Épreuve HEC

E C G

Correction du DS n°4

D'après le corrigé Major Prépa de David Meneu

MATHEMATIQUES

30 Novembre 2024

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
Les questions précédées de (*) sont réservées aux cubes.

Exercice

Soit n et p deux entiers supérieurs ou égaux à 1. Si M est une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, la matrice ${}^tM$ de $\mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{R})$ désigne la transposée de M.
On identifie les ensembles $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ et $\mathbb{R}$ en assimilant une matrice de $\mathcal{M}_{1,1}(\mathbb{R})$ à son unique coefficient.
On note $\mathcal{B}_n$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{B}_p$ la base canonique de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $N \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$ $(q \in \mathbb{N}^*)$, *on admet* que ${}^t(MN) ={}^t N\,{}^tM$.

1. Soit X une matrice colonne non nulle donnée de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de composantes $x_1, x_2, ..., x_n$ dans la base $\mathcal{B}_n$.
   On pose : $A = X\,{}^tX$ et $\alpha = {}^tXX$.

   (a) Exprimer A et α en fonction de $x_1, x_2, ..., x_n$.

RÉPONSE:

$$A = X\,{}^tX = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} {x_1}^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & {x_2}^2 & \cdots & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & & & & \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & \cdots & {x_n}^2 \end{pmatrix} \textit{ donc } A = (x_ix_j)_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}}.$$

$$\alpha = {}^tXX = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2.$$

* * *

   (b) (*) Justifier que la matrice A est diagonalisable.

RÉPONSE:

La matrice réelle A étant symétrique, elle est diagonalisable.

* * *

(c) Soit f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice A dans la base $\mathcal{B}_n$. Déterminer $\mathrm{Im} f$ et $\mathrm{Ker} f$, donner une base de Imf et préciser la dimension de $Kerf$.

RÉPONSE:

D'après le calcul précédent, en notant $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$\forall i \in \{1, \dots, n\},\ f(e_i) = \begin{pmatrix} x_1x_i \\ x_2x_i \\ \vdots \\ x_nx_i \end{pmatrix} = x_i \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = x_iX.$$

On a donc :

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Vect}\big(f(e_1), \dots, f(e_n)\big) = \mathrm{Vect}(x_1X, \dots, x_nX) = \mathrm{Vect}(X).$$

Le vecteur X étant non nul, (X) est une base de l'image de f.

Déterminons le noyau de f. Soit $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$:

$$AY = 0 \iff \left\{ \begin{array}{rcl} x_1(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) & = & 0 \\ & \vdots & \\ x_n(x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) & = & 0 \end{array} \right. \iff x_1y_1 + \cdots + x_ny_n = 0$$

(la dernière équivalence se justifie par le fait que les $x_1, \dots, x_n$ ne sont pas tous nuls).
Le noyau de f est de dimension $n-1$.

* * *

(d) Calculer la matrice AX.

RÉPONSE:

$$AX = \begin{pmatrix} {x_1}^2 & x_1x_2 & x_1x_3 & \cdots & x_1x_n \\ x_2x_1 & {x_2}^2 & \cdots & \cdots & x_2x_n \\ \vdots & & & & \\ x_nx_1 & x_nx_2 & \cdots & \cdots & {x_n}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1({x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2) \\ x_2({x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2) \\ \vdots \\ x_n({x_1}^2 + \cdots + {x_n}^2) \end{pmatrix} \text{ donc } AX = \alpha X.$$

* * *

(e) (*) Déterminer les valeurs propres de A ainsi que les sous-espaces propres associés.

RÉPONSE:

Ainsi, α ($\neq 0$ car les x_i ne sont pas tous nul) est valeur propre de A et X (qui est non nul) est un vecteur propre associé.

Par ailleurs, le noyau de A étant non nul, 0 est valeur propre de A et la dimension du sous-espace propre associé $\mathrm{E}_A(0) = \mathrm{Ker}(A)$ est égale à $n-1$.

Puisque $\displaystyle\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \dim \mathrm{E}_A(\lambda) \leq n$ (c'est même une égalité car A est diagonalisable), il n'y a donc pas d'autre valeur propre et la dimension de l'espace propre associé à α est égale à 1.

* * *

2. On suppose que n et p vérifient $1 \leq p \leq n$. Soit $(V_1, V_2, ..., V_p)$ une famille libre de p vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. On note V la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ dont les colonnes sont, dans cet ordre, $V_1, V_2, ..., V_p$.
Soit g l'application linéaire de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ de matrice V dans les bases $\mathcal{B}_p$ et $\mathcal{B}_n$.

