Calculs directs

Exercice 1

Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres des matrices suivantes

1. $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
2. $A_2 = \begin{pmatrix} 5 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix}$
3. $A_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$
4. $A_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
5. $A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
6. $A_6 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 2

Saoit A la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer les valeurs propres et une base de chaque espace propre de A.
2. En déduire que A est diagonalisable.
3. En déduire une matrice P inversible et une matrice D diagonale telle que $P^{-1}AP = D$.

Exercice 3

Calculer les valeurs propres et les sous espaces propres associés pour chacune des matrices suivante

1. $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 4

Soit $M = \begin{pmatrix} -4 & -6 & 0 \\ 3 & 5 & 0 \\ 3 & 6 & 5 \end{pmatrix}$.

Chercher les valeurs propres et les vecteurs propres de M.
Diagonaliser M et en déduire une expression de M^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Utilisation d'un polynôme annulateur

Exercice 5

Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $\chi = X(X-1)(X-2)$

1. Montrer que χ est un polynôme annulateur de A.
2. En déduire les valeurs propres possibles de A
3. Calculer les sous espaces propres associé à chacune des valeurs propres.

Exercice 6

Soit $U = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

1. Calculer U^2 et exprimer cette matrice comme combinaison linéaire de U et I.
2. En déduire un polynôme annulateur de U.
3. Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres associés.

Exercice 7

On pose

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer T^2, T^3...
2. En déduire un polynôme annulateur de T.
3. Quelles sont les valeurs propres possibles de T ? La matrice peut elle être diagonalisable.
4. Trouver les valeurs propres et les sous espaces propres associés de la matrice

Exercice 8

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $(X-1)(X+1)$ est un polynôme annulateur de A.
2. Trouver une matrice P inversible et une matrice Δ diagonale telles $A = PDP^{-1}$

Exercice 9

On pose

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

1. Calculer B^2 est exprimer cette matrice comme combinaison linéaire de B et I_3.
2. Quelle sont les valeurs propres possibles de B ? est elle diagonalisable ?
3. Calculer Les sous espaces propres associés aux valeurs propres trouvées.

Autres calculs

Exercice 10

Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}$

1. Montrer que A et B sont diagonalisables.
2. AB est elle diagonalisable ?

Exercice 11

Soit A une matrice carrée de taille n tel que

$$A^3 + A^2 + A + I_n = 0$$

1. Montrer que les valeurs propres de A sont racines de
$$X^3 + X^2 + X + 1$$
2. En déduire que A est inversible.

Exercice 12

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ calculer $A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2$. En déduire une CNS pour l'existence de A^{-1}.

Exercice 13

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 6 & -5 & 6 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$

1. Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, il existe un réel a_n tel que
$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2a_n & 1-2a_n & 2a_n \\ a_n & -a_n & a_n+1 \end{pmatrix}$.
2. Montrer que la suite a est arithmético-géométrique.
3. En déduire a_n en fonction de n puis donner l'expression A^n en fonction de n

Exercice 14

Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ distincts, et $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ telle que $f(P) = R$. où R est le reste de la division euclidienne de X^3P par $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$.

1. Montrer que cette application est un endomorphisme.
2. Chercher les valeurs et les vecteurs propres de φ.

Problèmes

Exercice 15 — EDHEC 2001

E désigne un espace vectoriel réel sur $\mathbb{R}$, rapporté à sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
On désigne par a un réel non nul et on considère l'endomorphisme f_a de E, défini par :

$$f_a(e_2) = 0 \quad f_a(e_1) = f_a(e_3) = ae_1 + e_2 - ae_3$$

1. (a) Écrire la matrice A_a de f_a relativement à la base $\mathcal{B}$ et calculer A_a^2.
   (b) Montrer que 0 est la seule valeur propre de A_a.
   (c) A_a est-elle diagonalisable ? Est-elle inversible ?
2. On pose $u_1 = ae_1 + e_2 - ae_3$.

(a) Montrer que $\mathcal{B}' = (u_1, e_2, e_3)$ est une base de E

(b) Vérifier que la matrice de f_a relativement à la base $\mathcal{B}'$ est $K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dans la suite, on cherche à caractériser les endomorphismes g de E tels que $g \circ g = f_a$.

