de E et χ un polynôme annulateur de u (i.e. $\chi(u) = 0$)
Si λ est une valeur propre de u alors λ est forcément .

Attention:

La réciproque est fausse.

Proposition 4.5

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ Soit λ une valeur propre alors E_λ est un sous espace-vectoriel de .

Proposition 4.6 — Concaténation de familles de vecteurs propres

Soit $e_1, e_2, \ldots,\ e_p$ des vecteurs propres associés à la même valeur propre λ. On suppose de plus que $(e_1, e_2, \ldots, e_p)$ forment une famille .
Soit $f_1,\ f_2, \ldots\ f_n$ des vecteurs propres associés à la même valeur propre μ On suppose de plus que $(f_1, f_2, \ldots, f_n)$ forment une famille .

Alors forment une famille libre.

Définition 4.7

Diagonaliser un endomorphisme c'est trouver une base de vecteur propres.