   (a) Justifier que le rang de V est égal à p. Déterminer $\mathrm{Ker} g$.

RÉPONSE:

La matrice V est de rang p car formée de p vecteurs-colonnes linéairement indépendants.
D'après le théorème du rang :

$$\dim \mathrm{Ker}(g) + \underbrace{\mathrm{rg}(g)}_{=p} = \underbrace{\dim \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})}_{=p}$$

Le noyau de g est donc réduit au vecteur nul.

* * *

   (b) Soit Y une matrice colonne de $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$.
   Montrer que l'on a $VY = 0$ si et seulement si l'on a ${}^tVVY = 0$.

RÉPONSE:

- *Si $VY = 0$, alors, en multipliant à gauche par ${}^tV$, on a : ${}^tVVY = 0$.*
- *Réciproquement, posons $X = VY \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et supposons que ${}^tVVY = 0$.*
  En multipliant à gauche par ${}^tY$ et en utilisant la propriété de la transposée rappelée en introduction et le calcul de α fait en 1.(a), on obtient :

$$0 = {}^tY\,{}^tVVY = {}^t(VY)VY = {}^tXX = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 \quad \text{où } X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

  donc $X = 0$.

* * *

   (c) En déduire que la matrice ${}^tVV$ est inversible.

RÉPONSE:

La question précédente prouve que $\mathrm{Ker}(V) = \mathrm{Ker}({}^tVV)$ et avec 2.(a), on en déduit que le noyau de ${}^tVV$ est nul, c'est-à-dire que la matrice carrée ${}^tVV \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est inversible.

* * *

Problème

Dans tout le problème :

- toutes les variables aléatoires introduites sont supposées définies sur un même espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$;
- on note n un entier supérieur ou égal à 2 .

L'objet du problème est l'étude de sommes de variables aléatoires suivant une loi de Bernoulli de même paramètre, mais qui ne sont pas nécessairement indépendantes.
Les parties II et III sont indépendantes de la partie I.

Partie I. Valeurs possibles du coefficient de corrélation linéaire dans divers schémas de Bernoulli

Dans cette partie, on considère des variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ suivant chacune la même loi de Bernoulli de paramètre p avec $0 < p < 1$, c'est à dire : $\forall k \in [\![1, n]\!], P([X_k = 1]) = p$ et $P([X_k = 0]) = 1 - p$.
On suppose que pour tout couple $(k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $k \neq \ell$, le coefficient de corrélation linéaire des variables X_k et X_ℓ est le même ; on note r ce coefficient. On a donc :

$$\forall (k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \frac{\operatorname{Cov}(X_k, X_\ell)}{\sqrt{V(X_k) V(X_\ell)}} = \begin{cases} 1 & \text{si } k = \ell \\ r & \text{si } k \neq \ell \end{cases}$$

1. (a) Dans les cas (i) et (ii) suivants, calculer la valeur de r et exprimer la variance de la variable aléatoire $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ en fonction de n et p.

   i. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes.

RÉPONSE:

Lorsque les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, on sait que :
$\forall (k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$ *avec* $k \neq \ell$, $\operatorname{Cov}(X_k, X_\ell) = 0$ *donc* $r = 0$, *et par ailleurs :*

$$V\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} V(X_k) = np(1-p)$$

On retrouve la variance de la loi binomiale $\mathcal{B}(n, p)$, ce qui est bien naturel puisque $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ est la somme de n v.a.r. de Bernoulli indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre p.

* * *

   ii. Les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont toutes égales.

RÉPONSE:

Si les variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont toutes égales, alors on peut écrire : $\forall (k, \ell) \in [\![1, n]\!]^2$ *avec* $k \neq \ell$, $\operatorname{Cov}(\mathrm{X_k}, \mathrm{X_\ell}) = \operatorname{Cov}(X_1, X_1) = V(X_1)$, *donc* $r = 1$. *Par ailleurs,* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k = n.\ X_1$, *donc* $V\left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = V(nX_1) = n^2 V(X_1) = n^2 p(1-p)$. *La loi de* $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k = nX_1$ *est par ailleurs donnée par :*

$$nX_1(\Omega) = \{0, n\}, \quad P([nX_1 = 0]) = P([X_1 = 0]) = 1 - p \quad \textit{et} \quad P([nX_1 = n]) = P([X_1 = 1]) = p$$

* * *

De plus, préciser la loi de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$ dans chacun des deux cas précédents.

