$\boxed{\text{Devoir Libre n°4}}$

Réponse le 18/11/24

Exercice n°1

On note $E = \mathbb{R}_3[X]$ l'espace vectoriel polynômes à coefficients réels de degré inférieur ou égal à 3.
Soit f l'application définie sur E qui associe à tout polynôme $P \in E$, le polynôme $f(P)$ défini par :

$$f(P)(X) = -3XP(X) + X^2P'(X), \text{ où } P' \text{ est la dérivée du polynôme } P$$

1. (a) Rappeler la dimension de E.

RÉPONSE:

D'après le cours, $\boxed{\dim E = 4.}$

* * *

(b) Montrer que f est un endomorphisme de E.

RÉPONSE:

Soit $P, Q \in E$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$f(\lambda P + Q) = -3X(\lambda P + Q) + X^2(\lambda P + Q)' = \lambda\left(-3XP + X^2P'\right) + \left(-3XQ + X^2Q'\right) = \lambda f(P) + f(Q)$$

donc $\boxed{f \textit{ est linéaire.}}$

Soit $P = aX^3 + bX^2 + cX + d \in E$. *Alors*

$$f(P) = -3X\left(aX^3 + bX^2 + cX + d\right) + X^2\left(3aX^2 + 2bX + c\right) = -bX^3 - 2cX^2 - 3dX \in E$$

donc $\boxed{f \textit{ est bien un endomorphisme de } E.}$

* * *

(c) Déterminer la matrice M de f dans 1a base canonique de E.

RÉPONSE:

On a $f(1) = -3X, f(X) = -2X^2, f\left(X^2\right) = -X^3$ *et* $f\left(X^3\right) = 0$, *donc*

$$M = Mat_{(1,X,X^2,X^3)}(f) = \mathrm{Mat}_{(1,X,X^2,X^3)}\left(f(1), f(X), f\left(X^2\right), f\left(X^3\right)\right) = \boxed{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}}.$$

* * *

(d) (*) La matrice M est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ? Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, M^n.

RÉPONSE:

- *La matrice M est triangulaire inférieure avec des zéros sur la diagonale, donc* $\boxed{M \textit{ n'est pas inversible}}$.
- *Comme M est triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, donc* $\boxed{\mathrm{Sp}(M) = \{0\}.}$ *Si M était diagonalisable, il existerait alors P inversible telle que* $M = P.(0I) \cdot P^{-1} = 0 \ldots$ *Or* $M \neq 0$,
donc $\boxed{M \textit{ n'est pas diagonalisable.}}$

- *On a*

$$M^2=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\6&0&0&0\\0&2&0&0\end{pmatrix},\quad M^3=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\\12&0&0&0\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad M^4=0$$

et, par suite, pour tout $n\geq 4, M^n=M^4M^{n-4}=0M^{n-4}=0.$

***

(e) Préciser le noyau $Kerf$ de f ainsi qu'une base de $Kerf$.

RÉPONSE:

$aX^3+bX^2+cX+d\in \operatorname{Ker}(f)\Leftrightarrow f\left(aX^3+bX^2+cX+d\right)=0\Leftrightarrow -bX^3-2cX^2-3dX=0\Leftrightarrow b=c=d=0,$ *donc* $\operatorname{Kerf}=\left\{aX^3,a\in\mathbb{R}\right\}=\boxed{\operatorname{Vect}\left(X^3\right)}.$

La famille $\left(X^3\right)$ *est libre (un seul polynôme, non nul) et génératrice de* $\operatorname{Ker}(f)$*, donc c'est une base de* $\operatorname{Ker}(f)$*, qui est donc de dimension 1.*

***

(f) Déterminer 1'image $\Im(f)$ de f.

