Sujet HEC

E C G

Sujet de la semaine

Option économique

MATHEMATIQUES

4 novembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
Les questions précédées de (*) sont réservées aux cubes.

EXERCICE

1. **Étude d'une suite et programmation**
   On note $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ la suite réelle définie pour tout entier n strictement positif par :

$$c_n = \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx$$

   (a) Montrer que $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est une suite décroissante de réels positifs.

RÉPONSE:

Pour tout entier n non nul, la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{n-1}}{1+x}$ est continue et positive sur $[0,1]$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx$ est positive, ce qui signifie que c_n est un réel positif. D'autre part, on a :

$$c_{n+1} - c_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx - \int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^n - x^{n-1}}{1+x}dx = \int_0^1 \frac{x^{n-1}(x-1)}{1+x}dx.$$

Pour tout entier $n \geqslant 1$, la fonction $x \mapsto \dfrac{x^{n-1}(x-1)}{1+x}$ est continue et négative sur $[0,1]$ donc l'intégrale ci-dessus est négative donc $c_{n+1} - c_n \leqslant 0$ et la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ est décroissante.

* * *

   (b) Montrer que, pour tout entier n strictement positif, l'on a : $\quad c_{n+1} + c_n = \dfrac{1}{n}$

RÉPONSE:

$$c_{n+1}+c_n=\int_0^1 \frac{x^n}{1+x}dx+\int_0^1 \frac{x^{n-1}}{1+x}dx=\int_0^1 \frac{x^n+x^{n-1}}{1+x}dx=\int_0^1 \frac{x^{n-1}(x+1)}{1+x}dx=\int_0^1 x^{n-1}dx=\left[\frac{x^n}{n}\right]_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{n}. \quad (1)$$

* * *

(c) Établir, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, la double inégalité :

$$\frac{1}{n}\leqslant 2c_n\leqslant \frac{1}{n-1}$$

En déduire un équivalent simple de c_n quand n tend vers l'infini.

RÉPONSE:

Puisque c_n est positif , la relation de récurrence montre que

$$c_n=\frac{1}{n}-c_{n+1}\leqslant \frac{1}{n}.$$

La relation de récurrence (1) combinée à la décroissance de la suite $(c_n)_{n\geqslant 1}$ (cf. question ??) nous fournissent les encadrement suivants :

$$\forall n\geqslant 1,\quad 2c_{n+1}\leqslant c_n+c_{n+1}\leqslant 2c_n \Leftrightarrow 2c_{n+1}\leqslant \frac{1}{n}\leqslant 2c_n.$$

En particulier, la seconde inégalité nous donne $\forall n\geqslant 1,\quad \frac{1}{n}\leqslant 2c_n$ et en remplaçant n par $n-1$ dans la première inégalité, on obtient $\forall n\geqslant 2,\quad 2c_n\leqslant \frac{1}{n-1}$ donc

$$\forall n\geqslant 2,\quad \frac{1}{n}\leqslant 2c_n\leqslant \frac{1}{n-1}.$$

En multipliant par n de part et d'autre de cet encadrement, on obtient

$$1\leqslant 2nc_n\leqslant \frac{n}{n-1}.$$

Puisque $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n}{n-1}=1$, l'application du théorème d'encadrement montre que

$$\lim_{n\to+\infty} 2nc_n=1\Leftrightarrow 2nc_n\underset{n\to+\infty}{\sim}1\Leftrightarrow c_n\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{2n}.$$

* * *

(d) Calculer c_1 et prouver, pour tout entier n supérieur ou égal à 2, l'égalité :

$$c_n=(-1)^n\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}-\ln 2\right)$$

RÉPONSE:

$$c_1=\int_0^1 \frac{dx}{1+x}=[\ln(1+x)]_{x=0}^{x=1}=\ln 2-\ln 1=\ln 2.$$

On pose $(\mathcal{H}_n) : c_n=(-1)^n\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+1}}{k}-\ln 2\right)$.

Initialisation *:* $(\mathcal{H}_2)$ *est vraie car, la relation de récurrence de la suite* (c_n) *nous donne*

$$c_2 = \frac{1}{1} - c_1 = 1 - \ln 2 \text{ et } (-1)^2 \left(\sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right) = \frac{(-1)^2}{1} - \ln 2 = 1 - \ln 2$$

Hérédité *: Supposons que* $(\mathcal{H}_n)$ *est vraie i.e. "* $c_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right)$ *". On a*

$$c_{n+1} = \frac{1}{n} - c_n = \frac{1}{n} - (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right) = \frac{1}{n} + (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - (-1)^{n+1} \ln 2.$$

D'autre part, la relation de Chasles montre que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{(-1)^{n+1}}{n} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \Rightarrow (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} = \frac{1}{n} + (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

donc

$$c_{n+1} = (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - (-1)^{n+1} \ln 2 = (-1)^{n+1} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right),$$

ce qui démontre que $(\mathcal{H}_{n+1})$ *est vraie.*

Conclusion *:* $\forall n \geqslant 2, \quad (\mathcal{H}_n)$ *est vraie i.e.* $\forall n \geqslant 2, \quad c_n = (-1)^n \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k} - \ln 2 \right)$.

* * *

(e) Écrire un programme en Python qui, pour une valeur d'un entier n strictement positif entrée par l'utilisateur, calcule et affiche la valeur de c_n.

RÉPONSE:

```python
n=int(input('Donner un entier naturel'))
s=0
for k in range(1,n):
        s=s+(-1)**(k+1)/k
c=((-1)**n)*(s-np.log(2))
print('c=',c)
```

* * *

2. Pour les cubes - Étude d'une suite de variables aléatoires à densité

Pour tout entier n strictement positif, on note f_n l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f_n(t) = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad t < 1 \\ \dfrac{1}{c_n\, t^n (1+t)} & \text{si} \quad t \geqslant 1 \end{cases}$$

(a) À l'aide d'un changement de variable, établir pour tout entier n strictement positif et pour tout réel x supérieur ou égal à 1, l'égalité :

$$\int_1^x \frac{1}{t^n(1+t)}\, dt = \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}\, du$$

RÉPONSE:

En considérant les bornes des deux intégrales, il faut un changement de variable qui transforme le segment $[1,x]$ *en* $[1,\frac{1}{x}]$. *On pense naturellement au changement de variable* $u=\frac{1}{t}$. *Si* $t=1$ *alors* $u=1$ *et si* $t=x$ *alors* $u=\frac{1}{x}$. *D'autre part, on a* $t=\frac{1}{u}$ *donc* $dt=-\frac{du}{u^2}$, *ce qui nous donne*

$$\int_1^x \frac{dt}{t^n(1+t)} = \int_1^{1/x} -\frac{\frac{du}{u^2}}{\frac{1}{u^n}(1+\frac{1}{u})} = -\int_1^{1/x} \frac{u^{n-1}}{1+u}du = \int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}du. \tag{2}$$

$***$

(b) En déduire que, pour tout entier n strictement positif, f_n est une densité de probabilité. Dans la suite de l'exercice, on suppose que $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^\times}$ est une suite de variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathbf{P})$, telle que, pour tout entier n strictement positif, X_n prend ses valeurs dans $[1,+\infty[$ et admet f_n comme densité. On note F_n la fonction de répartition de X_n.

