Devoir Libre n°3

Réponse le 04/11/24

Exercice n°1

On note f la fonction définie, pour tout réel strictement positif x, par : $f(x) = \dfrac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$.

1. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, montrer que l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_n^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et exprimer I_n en fonction de n.

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme la fonction f est continue sur $\mathbb{R}_+^*$, l'intégrale I_n est impropre en $+\infty$. Soit $A > 0$.

$$\int_n^A f(x)\,\mathrm{d}x = \int_n^A \frac{e^{1/x}}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-e^{1/x}\right]_n^A = e^{1/n} - e^{1/A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \boxed{e^{1/n} - 1}$$

* * *

(b) En déduire : $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$.

RÉPONSE:

On sait que qu'au voisinage de 0, $e^x - 1 \sim x$, et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, $e^{1/n} - 1 \sim \frac{1}{n}$. Ainsi $\boxed{I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}.}$

* * *

2. On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n = f(n)$. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ est convergente.

RÉPONSE:

On remarque que, pour $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$. De plus $u_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n^2}$. Ainsi, d'après le théorème de comparaison des séries à termes positifs, $\boxed{\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n \text{ converge.}}$

* * *

3. (a) Établir : $\forall k \in \mathbb{N}^*, f(k+1) \leq \displaystyle\int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)$.

RÉPONSE:

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+^*$, comme produit et composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi pour tout $x > 0$:

$$f'(x) = -\frac{e^{1/x}}{x^4} - \frac{2e^{1/x}}{x^3} < 0$$

La fonction f est donc décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [\![k, k+1]\!]$, $f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$, et par croissance de l'intégrale

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(k)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow f(k+1)\int_k^{k+1} 1\,\mathrm{d}x \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)\int_k^{k+1} 1\,\mathrm{d}x$$

$$\Leftrightarrow \boxed{f(k+1) \leq \int_k^{k+1} f(x)dx \leq f(k)}$$

* * *

(b) En sommant soigneusement cette dernière inégalité, montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n^2}$$

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $N \geq n$. En sommant terme à terme l'inégalité précédente, on trouve :

$$\sum_{k=n}^{N} f(k+1) \leq \sum_{k=n}^{N} \int_k^{k+1} f(x)dx \leq \sum_{k=n}^{N} f(k) \Leftrightarrow \sum_{k=n}^{N} u_{k+1} \leq \int_n^{N+1} f(x)dx \leq \sum_{k=n}^{N} u_k$$
$$\Leftrightarrow \sum_{k=n+1}^{N+1} u_k \leq \int_n^{N+1} f(x)dx \leq \sum_{k=n+1}^{N} u_k + u_n$$

En passant à la limite quand N tend vers $+\infty$, on trouve alors

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k + \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n^2}}$$

* * *

(c) Déduire des questions précédentes un équivalent simple, lorsque n est au voisinage de $+\infty$ de $\displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{k}}}{k^2}$.

RÉPONSE:

Comme la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} u_n$ converge, son reste tend vers 0. L'inégalité précédente permet d'obtenir, du fait que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n > 0$:

$$I_n - \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n^2} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq I_n \quad \textit{ou encore } 1 - \frac{\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n^2}}{I_n} \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \leq 1$$

Or on a vu que $I_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{n}$, donc $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n^2}}{I_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}}{n} = 0$. Ainsi

$$\boxed{\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k \underset{+\infty}{\sim} I_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{n}}$$

* * *

Exercice n°2

Le but de l'exercice est de déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t+t^n} dt$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, justifier l'existence de u_n

RÉPONSE:

Soit $n \in \mathbb{N}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{1+t+t^n}$ est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}_+$, donc sur $[0,1]$, comme fraction rationnelle de dénominateur jamais nul.