RÉPONSE:

$$\operatorname{Im} f=\operatorname{Vect}\left(f(1),f(X),f\left(X^2\right),f\left(X^3\right)\right)=\operatorname{Vect}\left(-3X,-2X^2,-X^3,0\right)=\boxed{\operatorname{Vect}\left(X,X^2,X^3\right)}.$$

***

2. On note id_E et 0_E respectivement, l'endomorphisme identité et l'endomorphisme nul de E, et pour tout endomorphisme v de E, on pose $v^0=id_E$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $v^k=v\circ v^{k-1}$.
   Soit u et g deux endomorphîsmes de E tels que : $u^4=0_E$, $u^3\neq 0_E$ et $g=id_E+u+u^2+u^3$.
   (a) Soit P un polynôme de E tel que $P\notin Ker\left(u^3\right)$. Montrer que la. famille $\left(P,u\left(P\right),u^2\left(P\right),u^3\left(P\right)\right)$ est une base de E.

RÉPONSE:

Soit $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ *tels que* $aP+bu(P)+cu^2(P)+du^3(P)=0.$ *(*)*
Alors, en composant $(^*)$ *par* u^3*, on obtient* $au^3(P)+bu^4(P)+cu^5(P)+du^6(P)=0$*, c'est-à-dire* $au^3(P)=0$ *(car* $u^4=0\big)$*, et donc* $a=0\left(\text{car}\, u^3(P)\neq 0\right)$.
Puis, en composant $(^*)$ *cette fois par* u^2*, on obtient* $bu^3(P)+cu^4(P)+du^5(P)=0$*, c'est-à-dire* $bu^3(P)=0$ *et donc* $b=0$.
Ensuite, en composant $(^*)$ *cette fois par* u*, on obtient* $cu^3(P)+du^4(P)=0$*, c'est-à-dire* $cu^3(P)=0$ *et donc* $c=0$.
Enfin, $(^*)$ *est devenue* $du^3(P)=0$*, et on a donc aussi* $d=0$.
La famille $\left(P,u(P),u^2(P),u^3(P)\right)$ *est donc libre, et, comme elle est composée de 4 éléments dans un espace, E, de dimension 4 , c'est une base de E.*

***

(b) Montrer que g est un automorphisme de E. Déterminer l'automorphisme réciproque g^{-1} en fonction de u.

RÉPONSE:

On a $g(P)=P+u(P)+u^2(P)+u^3(P), g(u(P))=u(P)+u^2(P)+u^3(P), g\left(u^2(P)\right)=u^2(P)+u^3(P)$ *et* $g\left(u^3(P)\right)=u^3(P)$*, donc*

$$T=\operatorname{Mat}_{(P,u(P),u^2(P),u^3(P))}(g)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\1&1&1&0\\1&1&1&1\end{pmatrix}$$

Comme T est triangulaire inférieure sans zéro sur la diagonale, T est inversible, donc g est bijectif et, par suite, $\boxed{g \text{ est bien u automorphisme de } E.}$

Un simple calcul donne

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = Id - \mathrm{Mat}_{(P,u(P),u^2(P),u^3(P))}(u)$$

donc $\boxed{g^{-1} = Id - u}$.
Rq : on aurait pu procéder complètement autrement en remarquant que

$$g \circ (Id - u) = \left(Id + u + u^2 + u^3\right) \circ (Id - u) = Id + u + u^2 + u^3 - \left(u + u^2 + u^3 + u^4\right) = Id - u^4 = Id$$

et donc directement que g est bijectif et $g^{-1} = Id - u$.