RÉPONSE:

Puisque la fonction $u\mapsto \frac{u^{n-1}}{1+u}$ *est continue sur* $[0,1]$ *donc la fonction* $x\mapsto \int_x^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}du$ *existe et est continue sur* $[0,1]$. *En particulier,*

$$\lim_{x\to 0^+}\int_x^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}du = \int_0^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}du = c_n \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\int_{1/x}^1 \frac{u^{n-1}}{1+u}du = c_n \Leftrightarrow \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{dt}{t^n(1+t)} = c_n.$$

La fonction $t\mapsto \frac{1}{t^n(1+t)}$ *étant continue et positive sur* $[1,+\infty[$, *cette fonction est intégrable sur* $[1,+\infty[$ *si et seulement* $\lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{dt}{t^n(1+t)}$ *existe, ce qui notre cas. Par conséquent, la fonction* f_n *est intégrable sur* $\mathbb{R}$ *et on a*

$$\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^n(1+t)} = \lim_{x\to+\infty}\int_1^x \frac{dt}{t^n(1+t)} = c_n \Rightarrow \int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)dt = \frac{1}{c_n}\int_1^{+\infty}\frac{dt}{t^n(1+t)} = \frac{c_n}{c_n} = 1.$$

donc f_n *est bien une densité de probabilité.*

$***$

(c) Pour quelles valeurs de n la variable aléatoire X_n admet-elle une espérance ? Dans le cas où l'espérance de X_n existe, calculer cette espérance en fonction de c_n et de c_{n-1}.

RÉPONSE:

La variable X_n *admet une espérance si et seulement si la fonction* $x\mapsto xf_n(x)$ *est intégrable sur* $\mathbb{R}$, *c'est-à-dire que la fonction* $x\mapsto \frac{x}{x^n(1+x)} = \frac{1}{x^{n-1}(1+x)}$ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$. *C'est une fonction continue et positive sur* $[1,+\infty[$ *et* $\frac{1}{x^{n-1}(1+x)} \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{1}{x^n}$. *La fonction* $x\mapsto\frac{1}{x^n}$ *est intégrable sur* $[1,+\infty[$ *si et seulement si* $n>1$, *c'est-à-dire que* $n\geqslant 2$ *donc la fonction* $x\mapsto \frac{1}{x^{n-1}(1+x)}$ *est intégrable si et seulement si* $n\geqslant 2$. *Par conséquent,*

X_n admet une densité si et seulement si $n \geqslant 2$. Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} E(X_n) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_n(x)dx = \frac{1}{c_n}\int_1^{+\infty} \frac{x}{x^n(1+x)}dx = \frac{1}{c_n}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{x^{n-1}(1+x)} \\ &= \frac{c_{n-1}}{c_n}\int_1^{+\infty}\frac{dx}{c_{n-1}x^{n-1}(1+x)} = \frac{c_{n-1}}{c_n}\int_{-\infty}^{+\infty} f_{n-1}(x)dx = \frac{c_{n-1}}{c_n}. \end{aligned}$$

* * *

(d) Dans cette question, exclusivement, on suppose que n est égal à 1. Préciser la fonction F_1. En déduire l'ensemble des réels y vérifiant $\mathbf{P}([X_1 \leqslant y]) \geqslant \frac{1}{2}$ Déterminer une densité de la variable aléatoire $Z = \ln(X_1)$.

RÉPONSE:

De façon évidente, si $x < 1$, $F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)dt = 0$. Si $x \geqslant 1$, puisque $c_1 = \ln 2$

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x} f_1(t)dt = \int_1^x f_1(t)dt = \frac{1}{\ln 2}\int_1^x \frac{dt}{t(1+t)}.$$

On utilise ensuite l'égalité (2) pour $n = 1$ donc

$$\forall x \geqslant 1, \quad F_1(x) = \frac{1}{\ln 2}\int_{1/x}^{1}\frac{du}{1+u} = \frac{1}{\ln 2}\left[\ln(1+u)\right]_{u=1/x}^{u=1} = \frac{1}{\ln 2}\left(\ln 2 - \ln(1+\frac{1}{x})\right) = 1 - \frac{\ln(1+\frac{1}{x})}{\ln 2}.$$

Ainsi, puisque $P(X_1 \leqslant y) = F_1(y)$ donc, en utilisant que $\ln 2 > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} P(X_1 &\leqslant y) \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 - \frac{\ln(1+\frac{1}{y})}{\ln 2} \geqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{\ln(1+\frac{1}{y})}{\ln 2} \leqslant \frac{1}{2} \Leftrightarrow \ln(1+\frac{1}{y}) \leqslant \frac{1}{2}\ln 2 = \ln\sqrt{2} \\ \Leftrightarrow &\quad 1 + \frac{1}{y} \leqslant \sqrt{2} \Leftrightarrow \frac{1}{y} \leqslant \sqrt{2}-1 \Leftrightarrow y \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}-1} = \frac{\sqrt{2}+1}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)} = \sqrt{2}+1. \end{aligned}$$

Pour déterminer une densité de Z, il suffit de calculer sa fonction de répartition. Pour commencer, nous avons l'égalité

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(Z \leqslant x) = P(\ln X_1 \leqslant x) = P(X_1 \leqslant e^x) = F_1(e^x)$$

et, puisque $e^x > 0$, on en déduit que $P(Z \leqslant x) = 0$ si $e^x < 1$, c'est-à-dire que $x < 0$. Si $x \geqslant 0$, alors $e^x \geqslant 1$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad P(Z \leqslant x) = F_1(e^x) = 1 - \frac{\ln(1+\frac{1}{e^x})}{\ln 2} = 1 - \frac{\ln(1+e^{-x})}{\ln 2}.$$