* * *

2. Calculer u_0 et u_1

RÉPONSE:

$$u_0 = \int_0^1 \frac{1}{2+t}\,\mathrm{d}t = [\ln(2+t)]_0^1 = \boxed{\ln(3) - \ln(2)}$$

$$u_1 = \int_0^1 \frac{1}{1+2t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}[\ln(1+2t)]_0^1 = \boxed{\frac{\ln(3)}{2}}$$

* * *

3. (a) Étudier les variations de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

RÉPONSE:

Il est clair que pour tout $n \in \mathbb{N}$, et pour tout $t \in [0;1]$, $t^{n+1} \leq t^n$, donc $1+t+t^n \geq 1+t+t^{n+1}$ et donc $\frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{1+t+t^{n+1}}$. Par croissance de l'intégrale on trouve alors que $\boxed{u_n \leq u_{n+1} \text{ et donc que } (u_n) \text{ est croissante.}}$

* * *

(b) Établir : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \ln(2)$.

RÉPONSE:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{1}{1+t+t^n} \leq \frac{1}{1+t}$ donc par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{u_n \leq \int_0^1 \frac{1}{1+t}\,\mathrm{d}t = \ln(2)}$$

* * *

(c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

RÉPONSE:

La suite (u_n) est croissante et majorée, donc d'après le théorème de la limite monotone, $\boxed{(u_n) \text{ converge.}}$

* * *

4. (a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, écrire $\ln(2) - u_n$ sous la forme d'une intégrale.

RÉPONSE:

D'après ce qui précède, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\ln(2) - u_n = \int_0^1 \frac{1}{1+t} - \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t = \boxed{\int_0^1 \frac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)}\,\mathrm{d}t}$$

* * *

(b) En déduire : $\forall n \in \mathbb{N}, \ln(2) - u_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

RÉPONSE:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\dfrac{t^n}{(1+t)(1+t+t^n)} \leq t^n$ donc par croissance de l'intégrale :

$$\boxed{\ln(2) - u_n \leq \int_0^1 t^n\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}}$$

* * *

(c) Déterminer alors la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

RÉPONSE:

Par encadrement, on montre que $\boxed{(u_n) \text{ converge vers } \ln(2).}$

* * *

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 , on pose $v_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$.

5. (a) Justifier, pour tout $n \in [\![2;+\infty[\![$, la convergence de l'intégrale définissant v_n.

RÉPONSE:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$,

$$\frac{1}{1+t+t^n} \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{t^n}$$

Comme les intégrandes sont positives et qu'on reconnait une intégrale de Riemann convergente, le théorème de comparaison des intégrales de fonctions positives nous assure que $\boxed{\text{l'intégrale qui définit } v_n \text{ converge}}$.

* * *

(b) Montrer : $\forall n \in [\![2;+\infty[\![, 0 \leq v_n \leq \dfrac{1}{n-1}$.

RÉPONSE:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, $0 \leq \dfrac{1}{1+t+t^n} \leq \dfrac{1}{t^n}$ donc pour $M \geq 1$:

$$0 \leq \int_1^M \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t \leq \int_1^M \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t$$

Or $\displaystyle\int_1^M \frac{1}{t^n}\,\mathrm{d}t = \int_1^M t^{-n}]\,\mathrm{d}t = [\frac{1}{-(n-1)t^{n-1}}]_1^M = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{(n-1)M^{n-1}}$. *En passant à la limite quand M tend vers $+\infty$, on trouve directement*

$$\boxed{0 \leq v_n \leq \frac{1}{n-1}}$$

* * *

(c) En déduire $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ puis donner la valeur de $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$.

RÉPONSE:

En passant à la limite que n tend vers $+\infty$, on montre que (v_n) converge vers 0. Comme $\int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$ converge, $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}dt$ converge également et d'après la relation de Chasles :

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t = \int_0^{1} \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} \frac{1}{1+t+t^n}\,\mathrm{d}t = \boxed{\ln(2)}$$

* * *

Exercice n°3

Soit n est un entier supérieur ou égal à 2 . On note E l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ et Id l'application identité de E.
L'objet de l'exercice est l'étude des endomorphismes f de E vérifiant l'équation $(\mathcal{E})$: $f \circ f = 4\ \mathrm{Id}$.

Partie A : Étude du cas $n = 2$.

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est : $A = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

Soit u le vecteur de $\mathbb{R}^2$ défini par $u = (\sqrt{2} - 2; \sqrt{2})$.