3. On suppose qu'un tel endomorphisme g existe et on note M sa matrice dans $\mathcal{B}'$.
   (a) Expliquer pourquoi $M^2 = K$ puis montrer que $MK = KM$.
   (b) Déduire de ces deux relations que $M = \begin{pmatrix} 0 & x & y \\ 0 & 0 & z \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, x, y et z étant 3 réels tels que $xz = 1$.
4. Réciproquement, vérifier que tout endomorphisme g dont la matrice dans $\mathcal{B}'$ est du type ci-dessus est solution de $g \circ g = f_a$.

Exercice 16 — EML 1994

On considère la matrice $A(a)$ de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivante : $A(a) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & a^2 \\ 0 & 0 & a^2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer les valeurs propres de $A(a)$, pour $a \in \mathbb{R}$.
2. Etudier suivant les valeurs du réels a, l'inversibilité de $A(a)$ dans $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
3. On suppose dans cette question 3. seulement : $a \neq 0$ et $a \neq 1$ et $a \neq -1$.
   (a) Montrer que $A(a)$ est diagonalisable.
   (b) Calculer, pour chacune des valeurs propres de A, un vecteur propre de $A(a)$ associé à cette valeur propre.
4. (a) La matrice $A(0)$ est-elle diagonalisable ?
   (b) calculer $(A(0))^2$, $(A(0))^3$, et $(A(0))^n$ pour tout entier naturel n non nul.

Exercice 17 — EML 1996

On considère les matrices carrées réelles d'ordre 3 suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer A^2 et exprimer J comme combinaison linéaire de I et A^2
2. (a) Calculer les valeurs propres de A (on trouvera trois réels λ_1, λ_2 et λ_3 que l'on rangera de sorte que $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$.
   (b) Pour chaque entier k de $\{1, 2, 3\}$, calculer un vecteur propre X_k associé à la valeur propre λ_k de A, tel que l'élément de la première ligne de X_k soit égal à 1.
   (c) En déduire une matrice carrée réelle P d'ordre 3, inversible, de pemière ligne égale à $(1, 1, 1)$ telle qu'en notant $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$, on ait $A = PDP^{-1}$.
3. Soient a, b et c des réels et $M = \begin{pmatrix} a & b & c \\ b & a+c & b \\ c & b & a \end{pmatrix}$.
   (a) Exprimer M comme combinaison linéaire de I, A et J, puis comme combinaison linéaire de I, A et A^2.
   (b) En déduire une matrice diagonale réelle Δ d'odre 3 telle que $M = P\Delta P^{-1}$, où P est la matrice obtenue à la question 2.c.

Exercice 18 — EDHEC 1999

Soit a un réel positif ou nul. On considère la matrice

$$A(a) = \begin{pmatrix} 1 & a-2 & a & 1 \\ a & -1 & 1 & a \\ 0 & 0 & -a & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que $A(0)$ admet 1 et -1 comme seules valeurs propres.
   Donner les sous-espaces propres correspondants.

Dans la suite, on suppose $a > 0$.

2. Montrer que les valeurs propres de $A(a)$ sont les réels λ solutions de l'une des équations :
$$\lambda^2 = (a-1)^2 \quad \text{et} \quad \lambda^2 + a\lambda + 1 = 0.$$
3. (a) Déduire de la question précédente la valeur de a pour laquelle $A(a)$ n'est pas inversible.
   (b) Pour cette valeur, dire si $A(a)$ est diagonalisable.
4. On suppose dans cette question que $a > 2$.
   (a) Montrer que $A(a)$ possède 4 valeurs propres distinctes deux à deux.
   (b) En déduire que $A(a)$ est diagonalisable.

Exercice 19 — EML 2001

On considère la matrice carrée réelle d'ordre quatre : $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, et l'endomorphisme f de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3, e_4)$ de $\mathbb{R}^4$ est A.

1. Montrer que A n'est pas inversible. En déduire que 0 est valeur propre de A.

2. (a) Calculer A^2, A^3, A^4.

(b) Etablir que 0 est la seule valeur propre de f.

(c) Déterminer la dimension du noyau de f.

(d) Est-ce que f est diagonalisable ?

3. On note $\varepsilon_1 = e_1$, $\varepsilon_2 = f(\varepsilon_1), \varepsilon_3 = f(\varepsilon_2), \varepsilon_4 = f(\varepsilon_3)$, et $\mathcal{C} = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4)$.

(a) Montrer que $\mathcal{C}$ est une base de $\mathbb{R}^4$.

(b) Déterminer la matrice N de f relativement à la base $\mathcal{C}$ de $\mathbb{R}^4$.