En résumé, on a :

$$P(Z \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{\ln(1+e^{-x})}{\ln 2} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}.$$

Puisque $x \mapsto P(Z \leqslant x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}^\times$ et, en utilisant que $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ et $(e^u)' = u'e^u$), sa dérivée sur $\mathbb{R}^\times$ est

$$\forall x < 0, \quad (P(Z \leqslant x))' = 0 \text{ et } \forall x > 0, \quad (P(Z \leqslant x))' = -\frac{1}{\ln 2} \times \frac{-e^{-x}}{1+e^{-x}} = \frac{1}{\ln 2} \times \frac{1}{e^x + 1}.$$

Nous pouvons choisir comme densité de Z la fonction

$$x \mapsto \left\{ \begin{array}{cc} 0 & \textit{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{\ln 2} \times \dfrac{1}{e^x + 1} & \textit{si } x \geqslant 0 \end{array} \right. .$$

$* * *$

(e) Soit x un réel strictement supérieur à 1.
Justifier l'encadrement :

$$0 \leqslant \int_{1/x}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} du \leqslant \frac{1}{n+1}$$

En déduire la limite suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\int_{1/x}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} du \right).$$

Transformer, pour tout entier naturel n non nul, $F_n(x)$ à l'aide d'une intégration par parties et en déduire l'égalité suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 1.$$

RÉPONSE:

Pour tout réel $x \geqslant 1$, $\dfrac{1}{x} \in]0, 1]$ donc l'intervalle $[\dfrac{1}{x}, 1]$ est inclu dans $[0, 1]$. La positivité de la fonction $u \mapsto \dfrac{u^n}{(1+u)^2}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ et le fait que

$$\forall u \in [0, 1], \quad \frac{1}{(1+u)^2} \leqslant 1 \Rightarrow \frac{u^n}{(1+u)^2} \leqslant u^n.$$

montrent que

$$0 \leqslant \int_{1/x}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} du \leqslant \int_{1/x}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} du + \int_{0}^{1/x} \frac{u^n}{(1+u)^2} du = \int_{0}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} du \leqslant \int_{0}^{1} u^n du = \left[\frac{u^{n+1}}{n+1} \right]_{u=0}^{u=1} = \frac{1}{n+1}.$$

Puisque nous disposons de l'encadrement ci-dessus et que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, le théorème d'encadrement montre que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_{1/x}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} du = 0.$$

Pour $x > 1$, en utilisant l'égalité (2) montre que

$$F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t) dt = \int_{1}^{x} f_n(t) dt = \frac{1}{c_n} \int_{1}^{x} \frac{dt}{t^n(1+t)} = \frac{1}{c_n} \int_{1/x}^{1} \frac{u^{n-1}}{1+u} du.$$

Pour l'intégration par partie, il suffit de dériver $u \mapsto \dfrac{1}{1+u}$ et d'intégrer $u \mapsto u^{n-1}$. $\left\{ \begin{array}{l} \alpha = \dfrac{1}{1+u} \\ \beta' = u^{n-1} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{r} \alpha' = -\dfrac{1}{(1+u)^2} \\ \beta' = \dfrac{u^n}{n} \end{array} \right.$

donc

$$\int_{1/x}^{1} \frac{u^{n-1}}{1+u} du = \left[\frac{u^n}{n} \times \frac{1}{1+u} \right]_{u=1/x}^{u=1} - \int_{1/x}^{1} \frac{u^n}{n} \times \frac{-1}{(1+u)^2} du = \frac{1}{2n} - \frac{1}{nx^{n-1}(1+x)} + \frac{1}{n} \int_{1/x}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} du = .$$

Par conséquent, nous en déduisons l'égalité

$$F_n(x) = \frac{1}{2nc_n} - \frac{1}{nc_n} \times \frac{1}{x^{n-1}(1+x)} + \frac{1}{nc_n} \int_{1/x}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} du.$$

Nous avons montré lors de la question 1c que $\lim\limits_{n \to +\infty} nc_n = \frac{1}{2}$. *Puisque* $x > 1$, *la suite* $\left(\frac{1}{x^{n-1}(1+x)}\right)_n$ *tend vers* 0 *et la suite* $\left(\int_{1/x}^{1} \frac{u^n}{(1+u)^2} du\right)_n$ *converge vers* 0 *donc*

$$\lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 1 - 2 \times 0 + 2 \times 0 = 1.$$

$* * *$

(f) Que vaut $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x)$ si x est un réel inférieur ou égal à 1 ?
Montrer que la suite de variables aléatoires $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^\times}$ converge en loi vers une variable que l'on précisera.

RÉPONSE:

$$Si\ x \leqslant 1,\ F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)dt = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0 \ donc \ \lim_{n \to +\infty} F_n(x) = 0.$$

Soit X *la variable aléatoire définie sur* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *dont la fonction de répartition est* $F(x) = \begin{cases} 0 & si\ x \leqslant 1 \\ 1 & si\ x > 1 \end{cases}$. *Alors, pour tout réel* x, *on a* $\lim\limits_{n \to +\infty} F_n(x) = F(x)$, *ce qui signifie que la suite* $(X_n)_{n \geqslant 1}$ *converge en loi vers* X.
La variable X *est remarquable. En effet, si* a *et* b *sont inférieurs à* 1 *alors*

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a) = 0 - 0 = 0,$$

si a *et* b *sont supérieurs à* 1 *alors*

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a) = 1 - 1 = 0,$$

et si $a < 1$ *et* $b \geqslant 1$ *alors*

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = F(b) - F(a) = 1 - 0 = 1.$$

Si l'on considère une suite (a_n) *croissante convergeant vers* 1 *et* (b_n) *une suite décroissante convergeant vers* 1, *la famille l'évènement* $(a_n \leqslant X \leqslant b_n)$ *est décroissante donc*

$$1 = \lim_{n \to +\infty} P(a_n \leqslant X \leqslant b_n) = P(\bigcap_{n=0}^{+\infty} (a_n \leqslant X \leqslant b_n) = P(X = 1).$$

Cette variable X *prend donc presque surement la valeur* 1 *donc* $X = 1$ *au sens des probabilités !*

$* * *$

PROBLÈME

Dans ce problème, n désigne un entier naturel non nul et E désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients réels, de degré inférieur ou égal à $2n$.
Pour tout entier naturel non nul k, on note X^k le polynôme $x \mapsto x^k$ et on rappelle que la famille $(1, X, \ldots, X^{2n})$ est une base de E.
Si $a_0, a_1, \ldots, a_{2n}$ sont $2n+1$ réels et Q est le polynôme défini sur $\mathbb{R}$ par :

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k,$$

on définit le polynôme $s(Q)$ par :

$$s(Q)(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_{2n-k} x^k.$$

Autrement dit, $s(Q)$ est le polynôme obtenu à partir de Q en "inversant l'ordre des coefficients".
Par exemple, si n est égal à 2 et si $Q(x) = 4x^4 + 7x^3 + 2x^2 + 1$, on obtient $s(Q)(x) = x^4 + 2x^2 + 7x + 4$.
Les trois parties de ce problème sont largement indépendantes.