1. Montrer que f vérifie l'équation $(\mathcal{E})$, puis préciser le noyau et l'image de f.

RÉPONSE:

$f \circ f = 4$ Id si et seulement si on a l'égalité sur les matrices associée : $A^2 = 4I$

$A^2 = 2\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{4I \text{ donc } f \circ f = 4\mathrm{Id}}$. *Comme* $A\frac{1}{4}A = \frac{1}{4}AA = I$ *alors A est inversible et* $A^{-1} = \frac{1}{4}A$

Donc f est bijective et donc $\boxed{\mathrm{Ker}(f) = \{0\} \text{ et } \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^2}$.

* * *

2. On note $F = \mathrm{Ker}(f - 2Id)$ et $G = \mathrm{Im}(f - 2Id)$.

   (a) Montrer que G est engendré par le vecteur u. En déduire la dimension de F et donner une base de F.

RÉPONSE:

La matrice de $f - 2Id$ est

$$A - 2I = \sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}-2 \end{pmatrix}$$

On a donc $f(1,0) = u$. Pour que l'image soit engendrée par u, il faudrait que $f(0,1)$ soit également proportionnel à u :

$$\begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}(-1-\sqrt{2}) = \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -\sqrt{2}-2 \end{pmatrix}$$

On trouve rapidement $f(0,1) = (-1-\sqrt{2})u$. Comme

$$\begin{aligned} G &= \left\{f(x,y)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} = \left\{xf(1,0) + yf(0,1)/(x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &= \left\{(x + y(-1-\sqrt{2}))u/(x,y) \in \mathbb{R}^2\right\} \\ &\subset \mathrm{Vect}(u) \end{aligned}$$

et que $u \in G$ alors $\mathrm{Vect}(u) \subset G$. Donc $G = \mathrm{Vect}(u)$ et (u) est une base de G (génératrice et libre car formée d'un seul vecteur non nul) donc $\dim(G) = 1$.

Et le théorème du rang donne alors $\dim(\mathrm{Im}\, f - 2\,\mathrm{Id}) = 2 - \dim(\ker f - 2\,\mathrm{Id}) = 1$

Conclusion : $\boxed{\dim(F) = 1}$.

Il reste à trouver un vecteur non nul pour en avoir une base :

$$(A - 2I)\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2}-2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sqrt{2}+1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $(\sqrt{2}+1, 1)$ est une base de F

$(\sqrt{2}(\sqrt{2}+1, 1) = (2+\sqrt{2}, \sqrt{2})$ donnerait une notation plus symétrique avec u).

* * *

(b) (*) Vérifier que G est le sous-espace propre de f associé à la valeur propre -2 .

RÉPONSE:

On vérifie que $u \neq 0$ est bien vecteur propre associé à 2 :

$$(A-2I)\begin{pmatrix}\sqrt{2}-2\\ \sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}+2 & \sqrt{2}\\ \sqrt{2} & -\sqrt{2}+2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{2}-2\\ \sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-4+2\\ 2-2\sqrt{2}-2+2\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$\boxed{\text{Donc } u \text{ est vecteur propre associé à la valeur propre 2 .}}$

Si $\operatorname{Ker}(f+2\mathrm{Id})$ était de dimension 2 , on aurait $\operatorname{Ker}(f+2\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^2$ donc $f+2\mathrm{Id} = 0$ et $f = 2\mathrm{Id}$ ce qui n'est pas le cas. Donc $\dim(\operatorname{Ker}(f+2\mathrm{Id})) \leqslant 1$ et donc $\dim(\operatorname{Ker}(f+2\mathrm{Id})) = 1$ et u en est une base.

Ainsi $\operatorname{Ker}(f+2\,\mathrm{Id}) = \operatorname{Vect}(u) = G \neq \{0\}$

Conclusion : $\boxed{G \text{ est le sous espace propre associé à -2.}}$

* * *

3. (*) Montrer que f est diagonalisable ; préciser les valeurs propres de f et donner la matrice de passage de la base canonique à une base de vecteurs propres.