4. Existe-t-il un automorphisme g de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^4$ tel que $g \circ f \circ g^{-1} = f^2$?

Exercice 20

Partie 1 : Relations entre matrices.
On considère les matrices suivantes de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$:

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Calculer P^2 puis en déduire que P est inversible et la valeur de P^{-1}.

(b) Montrer que $P^{-1} \cdot J \cdot P$ et $P^{-1} \cdot K \cdot P$ sont diagonales.

(c) En déduire une matrice $D(\alpha, \beta)$ diagonale telle que $\alpha J + \beta K = P \cdot D(\alpha, \beta) \cdot P^{-1}$

Partie 2 : étude d'un mouvement aléatoire.
Dans cette partie, p désigne un réel de $[0, 1[$.
Les sommets d'un carré sont numérotés 1, 2, 3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2, le sommet 2 au sommet 3, le sommet 3 au sommet 4, le sommet 4 au sommet 1, les diagonales reliant le sommet 1 au sommet 3 ainsi que le sommet 2 au sommet 4.
Un pion se déplace sur les sommets du carré selon le protocole suivant :

— Le pion est sur le sommet 1 au départ.

— Lorsque le pion est à un instant donné sur un sommet du carré, il se déplace à l'instant suivant vers un sommet voisin(relié par un côté) avec la probabilité p ou vers un sommet opposé (relié par une diagonale) avec la probabilité $1 - 2p$.

On note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se trouve le pion à l'instant n. On a donc $X_0 = 1$.

1. (a) Ecrire la matrice A, carrée d'ordre 4, dont le terme situé à l'intersection de la $i^{ème}$ ligne et de la $j^{ème}$ colonne est égal à la probabilité conditionnelle $P_{X_n=j}(X_{n+1} = i)$.

(b) Vérifier que A s'écrit comme combinaison linéaire de J et K. (i.e qu'il existe des réels α et β telq que $A = \alpha J + \beta K$)

2. Pour tout entier n de $\mathbb{N}$, on pose $C_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \\ P(X_n = 3) \\ P(X_n = 4) \end{pmatrix}$.

(a) Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que $C_{n+1} = AC_n$.

(b) En déduire que $C_n = \frac{1}{4} P \cdot D(p, 1 - 2p)^n PC_0$, où $D(p, 1 - 2p)$ est la matrice trouvée au 1c puis donner la loi de probabilité de X_n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

Exercice 21

On considère un paramètre réel m, et les matrices suivantes :

$$A_m = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2+m & 2+m \\ -2 & -2-m & -2-m \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que A_m^2 et A_m^3 ne dépendent plus de m, et vérifier que : $A_m^3 = 2.A_m^2$.

(b) Montrer que $X^3 - 2X^2$ est un polynôme annulateur de A_m et en déduire que : $S_p(A_m) \subset \{0, 2\}$.

2. Dans cette série de questions on étudie le cas $m = 0$ et on cherche à diagonaliser A_0.

(a) Montrer que les réels 0 et 2 sont bien valeurs propres de A_0.

(b) Déterminer une base de chacun des deux sous-espaces propres de A_0.

(c) Montrer que A_0 est diagonalisable, et donner une matrice carrée inversible Q et une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix}$ telles que $A_0 = QDQ^{-1}$.

(d) Montrer l'existence de deux réels a et b tels que $A_0^2 = aA_0 + bI_3$.

3. Dans cette série de questions, on suppose que le paramètre m est <u>non nul</u>.
On note $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f_m l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice relativement à $\mathcal{B}$ est A_m.

    (a) Montrer que les réels 0 et 2 sont bien valeurs propres de f_m .

    (b) Déterminer une base de chacun des deux sous-espaces propres de f_m .
    La matrice A_m est-elle diagonalisable ?

    (c) On pose les vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $u = e_1 - e_2 = (1, -1, 0)$; $v = f_m(u)$
    $w = e_1 + e_2 - e_3 = (1, 1, -1)$.. Calculer v, $f_m(v)$ et $f_m(w)$.

    (d) Montrer que la famille (u, v, w) est une base de $\mathbb{R}^3$ et former la matrice de l'endomorphisme f_m relativement à cette base.

    (e) En déduire une matrice carrée inversible P_m telle que $P_m^{-1} A_m P_m = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

    (f) Existe-t-il des réels c et d tels que $A_m^2 = cA_m + dI_3$?