PARTIE A

1. **Linéarité de s**
   Montrer que l'application $s : Q \mapsto s(Q)$ est une application linéaire de E dans lui-même.

RÉPONSE:

Soient $P = \sum_{k=0}^{2n} p_k x^k, Q = \sum_{k=0}^{2n} q_k x^k \in E$ e$\lambda \in \mathbb{R}$ alors $P + \lambda Q = \sum_{k=0}^{2n} (p_k + \lambda q_k) x^k$ donc

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad s(P+Q)(x) = \sum_{k=0}^{2n} (p_{2n-k} + \lambda q_{2n-k}) x^k = \sum_{k=0}^{2n} p_{2n-k} x^k + \lambda \sum_{k=0}^{2n} q_{2n-k} x^k = s(P)(x) + \lambda s(Q)(x),$$

ce qui démontre que $s(P + \lambda Q) = s(P) + \lambda s(Q)$.

* * *

2. **Diagonalisation dans un cas particulier**

   (a) On considère la matrice carrée d'ordre 3 : $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

      i. (*) Justifier sans calcul que la matrice M est diagonalisable.
      ii. Déterminer les valeurs propres de M, c'est à dire les réels λ pour lesquels $M - \lambda I_3$ n'est pas inversible.
      iii. Pour chacune d'entre elles, donner une base du sous-espace propre associé.

RÉPONSE:

La matrice M est carrée et symétrique donc elle est diagonalisable. Déterminons ses valeurs propres. Le réel λ est une valeur propre de M si et seulement la matrice $M - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & -\lambda \end{pmatrix}$ est non inversible, ce qui *signifie que le système* $\begin{cases} -\lambda a + c = 0 \\ (1-\lambda)b = 0 \\ a - \lambda c = 0 \end{cases}$ *n'est pas de Cramer..*

$$\begin{cases} -\lambda a + c = 0 \\ (1-\lambda)b = 0 \\ a - \lambda c = 0 \end{cases} \underset{L_1 \leftrightarrow L_3}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a - \lambda c = 0 \\ (1-\lambda)b = 0 \\ -\lambda a + c = 0 \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + \lambda L_1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a & & -\lambda c & = 0 \\ & (1-\lambda)b & & = 0 \\ & & (1-\lambda^2)c = 0 & = 0 \end{cases}.$$

Ce dernier système étant carré et triangulaire, il n'est pas de Cramer si et seulement si l'un de ses coefficients diagonaux est nul, c'est-à-dire $1-\lambda = 0$ *ou* $(1-\lambda^2) = 0$, *ce qui signifie que* $\lambda = 1$ *ou* $\lambda = -1$.
Déterminons les espaces propres. Pour éviter les confusions, on évite d'utiliser les lettres X *et* x *(qui sont liées aux polynômes) pour les vecteurs et* x *pour les coordonnées (qui sont des éléments de* $\mathfrak{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

$$Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_{-1}(M) \Leftrightarrow (M+I)Y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a + c = 0 \\ 2b = 0 \\ a + c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -c \\ b = 0 \end{cases} \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

donc $E_{-1}(M) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$.

$$Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in E_{1}(M) \Leftrightarrow (M-I)Y = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} a - c = 0 \\ 0 = 0 \\ a - c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow (a = c) \Leftrightarrow Y = \begin{pmatrix} c \\ b \\ c \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $E_1(M) = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix})$. *De façon évidente, ces deux vecteurs ne sont pas proportionnels donc ils forment une famille libre de* $E_1(M)$. *On retrouve ainsi que* $\dim E_{-1}(M) + \dim E_1(M) = 3$ *donc* M *est diagonalisable.*

* * *

(b) Vérifier que, dans le cas particulier $n = 1$, M est la matrice de l'application linéaire s dans la base $(1, X, X^2)$. Donner alors une base de vecteurs propres pour s.

RÉPONSE:

* * *

3. **Etude du cas général**
On définit la famille de polynômes $(A_0, ..., A_{2n})$ par :

$$\text{pour tout r el } x, \quad \begin{cases} A_k(x) = & x^{2n-k} + x^k & \text{si} \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1 \\ A_n(x) = & x^n & \\ A_k(x) = & x^k - x^{2n-k} & \text{si} \quad n+1 \leqslant k \leqslant 2n \end{cases}$$

RÉPONSE:

Il suffit d'explciter l'image de la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$ *par* s

$$s(1) = s(\underline{1}.X^0 + 0.X^1 + \underline{0}.X^2) = 1.X^2 = X^2,$$
$$s(X) = s(0.X^0 + \underline{1}.X^1 + 0.X^2) = 1.X^1 = X,$$
$$s(X^2) = s(\underline{0}.X^0 + 0.X^1 + \underline{1}.X^2) = 1.X^0 = 1.$$

donc la matrice de s dans la base canonique est bien $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M$. *Par définition de la matrice d'une application linéaire, l'égalité* $M\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *est équivalente à l'égalité*

$$s(-1.1 + 0.X + 1.X^2) = -\left(-1.1 + 0.X + 1.X^2\right) \Leftrightarrow s(-1 + X^2) = -(-1 + X^2)$$

donc le polynôme $P_1 = -1 + X^2$ est un vecteur propre de s associé à la valeur propre -1 et il forme une base de cet espace propre. De même, si l'on pose $P_2 = 1.1 + 0.X + 1.X^2 = 1 + X^2$ et $P_3 = 0.1 + 1.X + 0.X^2 = X$, les polynômes P_2 et P_3 sont des vecteurs propres de s associés à la valeur propre 1 et ils forment une base de cet espace propre.

$* * *$

(a) Déterminer l'endomorphisme $s \circ s$.

RÉPONSE:

Soit $P = \sum_{k=0}^{2n} p_k X^k$ un élément de E.

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad (s \circ s)(P)(x) = s(s(P)(x)) = s\left(\sum_{k=0}^{2n} p_{2n-k} x^k\right) = \sum_{k=0}^{2n} p_{2n-(2n-k)} x^k = \sum_{k=0}^{2n} p_k x^k = P(x)$$

donc $s \circ s = \mathrm{Id}_E$.