RÉPONSE:

On a vu que -2 est valeur propre de f. Comme $\operatorname{Ker}(f-2\mathrm{Id}) \neq \{0\}$ alors 2 est également valeur propre. Donc dans $\mathbb{R}^2$ de dimension 2, f qui a deux valeurs propres distinctes $\boxed{\text{est diagonalisable}}$ *sur la base obtenue en concaténant deux vecteurs propres associés à -2 et 2 : $u = (\sqrt{2}-2, \sqrt{2})$ et $v = (\sqrt{2}+1, 1)$.*

La matrice de passage de la base canonique à la base (u, v) est alors

$$\boxed{\begin{pmatrix}\sqrt{2}-2 & \sqrt{2}+1\\ \sqrt{2} & 1\end{pmatrix}}$$

* * *

Partie B : Étude du cas général.

On se place désormais dans le cas où n est supérieur ou égal à 2 , et on considère un endomorphisme f de E vérifiant l'équation $(\mathcal{E})$.

1. (a) Justifier que f est un automorphisme de E et exprimer l'automorphisme réciproque f^{-1} en fonction de f.

RÉPONSE:

Comme $f \circ f = 4\,\mathrm{Id}$ alors $\frac{1}{4}f \circ f = \mathrm{Id}$ et $f \circ \frac{1}{4}f = \mathrm{Id}$ par linéarité de f.

Donc $\boxed{f \text{ est bijective donc un automorphisme de } \mathbb{R}^n \text{ et } f^{-1} = \frac{1}{4}f}$.

* * *

(b) (*)Déterminer les valeurs propres possibles de f.

RÉPONSE:

Comme f vérifie la relation polynômiale $f^2 - 4\mathrm{Id} = 0$, si α est valeur de f alors $\alpha^2 - 4 = 0$ et donc $\alpha = 2$ ou -2 Conclusion : $\boxed{\text{Les seules valeurs propres possibles de } f \text{ sont 2 et -2}}$.

* * *

(c) Vérifier que $2Id$ et $-2Id$ satisfont l'équation $(\mathcal{E})$.

RÉPONSE:

On a $(2\mathrm{Id})^2 = 4$ *Id et* $(-2\mathrm{Id})^2 = (-2)^2\mathrm{Id} = 4\mathrm{Id}$
Donc $\boxed{2Id \text{ et } -2Id \text{ satisfont l'équation } (\mathcal{E})}$.

* * *

On suppose dans la suite de l'exercice que $f \neq 2\,\mathrm{Id}$ et $f \neq -2\,\mathrm{Id}$, et on note $F = \mathrm{Ker}(f - 2\,\mathrm{Id}\,)$ et $G = \mathrm{Im}(f - 2Id)$.

2. Soit x un élément de E.

(a) Montrer que $(f(x) - 2x)$ appartient à $\mathrm{Ker}(f + 2Id)$ et que $(f(x) + 2x)$ appartient à F.

RÉPONSE:

Pour montrer que $(f(x) - 2x)$ *appartient à* $\ker(f + 2\mathrm{Id})$ *on calcule son image par* $f + 2\mathrm{Id}$ *:*

$$(f + 2\,\mathrm{Id})(f(x) - 2x) = (f + 2\mathrm{Id})(f - 2\mathrm{Id})(x) = \left(f^2 - 4\mathrm{Id}\right)(x) = 0$$

car $f^2 = 4\mathrm{Id}$.
Conclusion : $\boxed{\text{Donc } f(x) - 2x \in \ker(f + 2\mathrm{Id})}$.
De même : $(f - 2\mathrm{Id})(f(x) + 2x) = \left(f^2 - 4\mathrm{Id}\right)(x) = 0$.
Conclusion : $\boxed{(f(x) + 2x) \text{ appartient à } \ker(f - 2\mathrm{Id}) = F.}$

* * *

(b) En déduire que $G \subseteq \mathrm{Ker}(f + 2Id)$ et que $\mathrm{Im}(f + 2Id) \subseteq F$.