Exercice 22

Dans cet exercice, on étudie la diagonalisation des matrices carrées d'ordre 3 antisymétriques (c'est à dire vérifiant ${}^tA = -A$).
On étudie d'abord un cas particulier avant de passer au cas général.

Partie A

1. On désigne par E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$. On note 0_E l'élément nul de $\mathbb{R}^3$.
On rappelle que toute famille libre de trois vecteurs de E est une base de E.
Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$ représenté par A dans la base $\mathcal{B}$.
Soit $\mathcal{U} = (u_1, u_2, u_3)$ où $u_1 = -2e_1 + e_2 + 2e_3$, $u_2 = e_1 + 2e_2$ et $u_3 = f(u_2)$.

    (a) Déterminer le noyau de f et en donner une base.

    (b) Montrer que $\mathcal{U}$ est une base de E et déterminer la matrice B représentant f dans cette base.

2. Soit λ un réel non nul.
Montrer que pour tout vecteur x de E, [$f(x) = \lambda x$] équivaut à [$x = 0_E$].
On pourra utiliser la décomposition de x dans $\mathcal{U}$.

3. (a) Quel est finalement l'ensemble des valeurs propres de A ?

    (b) La matrice A est-elle diagonalisable ?

Partie B

Soient a, b et c trois réels donnés. On pose $a^2 + b^2 + c^2 = s$ et on suppose $s \neq 0$.
On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{pmatrix}$ et g l'endomorphisme de E représenté par M dans la base $\mathcal{B}$.

1. (a) Calculer M^2 et M^3.

    (b) Vérifier que M^3 s'exprime simplement en fonction de M et s.

2. Montrer que si le réel λ est valeur propre de g alors λ est nécessairement nul. On utilisera la relation trouvée ci dessus.

3. Montrer que l'hypothèse "M est inversible" conduit à une contradiction.

4. (a) Quel est finalement l'ensemble des valeurs propres de M ?

    (b) La matrice M est-elle diagonalisable ?

Exercice 23 — HEC III 2003

1. Soit a et b deux réels strictement positifs et A la matrice carré d'ordre 2 définie par : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$.

    (a) Montrer que si a et b sont égaux, la matrice A n'est pas inversible.

    (b) Calculer la matrice $A^2 - 2aA$. En déduire que, si a et b sont distincts, la matrice A est inversible et donner la matrice A^{-1}.

    (c) Montrer que les valeurs propres de A sont $a + b$ et $a - b$.

    (d) On pose $\Delta = \begin{pmatrix} a + b & 0 \\ 0 & a - b \end{pmatrix}$. Déterminer une matrice Q, carrée d'ordre 2 à coefficients réels, inversible et dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, vérifiant $A = Q\Delta Q^{-1}$.

    (e) Calculer la matrice Q^{-1} et, à l'aide de la question précédente, calculer la matrice A^n pour tout entier naturel non nul n.

2. Soit p un réel vérifiant $0 < p < 1$ et q le réel $1 - p$. On suppose que X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$, indépendantes et suivant la même loi géométrique de paramètre p.
Pour tout ω de Ω, on désigne par $M(\omega)$ la matrice carrée d'ordre 2 : $\begin{pmatrix} X(\omega) & Y(\omega) \\ Y(\omega) & X(\omega) \end{pmatrix}$
et on note $S(\omega)$ (respectivement $D(\omega)$) la plus grande (respectivement la plus petite) valeur propre de $M(\omega)$ et on définit ainsi deux variables aléatoires sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

    (a) Montrer que la probabilité de l'événement $[X = Y]$ est donnée par : $\mathrm{P}([X = Y]) = \dfrac{p}{2 - p}$ et en déduire la probabilité de l'événement $\{\omega \in \Omega \ ; \ M(\omega) \text{ est inversible}\}$.

(b) Calculer la covariance des variables aléatoires S et D.

(c) Calculer les probabilités $P([S=2]\cap[D=0])$, $P([S=2])$ et $P([D=0])$.
Les variables aléatoires S et D sont-elles indépendantes ?

(d) Établir, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 : $P([S=n])=(n-1)p^2q^{n-2}$.

(e) En déduire, lorsque p est égal à $\frac{2}{21}$, que la valeur la plus probable de la plus grande valeur propre des matrices $M(\omega)$ possibles est 11.

Exercice 24 — Écrit HEC

Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice ${}^tM$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de M.
On identifie les ensembles $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en assimilant une matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.
On note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}_p$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Si $M\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N\in\mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ $(q\in\mathbb{N}^*)$, *on admet* que ${}^t(MN)={}^t\,N\,{}^tM$.