$* * *$

(b) Soit P un polynôme non nul et λ un réel vérifiant $s(P) = \lambda P$.
Calculer $s \circ s(P)$ et en déduire que les valeurs propres de s appartiennent à $\{1, -1\}$.

RÉPONSE:

Si $s(P) = \lambda P$ alors $(s \circ s)(P) = s(s(P)) = s(\lambda P) = \lambda s(P) = \lambda^2 P$. Or $(s \circ s)(P) = \mathrm{Id}_E(P) = P$ donc $P = \lambda^2 P$ ce qui équivaut à $(1 - \lambda^2)P = 0$. Puisque P est un vecteur propre de s, il est non nul donc $1 - \lambda^2 = 0$, ce qui signifie que $\lambda \in \{-1, 1\}$.

$* * *$

(c) Déterminer $s(A_k)$ pour tout entier k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 2n$.

RÉPONSE:

Par définition de s, pour tout entier $k \in [\![0, 2n]\!]$, on a $s(X^k) = X^{2n-k}$, ce qui nous donne par linéarité de s :

- *Si $0 \leqslant k \leqslant n-1$, alors $s(A_k)(x) = s(x^{2n-k} + x^k) = s(x^{2n-k}) + s(x^k) = x^{2n-(2n-k)} + x^{2n-k} = x^k + x^{2n-k} = A_k(x)$*
- *Si $k = n$, alors $s(A_n)(x) = s(x^n) = x^{2n-n} = x^n = A_n(x)$*
- *Si $n+1 \leqslant k \leqslant 2n$, alors $s(A_k)(x) = s(x^{2n-k} - x^k) = s(x^{2n-k}) - s(x^k) = x^{2n-(2n-k)} - x^{2n-k} = x^k - x^{2n-k} = -A_k(x)$.*

$* * *$

(d) Montrer que la famille $(A_0, ..., A_{2n})$ est libre.

RÉPONSE:

Puisque la dimension de E est $2n+1$ et que la famille $(A_k)_{0\leqslant k\leqslant 2n}$ est de cardinal $2n+1$, il suffit de montrer qu'il s'agit d'une famille libre. Soient $(a_0,..,a_{2n})$ une famille de réels tels que $\sum_{k=0}^{2n} a_n A_n = 0$. Or nous avons les égalités suivantes

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2n} a_n A_n &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k A_k + a_n A_n + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k A_k = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (X^k + X^{2n-k}) + a_n X^n + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k (X^k - X^{2n-k}) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^{2n-k} + a_n X^n + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k X^k - \sum_{k=n+1}^{2n} a_k X^{2n-k}.\end{aligned}$$

En utilisant le changement de variable $j = 2n-k \Leftrightarrow k = 2n-j$ dans les deux sommes faisant intervenant les exposants $2n-k$, on obtient que

$$\sum_{k=0}^{2n} a_n A_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k X^k + \sum_{k=n+1}^{2n} a_{2n-k} X^k + a_n X^n + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k X^k - \sum_{k=0}^{n-1} a_{2n-k} X^k = \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{2n-k}) X^k + a_n X^n + \sum_{k=n+1}^{2n} (a_k + a_{2n-k}$$

Ainsi le coefficient de X^k du polynôme $\sum_{k=0}^{2n} a_n A_n$ est $a_k - a_{2n-k}$ si $k \in [\![0, n-1]\!]$, a_n si $k = n$ et $a_k + a_{2n-k}$ si $k \in [\![n+1, 2n]\!]$. Dire que le polynôme $\sum_{k=0}^{2n} a_n A_n$ est nul signifie que tous ses coefficients sont nuls, c'est-à-dire que $a_n = 0$ et

$$\begin{aligned}\text{pour } k &\in [\![0, n-1]\!] : a_0 = a_{2n},\ a_1 = a_{2n-1}, ..., a_k = a_{2n-k}, ...,\ a_{n-2} = a_{n+2},\ a_{n-1} = a_{n+1}, \\ \text{et pour } k &\in [\![n+1, 2n]\!] : a_{n+1} = -a_{n-1},\ a_{n+2} = -a_{n-2}, ..., a_{2n-k} = -a_k, ..., a_{2n-1} = -a_1,\ a_{2n} = -a_0.\end{aligned}$$

On en déduit que $a_0 = a_{2n} = -a_0$ donc $2a_0 = 0$ et $a_{2n} = a_0 = 0$. De même, $a_1 = a_{2n-1} = -a_1$ donc $2a_1 = 0$ et $a_{2n-1} = 0$. Plus généralement, $\forall k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k = a_{2n-k} = -a_k$ donc $a_k = 0$ et $a_{2n-k} = 0$, ce qui prouve que tous les coefficients (a_k) sont nuls et la famille $(A_k)_{k\in[\![0,2n]\!]}$ est libre donc c'est une base de E.

* * *

(e) (*) En déduire que l'endomorphisme s est diagonalisable, préciser ses valeurs propres et la dimension de chacun de ses sous-espaces propres.

RÉPONSE:

Puisque tous les polynômes A_k sont non nuls, la question 3c montre que tous les polynômes A_k sont des vecteurs propres de s et comme ils forment une base de E, on en déduit que s est diagonalisable. Ses valeurs propres sont -1 et 1. L'espace propre associé à -1 est engendré par les A_k lorsque $k \in [\![n+1, 2n]\!]$ et, cette famille étant libre et de cardinal $2n-(n+1)+1 = n$, on a $\dim E_{-1}(s) = n$. De même, l'espace propre associé à 1 est engendré par les A_k lorsque $k \in [\![0, n]\!]$ et, cette famille étant libre de cardinal $n-0+1 = n+1$, on a $\dim E_1(s) = n+1$.

* * *

PARTIE B

1. **Préliminaires**
   On définit une suite $(R_k)_{k\in\mathbb{N}^\times}$ de polynômes par :
   pour tout réel x,
   $$R_1(x) = x, \quad R_2(x) = x^2 - 2$$
   et pour tout entier k supérieur ou égalà 2,
   $$R_{k+1}(x) = xR_k(x) - R_{k-1}(x)$$

(a) Déterminer les polynômes R_3 et R_4.