(b) Montrer que pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la variance de la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{k} X_i$ est donnée par la formule :

$$V\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = kp(1-p)(1+(k-1)r)$$

RÉPONSE:

Pour tout entier $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, la variance de la variable aléatoire $\sum_{i=1}^{k} X_i$ est donnée par la formule générale :

$$V\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = \sum_{i=1}^{k} V(X_i) + \sum_{\substack{(i,j)\in \llbracket 1,k \rrbracket^2 \\ i \neq j}} \operatorname{Cov}(X_i, X_j)$$

Chacune des variances de la première somme vaut $p(1-p)$, et pour tout couple (i,j) de $\llbracket 1,k \rrbracket^2$ tel que $i \neq j, \operatorname{Cov}(X_i, X_j) = r \times \sqrt{V(X_i)\,V(X_j)} = rp(1-p)$;
il y a k^2 couples (i,j) dans $\llbracket 1,k \rrbracket^2$, et k^2-k couples tels que $i \neq j$, donc :

$$V\left(\sum_{i=1}^{k} X_i\right) = kp(1-p) + \left(k^2-k\right)\cdot rp(1-p) = kp(1-p)(1+(k-1)r)$$

* * *

(c) En déduire que le coefficient r est au moins égal à $-\dfrac{1}{n-1}$.

RÉPONSE:

On sait que $1 \leqslant k \leqslant n$ et qu'une variance est toujours positive ; dans l'expression précédente, $kp(1-p)$ est un facteur strictement positif, donc pour $k=n$ on obtient l'inégalité :

$$V\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \geqslant 0 \Longleftrightarrow 1+(n-1)r \geqslant 0 \Longleftrightarrow (n-1)r \geqslant -1 \Longleftrightarrow r \geqslant -\frac{1}{n-1}$$

* * *

2. On suppose dans cette question que n est au moins égal à 2 .

(a) Montrer que r est égal à -1 si et seulement si on a : $P([X_1=1]\cap[X_2=1]) = p(2p-1)$.

RÉPONSE:

Comme X_1 et X_2 suivent des lois de Bernoulli, on sait que leur covariance est donnée par la formule de Koenig-Huygens et le théorème de transfert pour les couples de variables aléatoires :

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X_1, X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)\,E(X_2) &= \sum_{(x,y)\in X_1(\Omega)\times X_2(\Omega)} xy \cdot P([X_1=x]\cap[X_2=y]) - p^2 \\ &= P([X_1=1]\cap[X_2=1]) - p^2\end{aligned}$$

puisque les produits xy pour $(x,y) \in X_1(\Omega)\times X_2(\Omega) = \{0,1\}^2$ sont tous nuls, sauf pour $x=y=1$. Ainsi :

$$\begin{aligned} r=-1 &\Longleftrightarrow \operatorname{Cov}(X_1,X_2) = -\sqrt{V(X_1)\,V(X_2)} \Longleftrightarrow P([X_1=1]\cap[X_2=1]) - p^2 = -p(1-p) \\ &\Longleftrightarrow P([X_1=1]\cap[X_2=1]) = -p+p^2+p^2 = p(2p-1)\end{aligned}$$

* * *

(b) Que vaut alors $P([X_1=0]\cap[X_2=0])$?

RÉPONSE:

Il faut ici penser à un principe de symétrie : puisque X_1 et X_2 suivent des lois de Bernoulli $\mathcal{B}(p)$, alors les variables $Y_1=1-X_1$ et $Y_2=1-X_2$ suivent aussi des lois de Bernoulli, de paramètre $q=1-p$ cette fois.
Les propriétés de la covariance et de la variance donnent :

$$\operatorname{Cov}(Y_1,Y_2)=\operatorname{Cov}(1-X_1,1-X_2)=(-1)^2\operatorname{Cov}(X_1,X_2)=\operatorname{Cov}(X_1,X_2)$$

puisque $\operatorname{Cov}(aX+b,cX+d)=ac\cdot\operatorname{Cov}(X,Y)$*, et :*

$$V(Y_1)=V(1-X_1)=(-1)^2V(X_1)=V(X_1)=V(X_2)=V(Y_2)$$

Bref, le coefficient de corrélation linéaire de X_1 et X_2 est le même que celui de Y_1 et Y_2.
On peut donc appliquer au couple (Y_1,Y_2) le même raisonnement que celui mené à la question précédente avec le couple (X_1,X_2) en échangeant simplement les rôles de p et $q=1-p$, de sorte que :

$$r=-1\iff P([Y_1=1]\cap[Y_2=1])=q(2q-1)\iff P([X_1=0]\cap[X_2=0])=(1-p)(1-2p)$$

puisque bien sûr, on a l'égalité d'événements $[Y_i=1]=[X_i=0]$ pour $i=1$ et $i=2$.