* * *

(c) Établir l'égalité $Ker\ u = Ker\,(g - id_E)$

<u>RÉPONSE:</u>

Pour tout $Q \in \mathrm{Ker}(u)$, on a $u(Q) = 0$, donc $(g - Id)(Q) = u(Q) + u^2(Q) + u^3(Q) = 0$, donc $Q \in ker(g - Id)$. Par suite, on a $\mathrm{Ker}(u) \subset \ker(g - Id)$.
De plus, comme $\mathrm{Mat}_{(P,u(P),u^2(P),u^3(P))}(g - Id) = T - I$ est de rang 3, $g - Id$ est de rang 3 , donc d'après le théorème du rang, $\dim(\mathrm{Ker}(g - Id)) = 4 - \mathrm{rg}(g - Id) = 1$.
De même, comme $\mathrm{Mat}_{(P,u(P),u^2(P),u^3(P))}(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang $3, u$ est de rang 3 , donc d'après le théorème du rang, $\dim(\ keru\ ) = 4 - \mathrm{rg}(u) = 1$.
Par suite, on a $\dim(\mathrm{Ker}(u)) = \dim(\ker(g - Id))($ et $\mathrm{Ker}(u) \subset \mathrm{Ker}(g - Id))$, donc

$$\boxed{\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(g - Id)}$$

* * *

(d) (*) Montrer que 1 est la seule valeur propre de g.

<u>RÉPONSE:</u>

Comme $T = \mathrm{Mat}_{(P,u(P),u^2(P),u^3(P))}(g)$ est triangulaire, ses valeurs propres se lisent sur sa diagonale, donc $\boxed{Sp(g) = \{1\}}$.

* * *

Exercice n°2

Soit m un réel donné strictement positif et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice M dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$$

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^3$.
Pour tout endomorphisme g de $\mathbb{R}^3$ on pose $g^0 = \mathrm{Id}$ et pour tout k de $\mathbb{N}^*$, $g^k = g \circ g^{k-1}$.

1. Déterminer le noyau $\mathrm{Ker}(f)$ et l'image $\mathrm{im}(f)$ de l'endomorphisme f. La matrice M est-elle inversible ?

RÉPONSE:

Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$u \in \mathrm{Ker}(f) \iff M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} \dfrac{1}{m}y + \dfrac{1}{m^2}z = 0 \\ mx + \dfrac{1}{m}z = 0 \\ m^2x + my = 0 \end{cases} \quad \textit{et comme } m \neq 0$$

$$u \in \mathrm{Ker}(f) \iff \begin{cases} z = -my \\ 2y = 0 \\ x = -\dfrac{1}{m}y \end{cases} \iff x = y = z = 0$$

Conclusion : $\boxed{\textit{Donc } \mathrm{Ker}(f) = \{0\}, \textit{ donc } f \textit{ bijective et } M \textit{ inversible et } \mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}^3}$

* * *

2. (a) Montrer que la matrice M^2 est une combinaison linéaire de I et de M.

RÉPONSE:

$$\textit{On a } M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \dfrac{1}{m} & \dfrac{1}{m^2} \\ m & 2 & \dfrac{1}{m} \\ m^2 & m & 2 \end{pmatrix} = \boxed{M + 2I}$$

* * *

(b) Déterminer un polynôme annulateur non nul de la matrice M .

RÉPONSE:

Donc $M^2 - M - 2I = 0$ *et le polynôme* $\boxed{P = X^2 - X - 2}$ *est annulateur de* M

* * *

(c) (*) Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M . Montrer que matrice M est-elle diagonalisable et déterminer les matrices R et D telles que $M = RDR^{-1}$.

RÉPONSE:

Si α *est valeur propre de* M *alors* $P(\alpha) = 0$ *donc* $\alpha = -1$ *ou* $\alpha = 2$.
Conclusion : $\boxed{\textit{Les seules valeurs propres } \textbf{\textit{possibles}} \textit{ sont donc } \alpha = -1 \textit{ et } 2.}$
Reste à vérifier si elles le sont ou pas :

- *Pour* $\alpha = -1$:.

  Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$(M+I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x + \dfrac{1}{m}y + \dfrac{1}{m^2}z = 0 \\ mx + y + \dfrac{1}{m}z = 0 \\ m^2x + my + z = 0 \end{cases}$ *et comme* $L_1 = \dfrac{1}{m^2}L_3$ *et* $L_2 = \dfrac{1}{m}L_3$

$\iff m^2x + my + z = 0 \iff z = -m^2x - my$

Les solutions sont donc $E_1 = \text{Vect}\left((1,0,-m),(0,1,-m)\right) \neq \{0\}$

Conclusion : $\boxed{\textit{Donc } -1 \textit{ est bien valeur propre et est associé à } \text{Vect}\left((1,0,-m),(0,1,-m)\right)}$

La famille de deux vecteurs non proportionnels $\left((1,0,-m),(0,1,-m)\right)$ *est donc génératrice de* E_1 *et libre. C'est donc une base de* E_1 *et*

Conclusion : $\boxed{\dim(E_1) = 2.}$

- *Pour* $\alpha = 2$ *:*
  Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$

  $(M-2I)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2x + \dfrac{1}{m}y + \dfrac{1}{m^2}z = 0 \\ mx - 2y + \dfrac{1}{m}z = 0 \\ m^2x + my - 2z = 0 \end{cases}$

  $\iff \begin{cases} -2x + \dfrac{1}{m}y + \dfrac{1}{m^2}\left(\dfrac{m^2}{2}x + \dfrac{m}{2}y\right) = 0 \\ mx - 2y + \dfrac{1}{m}\left(\dfrac{m^2}{2}x + \dfrac{m}{2}y\right) = 0 \\ z = \dfrac{m^2}{2}x + \dfrac{m}{2}y \end{cases} \iff \begin{cases} -\dfrac{3}{2}x + \dfrac{3}{2m}y = 0 \\ \dfrac{3}{2}mx - \dfrac{3}{2}y = 0 \\ z = \dfrac{m^2}{2}x + \dfrac{m}{2}y \end{cases}$

  $\iff \begin{cases} 0 = 0 \\ y = mx \\ z = \dfrac{m^2}{2}x + \dfrac{m}{2}y \end{cases} \iff \begin{cases} y = mx \\ z = m^2x \end{cases}$

  Les solutions sont donc $E_{-2} = \text{Vect}\left(\left(1,m,m^2\right)\right)$

  Conclusion : $\boxed{\textit{Donc } -2 \textit{ est bien valeur propre et est associé à } \text{Vect}\left(\left(1,m,m^2\right)\right)}$

  et $\left(\left(1,m,m^2\right)\right)$ *en est une famille libre (un seul vecteur non nul) et génératrice, donc une base.*

  Conclusion : $\boxed{\dim(E_{-2}) = 1}$

Conclusion : $\boxed{\textit{Les valeurs propres de } M \textit{ sont donc } \alpha = -1 \textit{ et } 2.}$

La somme des dimensions des sous espaces propres est $1 + 2 = 3 = \dim \mathbb{R}^3$

Conclusion : $\boxed{M \textit{ est donc diagonalisable.}}$

* * *

3. À l'aide des résultats de la question 2.(c), indiquer une méthode, sans faire les calculs, qui permettrait d'obtenir pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de M^n en fonction de n .

RÉPONSE:

La juxtapositon des bases des sous espaces propres $\left((1,0,-m),(0,1,-m),\left(1,m,m^2\right)\right)$ *est alors une base de* $\mathbb{R}^3$.
Donc avec $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & m \\ -m & -m & m^2 \end{pmatrix}$ *inversible et* $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *on a* $M = RDR^{-1}$ *et* $M^n = RD^nR^{-1}$ *avec* D *diagonale, on a directement* D^n.
Il resterait donc à calculer explicitement R^{-1}.

* * *

4. On pose : $p = \dfrac{1}{3}(f + \text{Id})$ et $q = -\dfrac{1}{3}(f - 2\text{Id})$.

(a) Calculer $p \circ q$ et $q \circ p$, puis pour tout n de $\mathbb{N}$, p^n et q^n.