RÉPONSE:

$R_3(x) = xR_2(x) - R_1(x) = x(x^2-2) - x = x^3 - 3x$
$R_4(x) = -xR_3(x) - R_2(x) = x(x^3-3x) - (x^2-2) = x^4 - 4x^2 + 2.$

* * *

(b) Montrer que, pour tout entier k strictement positif, R_k est un polynôme de degré k vérifiant pour tout réel x non nul, l'égalité :

$$R_k\left(x+\frac{1}{x}\right) = x^k + \frac{1}{x^k}$$

RÉPONSE:

On procède par récurrence forte.
On pose $(\mathcal{P}_k)$: *"pour tout* $j \leqslant k$*, le polynôme* R_j *est de degré* j *et* $R_j(x+\frac{1}{x}) = x^j + \frac{1}{x^j}$.
Initialisation : $k=1$. R_1 *est un polynôme de degré* 1 *et* $R_1(x+\frac{1}{x}) = x + \frac{1}{x}$ *donc* $(\mathcal{P}_1)$ *est vraie.*
Hérédité : *Supposons que* $(\mathcal{P}_k)$ *est vraie. En particulier,* R_k *est un polynôme de degré* k *avec* $R_k(x+\frac{1}{x}) = x^k + \frac{1}{x^k}$ *et* R_{k-1} *est un polynôme de degré* $k-1$ *avec* $R_{k-1}(x) = x^{k-1} + \frac{1}{x^{k-1}}$. *Le polynôme* $x \mapsto xR_k(x)$ *étant de degré* $k+1$ *et le polynôme* R_{k-1} *étant de degré* $k-1$*, le polynôme* $x \mapsto xR_k(x) - R_{k-1}(x) = R_{k+1}(x)$ *est de degré* $k+1$*. D'autre part, on a*

$$\begin{aligned} R_{k+1}(x+\frac{1}{x}) &= (x+\frac{1}{x})R_k(x+\frac{1}{x}) - R_{k-1}(x+\frac{1}{x}) = (x+\frac{1}{x})(x^k+\frac{1}{x^k}) - (x^{k-1}+\frac{1}{x^{k-1}}) \\ &= x^{k+1} + \frac{1}{x^{k-1}} + x^{k-1} + \frac{1}{x^{k+1}} - x^{k-1} - \frac{1}{x^{k-1}} = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}. \end{aligned}$$

Puisque pour tout $j \leqslant k$*, le polynôme* R_j *est de degré* j *et* $R_j(x+\frac{1}{x}) = x^j + \frac{1}{x^j}$ *et que* R_{k+1} *est de degré* $k+1$ *et* $R_{k+1}(x+\frac{1}{x}) = x^{k+1} + \frac{1}{x^{k+1}}$*, on en déduit que* $(\mathcal{P}_{k+1})$ *est vraie.*
Conclusion : $\forall k \geqslant 1$, $(\mathcal{P}_k)$ *est vraie donc* $\forall k \in \mathbb{N}^\times$, *, c'est-à-dire* R_k *est un polynôme de degré* k *avec* $R_k(x+\frac{1}{x}) = x^k + \frac{1}{x^k}$.

* * *

(c) Pour tout réel a, déterminer, s'ils existent, les réels x non nuls qui vérifient la relation suivante : $x + \frac{1}{x} = a$.

RÉPONSE:

$x + \frac{1}{x} = a \Leftrightarrow \frac{x^2+1}{x} = a \Leftrightarrow x^2+1 = ax \Leftrightarrow x^2 - ax + 1 = 0$. *Le discriminant de ce trinôme est* a^2-4.

- *Si* $a^2 - 4 < 0 \Leftrightarrow a \in]-2, 2[$ *alors l'équation n'a aucune solution,*
- *Si* $a^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow a = \pm 2$ *alors l'équation a comme unique solution* $x = 1$,
- *Si* $a^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow a \in]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$, *alors l'équation a deux racines* $x = \frac{a+\sqrt{a^2-4}}{2}$ *et* $x = \frac{a-\sqrt{a^2-4}}{2}$.

* * *

2. **Étude des racines des polynômes vecteurs propres de s associés à la valeur propre 1**

Dans cette question, Q désigne un polynôme de degré $2n$ défini par : $Q(x) = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^k$, tel que a_{2n} soit non

nul et tel que, pour tout entier k de l'intervalle $[\![0, n]\!]$, l'on ait : $a_k = a_{2n-k}$.
On définit alors le polynôme $\widetilde{Q}$ par :

$$\widetilde{Q}(x) = a_n + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k} R_k(x).$$

(a) Vérifier que 0 n'est pas racine de Q.

RÉPONSE:

De façon évidente $Q(0) = a_0$ et puisque $a_0 = a_{2n} \neq 0$ donc 0 n'est pas une racine de Q.

* * *

(b) Soit x un réel non nul, on pose : $y = x + \dfrac{1}{x}$.
Montrer que $\dfrac{Q(x)}{x^n}$ est nul si et seulement si $\widetilde{Q}(y)$ est nul.
Quel est l'intérêt de ce résultat dans la recherche des racines de Q ?

RÉPONSE:

Nous avons l'égalité

$$\frac{Q(x)}{x^n} = \sum_{k=0}^{2n} a_k \frac{x^k}{x^n} = \sum_{k=0}^{2n} a_k x^{k-n} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^{k-n} + a_n x^n + \sum_{k=n+1}^{2n} a_k x^{k-n}.$$

Puisque $k - n < 0$ lorsque $k \in [\![0, n-1]\!]$ et, en utilisant le changement de variable $k = 2n - j \Leftrightarrow j = 2n - k \Leftrightarrow k - n = n - j$ dans la seconde somme, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{Q(x)}{x^n} &= \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{1}{x^{n-k}} + a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_{2n-j} x^{n-j} = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \frac{1}{x^{n-k}} + a_n + \sum_{j=0}^{n-1} a_j x^{n-j} = a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \left(\frac{1}{x^{n-k}} + x^{n-k}\right) \\
&= a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k R_{n-k}\left(x + \frac{1}{x}\right) = a_n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k R_{n-k}(y) \underset{j=n-k}{=} a_n + \sum_{j=1}^{n} a_{n-j} R_j(y) = \widetilde{Q}(y).
\end{aligned}$$

Donc $\dfrac{Q(x)}{x^n} \neq 0$ si et seulement si $\widetilde{Q}(y) \neq 0$.
Puisque 0 n'est pas racine de Q, l'équation $Q(x) = 0$ est équivalente à l'équation $\dfrac{Q(x)}{x^n} = 0$ qui est identique à l'équation $\widetilde{Q}(y) = 0$. On a ainsi ramené une équation de degré $2n$ à une équation de degré n dont la résolution est à priori plus simple. Si $\{y_1, .., y_s\}$ sont les racines de cette équation, il ne restera plus qu'à résoudre les très simples équations $x + \dfrac{1}{x} = y_j$ pour trouver toutes les racines réelles de Q.