RÉPONSE:

Donc si $u \in G = \mathrm{Im}(f - 2\mathrm{Id})$ *alors il existe* $v \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $u = (f(v) - 2v)$ *et donc* $u \in \ker(f + 2\mathrm{Id})$
Conclusion : $\boxed{G \subset \ker(f + 2\ Id\ )}$. *Et de même si* $u \in \mathrm{Im}(f + 2\mathrm{Id})$ *alors il existe* $v \in \mathbb{R}^n$ *tel que* $u = f(v) + 2v$ *et donc* $u \in \ker(f - 2\,\mathrm{Id})$
Conclusion : $\boxed{\mathrm{Im}(f + 2\mathrm{Id}) \subset F = \ker(f - 2\mathrm{Id}).}$

* * *

(c) (*) Montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f.

RÉPONSE:

Pour montrer que 2 et -2 sont les valeurs propres de f*, il faut monter que ni* $\ker(f - 2\mathrm{Id})$*, ni* $\ker(f + 2\mathrm{Id})$ *ne sont réduits à* $\{0\}$ *:*
Par l'absurde : Si $\ker(f - 2\mathrm{Id}) = \{0\}$*, comme* $\mathrm{Im}(f + 2\mathrm{Id}) \subset \ker(f - 2\,\mathrm{Id})$ *alors* $\mathrm{Im}(f + 2\mathrm{Id}) = \{0\}$ *et le théorème du rang donne* $\dim(\ker(f + 2\ Id\ )) = n$
D'où $\ker(f + 2\mathrm{Id}) = \mathbb{R}^n$ *et pour tout* $u, (f + 2\mathrm{Id})(u) = 0$ *soit* $f = 2\mathrm{Id}$
Donc $\ker(f - 2\ Id\ ) \neq \{0\}$ *et 2 est bien valeur propre de* f
Et de même $\ker(f + 2\mathrm{Id}) \neq \{0\}$
Donc -2 est également valeur propre de f.
Conclusion : $\boxed{\text{2 et -2 sont valeurs propres de } f}$.

* * *

3. Soit x un vecteur de $\mathrm{Ker}(f + 2Id)$.

(a) Exprimer $(f - 2Id)(x)$ en fonction de x uniquement. En déduire que x appartient à G, puis que $G = \mathrm{Ker}(f + 2Id)$

RÉPONSE:

On a $(f+2\mathrm{Id})(x)=0$ *donc* $f(x)=-2x$, *d'où* $\boxed{(f-2\mathrm{Id})(x)=f(x)-2x=-4x}$.
Pour montrer que x *appartient à* G, *il faut montrer qu'il est une image par* ($f-2\mathrm{Id}$). *Or* $x=-\dfrac{1}{4}(f-2\mathrm{Id})(x)=(f-2\mathrm{Id})\left(-\dfrac{1}{4}x\right)$ *par linéarité. Donc* $\boxed{x\in G}$.
On avait déjà l'inclusion $G\subset\ker(f+2\mathrm{Id})$. *On vient de montrer* $\ker(f+2\mathrm{Id})\subset G$
Conclusion : $\boxed{G=\ker(f+2\mathrm{Id})}$.

* * *

(b) (*) Montrer que f est diagonalisable.

RÉPONSE:

Il reste à voire si la somme desdimensions des sous espaces propres est égale à n.
Comme $G=\mathrm{Im}(f-2\,\mathrm{Id})=\ker(f+2\,\mathrm{Id})$ *alors* $\dim\mathrm{Im}(f-2\,\mathrm{Id})=\dim(\ker(f+2\,\mathrm{Id}))$
Le théormème du rang donne $\dim(\ker(f-2\,\mathrm{Id}))=n-\dim\mathrm{Im}(f-2\,\mathrm{Id})=n-\dim(\ker(f+2\mathrm{Id}))$
Donc $\dim(\ker(f-2\,\mathrm{Id}))+\dim(\ker(f+2\,\mathrm{Id}))=n$
La somme des dimension des sous espaces propres est égale à la dimension de l'espace.
Conclusion : $\boxed{f \text{ est diagonalisable.}}$

* * *