RÉPONSE:

On passe par la matrice associée dans la base de vecteurs propres :

p apour matrice : $P = \frac{1}{3}(D+I) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *et q a pour matrice :* $Q = -\frac{1}{3}(D-2I) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

(Les opérations entre matrices diagonales se font sur la diagonale)

On a $QP = 0$ *et* $PQ = 0$ *et* $P^n = P$ *et* $Q^n = Q$ *pour* $n \geq 1$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} pq = qp = 0 \\ p^n = p \text{ et } q^n = q \text{ pour } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } p^0 = q^0 = I \text{ pour } n = 0 \end{array}}$

$* * *$

(b) En déduire pour tout n de $\mathbb{N}$, l'expression de f^n en fonction de p et q .

RÉPONSE:

On reconstitue f à partir de p et q : $f = 2p - q$ *et comme* $p \circ q = qop$ *alors par le binôme*

$$\begin{aligned} f^n &= (2p-q)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 2^n (-1)^{n-k} p^k \circ q^{n-k} \text{ suivant } k=0 \text{ et } n-k=0 \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} 2^n (-1)^{n-k} p \circ q + (-1)^n q + 2^n p \end{aligned}$$

le découpage étant valable pour $n \geq 2$ *et encore vrai pour* $n = 0$ $(p + q = Id)$ *et* $n = 1$ $(-q + 2p = f)$
Finalement

$$\begin{aligned} f^n &= (-1)^n q + 2^n p \\ &= -\frac{(-1)^n}{3}(f - 2\mathrm{Id}) + \frac{2^n}{3}(f + \mathrm{Id}) \\ &= \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n) f + \frac{1}{3}(2(-1)^n + 2^n)\,\mathrm{Id} \end{aligned}$$

$* * *$

(c) Déterminer les deux suites réelles telles que pour tout n de $\mathbb{N}$, on ait : $M^n = a_n I + b_n M$.

RÉPONSE:

et sa matrice associée est

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} M^n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n) M + \frac{1}{3}(2(-1)^n + 2^n) I \\ \text{et } a_n = \frac{1}{3}(2^n - (-1)^n) \text{ et } b_n = \frac{1}{3}(2(-1)^n + 2^n) \end{array}}$

$* * *$

(d) La formule précédente reste-t-elle valable si n appartient à $\mathbb{Z}$?

RÉPONSE:

Il faut vérifier si le produit par la candidate inverse vaut I :

$$\begin{aligned} &\left[\frac{1}{3}(2^n - (-1)^n) M + \frac{1}{3}(2(-1)^n + 2^n) I\right]\left[\frac{1}{3}\left(2^{-n} - (-1)^{-n}\right) M + \frac{1}{3}\left(2(-1)^{-n} + 2^{-n}\right) I\right] \\ = &\ \frac{1}{9}(2^n - (-1)^n)\left(2^{-n} - (-1)^{-n}\right) M^2 + \frac{1}{9}(2^n - (-1)^n)\left(2(-1)^{-n} + 2^{-n}\right) M \\ &+ \frac{1}{9}(2(-1)^n + 2^n)\left(2^{-n} - (-1)^{-n}\right) M + \frac{1}{9}(2(-1)^n + 2^n)\left(2(-1)^{-n} + 2^{-n}\right) I \end{aligned}$$

que l'on développe en se souvenant que $M^2 = M + 2I$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{9}\left(1-(-2)^n-\left(-\frac{1}{2}\right)^n+1\right)(M+2I) \\
&\quad +\frac{1}{9}\left(2\,(-2)^n+1-2-\left(\frac{-1}{2}\right)^n\right)M \\
&\quad +\frac{1}{9}\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)^n-2+1-(-2)^n\right)M \\
&\quad +\frac{1}{9}\left(4+2\left(\frac{-1}{2}\right)^n+2\,(-2)^n+1\right)I \\
&= I \text{ (bluff)}
\end{aligned}$$

il faut aimer les calculs ... pour combien de points à l'arrivé ? Simplement donner l'idée est sans doute plus rentable !
Donc la formule est encore vrai pour n négatif
Conclusion : $\boxed{\textit{La formule est vraie pour tout } n \in \mathbb{Z}}$

* * *