* * *

(c) On suppose que n est égal à 3 et que Q est défini par :

$$Q(x) = x^6 + x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 9x^2 + x + 1.$$

Déterminer les racines de Q.

RÉPONSE:

Le polynôme $Q(x) = x^6 + x^5 - 9x^4 + 2x^3 - 9x^2 + x + 1$ est de degré $6 = 2 \times 3$ et ses coefficients vérifient bien les symétries $a_k = a_{6-k}$. Puisque $a_3 = 2$, $a_2 = -9$, $a_1 = 1$, $a_0 = 1$, si l'on pose $y = x + \dfrac{1}{x}$, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{Q}(y) &= 2 + a_{3-1} R_1(y) + a_{2-1} R_2(y) + a_{3-3} R_3(y) = 2 + a_2 R_1(y) + a_1 R_2(y) + a_0 R_3(y) \\
&= 2 - 9R_1(y) + R_2(y) + R_3(y) = 2 - 9y + y^2 - 2 + y^3 - 3y = y^3 + y^2 - 12y = y(y^2 + y - 12)
\end{aligned}$$

Le trinôme y^2+y-12 admet comme discriminant $49=7^2$ donc ses racines sont -4 et 3. L'équation $\widetilde{Q}(y)=0$ a pour solution $y=0$ ou $y=3$ ou $y=-4$. Puisque $y=x+\dfrac{1}{x}$, la question 1c montre que l'équation $x+\dfrac{1}{x}=0$ n'a aucune solution, l'équation $x+\dfrac{1}{x}=3$ admet comme solution $x=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ et $x=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ et l'équation $x+\dfrac{1}{x}=-4$ admet comme solution $\dfrac{-4+\sqrt{12}}{2}=-2+\sqrt{3}$ et $x=\dfrac{-4-\sqrt{12}}{2}=-2-\sqrt{3}$. Par conséquent, l'ensemble des racines de Q est l'ensemble

$$S=\left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2},\frac{3-\sqrt{5}}{2},-2+\sqrt{3},-2-\sqrt{3}\right\}.$$

* * *

PARTIE C

Dans cette partie, p désigne un entier supérieur ou égal à 2.
On désigne par Ω l'ensemble des éléments de E dont les coefficients sont des entiers de l'intervalle $[\![1,p]\!]$, par $\mathcal{A}$ l'ensemble des parties de Ω et par $\mathbf{P}$ la probabilité uniforme sur $\mathcal{A}$, c'est à dire que, pour tout polynôme Q de Ω, l'on a :

$$\mathbf{P}(\{Q\})=\frac{1}{\operatorname{card}(\Omega)}$$

Si Q est un élément de Ω et i un entier naturel non nul, on dit que Q et $s(Q)$ présentent i coïncidences lorsqu'il existe exactement i entiers k qui vérifient $a_k=a_{2n-k}$.
On définit alors la variable aléatoire Z qui, à tout polynôme Q de Ω, associe le nombre de coïncidences entre Q et $s(Q)$.
Par exemple pour $n=2$, si $Q(x)=x^4+7x^3+2x^2+5x+1$, on a $Z(Q)=3$.

1. **Description d'un cas simple**
   Dans cette question, on suppose que n est égal à 1 et que p est égal à 2.
   Ecrire tous les éléments de Ω puis déterminer la loi, l'espérance et la variance de Z.

RÉPONSE:

$n=2$ donc $E=\mathbb{R}_2[X]=\{P=a+bX+cX^2,\quad a,b,c\in\mathbb{R}\}$ et $\Omega=\{P=a+bX+cX^2,\quad a,b,c\in[\![1,2]\!]\}$. Puisque chaque coefficient à deux possibilités, l'ensemble Ω contient $2^3=8$ éléments

$$\begin{aligned}\Omega\quad=\quad&\{\underbrace{1+X+X^2}_{Z=3},\underbrace{1+X+2X^2}_{Z=1},\underbrace{1+2X+X^2}_{Z=3},\underbrace{2+X+X^2}_{Z=1},\\&\underbrace{1+2X+2X^2}_{Z=1},\underbrace{2+X+2X^2}_{Z=3},\underbrace{2+2X+X^2}_{Z=1},\underbrace{2+2X+2X^2}_{Z=3}\}\end{aligned}$$

De cette explicitation, on constate que $Z(\Omega)=\{1,3\}$ et que

$$P(Z=1)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}\text{ et }P(Z=3)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$$

donc

$$E(Z)=1.\frac{1}{2}+3.\frac{1}{2}=\frac{4}{2}=2,\quad E(Z^2)=1^2.\frac{1}{2}+3^2.\frac{1}{2}=\frac{10}{2}=5,\quad V(Z)=E(Z^2)-(E(Z))^2=5-2^2=1.$$

* * *

2. **Étude générale de la variable aléatoire Z**
   On revient au cas général : n est strictement positif et p est supérieur ou égal à 2.
   (a) Calculer le cardinal de Ω.

RÉPONSE:

Soit $P = \sum_{k=0}^{2n} a_k X^k$ *un élément de* Ω.

- *On a* p *choix pour chaque coefficient de* P *et, puisque que* P *possède* $2n+1$ *coefficients, on en déduit que* $\operatorname{card}\Omega = p^{2n+1}$.
- *Puisque* $2n - n = n$, *on en déduit que* $a_n = a_{2n-n}$ *donc* P *admet au moins une incidence, ce qui implique que* $Z \geqslant 1$. *En particulier, l'évènement* $(Z = 1)$ *signifie que pour tout entier* $k \in [\![0, n-1]\!]$, $a_k \neq a_{2n-k}$. *Pour chaque entier* $k \in [\![0, n-1]\!]$, *on a* p *choix possible pour* a_k. *Puisque les* n *coefficients* $a_0, .., a_{n-1}$ *ne sont soumis à aucune condition, on a* p^n *choix. Il reste à sélectionner les coefficients* $a_{n+1}, .., a_{2n}$. *Puisque* $a_{n+1} \neq a_{2n-(n+1)} = a_{n-1}$, *on a* $(p-1)$ *choix pour* a_{n+1}. *Par le même raisonnement, on voit que l'on a* $(p-1)$ *choix pour chaque* a_k *lorsque* $k \in [\![n+1, 2n]\!]$, *ce qui nous fait* $(p-1)^n$ *choix pour les* n *coefficients* $a_{n+1}, ..., a_{2n}$. *Le dernier coefficient* a_n *n'étant soumis à aucune condition, on a* p *choix. Par conséquent, on obtient que* $P(Z = 1)$ *est égal*

$$P(Z = 1) = \frac{p^n \times (p-1)^n \times p}{p^{2n+1}} = \frac{(p-1)^n}{p^n} = \left(\frac{p-1}{p}\right)^n.$$