* * *

(c) En déduire que le coefficient r ne peut-être égal à -1 que lorsque $p=\dfrac{1}{2}$ et $P([X_1+X_2=1])=1$.

RÉPONSE:

Une probabilité étant toujours positive, et puisque $0<p<1$, les deux conditions précédentes, équivalentes à $r=-1$ donnent les implications :

$$r=-1\Longrightarrow p(2p-1)\geqslant 0\Longrightarrow 2p-1\geqslant 0\Longrightarrow p\geqslant\frac{1}{2}$$
$$\text{et } r=-1\Longrightarrow (1-p)(1-2p)\geqslant 0\Longrightarrow 1-2p\geqslant 0\Longrightarrow p\leqslant\frac{1}{2}$$

Ainsi, $r=-1$ implique $p=\dfrac{1}{2}$, mais dans ce cas les deux probabilités $P([X_1=1]\cap[X_2=1])$ et $P([X_1=0]\cap[X_2=0])$ sont nulles au vu de leurs expressions en fonction de p !
On en déduit que la somme des probabilités des deux seules autres valeurs du couple (X_1,X_2) est égale à 1 :

$$r=-1\Longrightarrow p=\frac{1}{2}\quad\text{ et }\quad P([X_1=1]\cap[X_2=0])+P([X_1=0]\cap[X_2=1])=1$$

ce qui donne bien l'implication demandée, puisque :

$$[X_1+X_2=1]=([X_1=1]\cap[X_2=0])\cap([X_1=0]\cap[X_2=1])\qquad\text{(union disjointe).}$$

* * *

3. On suppose dans cette question que n est supérieur ou égal à 3 et que $P\left(\left[\sum_{k=1}^{n}X_k=1\right]\right)=1$.

(a) Exprimer les valeurs de p et r en fonction de n.

RÉPONSE:

Cette dernière condition signifie que la variable aléatoire $\sum_{k=1}^{n}X_k$ est presque-sûrement égale à 1 : elle est donc de variance nulle ! Et on peut écrire :

$$np(1-p)(1+(n-1)r)=0 \iff 1+(n-1)r=0 \iff r=-\frac{1}{n-1}$$

et par ailleurs : $\quad r=\dfrac{\operatorname{Cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{V(X_1)\,V(X_2)}}=\dfrac{P([X_1=1]\cap[X_2=1])-p^2}{p(1-p)}$,

Mais : $\quad P([X_1=1]\cap[X_2=1])$ *est négligeable, car cet événement implique* $\left[\sum_{k=1}^{n} X_k>1\right]$ *! D'où la relation :*

$$r=\frac{0-p^2}{p(1-p)} \iff r=-\frac{p}{1-p} \iff (1-p)r=-p \iff r=pr-p \iff r=p(r-1)$$

$$\iff p=\frac{r}{r-1}=\frac{-\frac{1}{n-1}}{-\frac{1}{n-1}-1}=\frac{1}{n-1}\times\frac{n-1}{n}=\frac{1}{n}$$

* * *

(b) Déterminer les n-uplets $(x_1,x_2,\ldots,x_n)\in\{0,1\}^n$ pour lesquels la probabilité $P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k=x_k]\right)$ est strictement positive et la calculer.

RÉPONSE:

D'après ce qui précède : pour tout n-uplet $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *de* $\{0,1\}^n$ *tel que* $x_1+x_2+\ldots+x_n>1$*, l'événement* $\bigcap_{k=1}^{n}[X_k=x_k]$ *est inclus dans* $\left[\sum_{k=1}^{n} X_k>1\right]$*, donc est négligeable.*

Les seuls n-uplets $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ *de* $\{0,1\}^n$ *pour lesquels la probabilité* $P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k=x_k]\right)$ *est potentiellement non nuls, sont tous ceux dont la somme est égale à 1 , ce qui n'est possible que si un et un seul des* x_i *est égal à 1 , les autres étant égaux à 0 .*
Le nombre de ces n-uplets est égal à n : $(1,0,\ldots,0),(0,1,\ldots,0),\ldots,(0,\ldots,0,1)$*, tout comme les vecteurs de la base canonique de* $\mathbb{R}^n$ *en fait !*
Il convient enfin de remarquer que puisque les variables aléatoires X_k *suivent toutes la même loi, on peut considérer que les événements* $\bigcap_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}}[X_k=0]\cap[X_i=1] \quad (1\leqslant i\leqslant n)$ *ont tous la même probabilité ; leur union disjointe est égale à l'événement* $\left[\sum_{k=1}^{n} X_k=1\right]$ *qui est de probabilité 1 , ce qui permet d'en déduire :*

$$\forall i\in[\![1,n]\!],\quad P\left(\bigcap_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\ k\neq i}}[X_k=0]\cap[X_i=1]\right)=\frac{1}{n}$$

Ces n-uplets étant les seuls pour lesquels la probabilité $P\left(\bigcap_{k=1}^{n}[X_k=x_k]\right)$ *est non nulle.*

* * *

Partie II. Lois bêtas-binomiales

4. Soit $(x,y)\in\mathbf{R}^2$.

   (a) Justifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ est convergente si seulement si $x>0$.