1. Soit X une matrice colonne non nulle donnée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes $x_1,x_2,\dots,x_n$ dans la base $\mathcal{B}_n$.
On pose : $A=X\,{}^tX$ et $\alpha={}^t\,XX$.
   (a) Exprimer A et α en fonction de $x_1,x_2,\dots,x_n$. Justifier que la matrice A est diagonalisable.
   (b) Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice A dans la base $\mathcal{B}_n$.
   Déterminer Imf et Ker$f$; donner une base de Imf et préciser la dimension de $Kerf$.
   (c) Calculer la matrice AX. Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.
2. On suppose que n et p vérifient $1\leqslant p\leqslant n$. Soit $(V_1,V_2,\dots,V_p)$ une famille libre de p vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.
On note V la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, $V_1,V_2,\dots,V_p$.
Soit g l'application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice V dans les bases $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$.
   (a) Justifier que le rang de V est égal à p. Déterminer Ker$g$.
   (b) Soit Y une matrice colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer que l'on a $VY=0$ si et seulement si l'on a ${}^tVVY=0$.
   (c) En déduire que la matrice ${}^tVV$ est inversible.

Exercice 25 — Oral HEC

$\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique (i,j,k).
Soit f et g deux endomorphismes tels que $f\circ g=g\circ f$.

1. *Le résultat de cette question pourra être admis dans un premier temps.*
Montrer que si x est un vecteur propre de f associé à une valeur propre λ dont l'espace propre est de dimension 1, alors il est vecteur propre de g.
2. Soit $A=\begin{pmatrix}3&1&-1\\-1&3&1\\0&2&2\end{pmatrix}$ la matrice de f dans (i,j,k).
On pose $e_1=i+k$, $e_2=\frac{1}{2}(i+j)$, $e_3=j+k$ et $\mathcal{B}=(e_1,e_2,e_3)$.
Montrer que $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^3$ et donner la matrice de f dans $\mathcal{B}$.
3. On cherche la forme de la matrice de g dans $\mathcal{B}$.
Montrer l'existence de 2 réels a et c tels que $g(e_1)=a.e_1$ et $g(e_3)=c.e_3$.
Montrer que $u=g(e_2)-a.e_2$ est un vecteur propre de f.
En déduire la forme de la matrice de g dans $\mathcal{B}$.
4. Réciproquement, si g a pour matrice $\begin{pmatrix}a&b&0\\0&a&0\\0&0&c\end{pmatrix}$ dans $\mathcal{B}$, f et g commutent-ils ?
5. Trouver la forme générale des matrices M qui commutent avec A.

Exercice 26 — Questions courtes d'algèbre

1. Soit $f\in\mathcal{L}(E)$, avec E de dimension finie. On suppose que $f^2=f$. Montrer que f est diagonalisable.
2. A et B sont deux matrices semblables de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que A est inversible. La matrice B est-elle inversible ?
Prouver qu'il existe deux matrices X et Y de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $XY=A$ et $YX=B$.
Réciproquement, on suppose qu'il existe deux matrices X et Y de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, telles que $XY=A$ et $YX=B$, prouver que A et B sont semblables.
3. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ tel que $f^4=f^2$ et dont 1 et -1 sont valeurs propres.
Montrer que f est diagonalisable.
4. Soit f et g deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie E.
   (a) Montrer que Dim $Im(f+g)\leqslant$ Dim Imf + Dim Img.
   (b) On suppose $f+g$ bijectif et $g\circ f=0$.
   Déterminer Dim Imf + Dim Img.

Exercice 27 — Oral HEC

1. Donner s'il en existe un exemple de trois vecteurs de $\mathbb{R}^2$ tels que deux quelconques d'entre eux soient linéairement indépendants. Existe-t-il un endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont ces trois vecteurs soient des vecteurs propres ?
2. Soit f un endomorphisme de $\mathbb{R}^n$ et $\mathcal{F}$ une famille de $n+1$ vecteurs propres de f s'il en existe.
   (a) $\mathcal{F}$ peut-elle être une famille libre ?
   (b) On suppose que toute sous-famille de n vecteurs de $\mathcal{F}$ est libre. Démontrer que les $n+1$ vecteurs propres associés respectivement aux $n+1$ vecteurs de $\mathcal{F}$ sont égales.
   Que peut-on en conclure pour f ?