- *Le polynôme* P *admettant* $2n+1$ *coefficients, il ne peut y avoir plus de* $2n+1$ *coïncidences. Si* P *possède* $2n+1$ *coïncidences, cela signifie que* $a_0 = a_{2n}$, $a_1 = a_{2n-1}, .., a_{n-1} = a_{n+1}$ *et* $a_n = a_n$. *Ainsi, la connaissance des* $a_0, ..., a_{n-1}, a_n$ *fournit la connaissance des* $a_{2n}, .., a_{n+1}$. *Pour chaque coefficients* a_k *avec* $k \in [\![0, n]\!]$, *on* p *choix possibles et il y a* $n+1$ *coefficients* $a_0, ..., a_n$, *on a donc*

$$P(Z = 2n+1) = \frac{p^{n+1}}{p^{2n+1}} = \frac{1}{p^n}.$$

* * *

(b) Montrer que la plus petite valeur que peut prendre Z est 1 et justifier l'égalité suivante :

$$\mathbf{P}([Z = 1]) = \left(\frac{p-1}{p}\right)^n$$

RÉPONSE:

* * *

(c) Montrer que la plus grande valeur que peut prendre Z est $2n+1$ et justifier l'égalité suivante :

$$\mathbf{P}([Z = 2n+1]) = \frac{1}{p^n}$$

RÉPONSE:

* * *

(d) Montrer que Z ne peut prendre que des valeurs impaires et, pour un entier j vérifiant $0 \leqslant j \leqslant n$, calculer $\mathbf{P}([Z = 2j+1])$.

RÉPONSE:

Soit $E = \{k \in [\![0, 2n]\!]$ *tel que* $a_k = a_{2n-k}\}$. *Si* $k \in E$ *et* $k \neq 2n - k$, *ce qui signifie* $k \neq n$, *alors* k *et* $2n-k$ *sont deux éléments distincts appartenant à* E. *Ainsi,* E *s'écrit comme la réunion disjointe*

$$E = \{n\} \cup (E \cap [\![0, n-1]\!]) \cup (E \cup [\![n+1, 2n]\!])$$

donc

$$\operatorname{card}(E) = 1 + \operatorname{card}\left(E \cap [\![0, n-1]\!]\right) + \operatorname{card}\left(E \cup [\![n+1, 2n]\!]\right)$$

L'application $k \mapsto 2n - k$ est une bijection de $(E \cap [\![0, n-1]\!])$ sur $(E \cup [\![n+1, 2n]\!])$ donc

$$\operatorname{card}\left(E \cap [\![0, n-1]\!]\right) = \operatorname{card}\left(E \cup [\![n+1, 2n]\!]\right),$$

ce qui implique que $\operatorname{Card} E = 1 + 2\operatorname{Card}\left(E \cap [\![0, n-1]\!]\right)$ est un entier impair.
L'évènement $(Z = 2j+1)$ se réalise si et seulement il existe j entiers $k' \in [\![0, n-1]\!]$ tels que $a_{k'} = a_{2n-k'}$. On choisit donc j entiers dans l'intervalle $[\![0, n-1]\!]$, qui est de cardinal n, ce qui nous donne $\binom{n}{j}$ choix pour les entiers k'. On a p choix pour chaque coefficient a_k, $k \in [\![0, n-1]\!]$ (qu'ils soient des incidences ou non), ce qui nous donne p^n choix pour tous coefficients $a_0, .., a_{n-1}$ puisqu'ils sont indépendants les uns des autres. Les j coefficients $a_{2n-k'}$ appartenant à $\{a_{n+1}, .., a_{2n}\}$ sont fixés par la condition $a_{k'} = a_{2n-k'}$. Pour chaque coefficient a_{2n-k} restant de l'ensemble $\{a_{n+1}, .., a_{2n}\}$, on a $p-1$ choix possible car il ne peut pas prendre la valeur a_k. Il existe $n-j$ tels autres coefficients, et pour chacun d'entre eux, on a p choix possible, ce qui nous donne p^{n-j} choix pour l'ensemble des ces coefficients et le coefficient a_n a le droit de n'importe quelle valeur dans $[\![1, p]\!]$. Par conséquent, on a

$$P(Z = 2j+1) = \frac{\binom{n}{j} p^n \times (p-1)^{n-j} p}{p^{2n+1}} = \binom{n}{j} \frac{(p-1)^{n-j}}{p^n}.$$

* * *

(e) On pose $Y = \dfrac{Z-1}{2}$. Montrer que Y suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres. En déduire l'espérance et la variance de Z en fonction de n et de p.

RÉPONSE:

$Z = 2j+1$ avec $j \in [\![0, n]\!]$ si et seulement si $Y = \dfrac{Z-1}{2} = j$. On en déduit que $Y(\Omega) = [\![0, n]\!]$ et l'on a la formule

$$\begin{aligned}\forall j \in [\![0, n]\!], \quad P(Y = j) = P(Z = 2j+1) &= \binom{n}{j} \frac{(p-1)^{n-j}}{p^n} \\ = \binom{n}{j} \frac{1}{p^j} \times \frac{(p-1)^{n-j}}{p^{n-j}} &= \binom{n}{j} \left(\frac{1}{p}\right)^j \left(\frac{p-1}{p}\right)^{n-j} = \binom{n}{j} \left(\frac{1}{p}\right)^j \left(1 - \frac{1}{p}\right)^{n-j},\end{aligned}$$

ce qui démontre que Y suit la loi binômiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{p})$. Son espérance et sa variance sont donc

$$E(Y) = n \times \frac{1}{p} = \frac{n}{p} \text{ et } V(Y) = n \times \left(\frac{1}{p}\right)\left(1 - \frac{1}{p}\right) = \frac{n(p-1)}{p^2}.$$

On en déduit que

$$E(Z) = E(2Y+1) = 2E(Y) + 1 = \frac{2n+p}{p} \text{ et } V(Z) = V(2Y+1) = 4V(Y) = \frac{4n(p-1)}{p^2}.$$

* * *