RÉPONSE:

La fonction $t \mapsto t^{x-1}(1-t)^{y-1} = e^{(x-1)\ln(t)+(y-1)\ln(1-t)}$ *est définie, positive et continue sur* $]0,1[$*, l'intégrale* $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ *est impropre en 0 seulement.*

Comme $\displaystyle\lim_{t\to 0^+}(1-t)^{y-1} = 1$*, alors* $t^{x-1}(1-t)^{y-1} \underset{t\to 0^+}{\sim} t^{x-1}$*, et on sait que l'intégrale de Riemann* $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{t^{1-x}}\,\mathrm{d}t$ *est convergente si et seulement si* $1-x<1 \Longleftrightarrow x>0$.

D'après le théorème de comparaison des intégrales de fonctions continues positives :

$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ *est de même nature que* $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}\,\mathrm{d}t$*, donc convergente si et seulement si* $x>0$.

$* * *$

(b) Pour tout réel ε tel que $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$, établir à l'aide d'un changement de variable affine, l'égalité

$$\int_{\frac{1}{2}}^{1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} t^{y-1}(1-t)^{x-1}dt$$

RÉPONSE:

Pour tout réel ε *tel que* $0<\varepsilon<\dfrac{1}{2}$ *: le changement de variable affine* $u=1-t$ *donne bien, avec* $\mathrm{d}u=-\mathrm{d}t$ *:*

$$\int_{t=\frac{1}{2}}^{t=1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \int_{u=\frac{1}{2}}^{u=\varepsilon}(1-u)^{x-1}(1-(1-u))^{y-1}(-\mathrm{d}u) = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} u^{y-1}(1-u)^{x-1}\,\mathrm{d}u$$

$* * *$

(c) En déduire que l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt$ est convergente si et seulement si $x>0$ et $y>0$.

RÉPONSE:

L'intégrale $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ *est doublement impropre, en 0 et en 1 , elle est donc convergente si et seulement si les deux intégrales* $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ *et* $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ *le sont.*

On a vu que $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si* $x>0$; $\displaystyle\int_{\frac{1}{2}}^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ *converge si et seulement si* $\displaystyle\int_{t=\frac{1}{2}}^{t=1-\varepsilon} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \int_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ *admet une limite finie quand* ε *tend vers* 0^+*, ce qui est le cas si et seulement si* $y>0$*, d'après a).*

On a bien démontré que $\displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ *est convergente si et seulement si* $x>0$ *et* $y>0$.

Dans toute la suite du problème, on pose : $\quad \forall (x,y)\in\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2, \quad B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t.$

$* * *$

Dans toute la suite du problème, on pose : $\quad \forall (x,y)\in\left(\boldsymbol{R}^{+*}\right)^2, \quad B(x,y) = \displaystyle\int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}dt.$

5. Soit x et y des réels strictement positifs.

(a) À l'aide d'une intégration par parties, établir la relation : $\quad B(x+1,y) = \dfrac{x}{y}\times B(x,y+1).$

RÉPONSE:

Soient a et b deux réels tels que $0 < a < b < 1$, on réalise une intégration par parties dans l'intégrale $\displaystyle\int_a^b t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$ *en posant :*

$$\begin{aligned} u(t) &= t^x & &\longrightarrow u'(t) = x\cdot t^{x-1} \\ v'(t) &= (1-t)^{y-1} & &\longrightarrow v(t) = -\frac{1}{y}(1-t)^y \end{aligned}$$

Les fonctions u et v sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,1[$, donc :

$$\int_a^b t^x(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{y}t^x(1-t)^y\right]_a^b + \frac{x}{y}\int_a^b t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{y}b^x(1-b)^y + \frac{1}{y}a^x(1-a)^y + \frac{x}{y}\int_a^b t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t$$

où : $\displaystyle\lim_{\substack{a\to 0^+\\ b\to 1^-}} \int_a^b t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t = B(x,y+1)$, *cette intégrale étant bien convergente puisque* $x>0$ *et* $y>0 \Longrightarrow y+1>0$.

Puisque $x>0$ *et* $y>0$, $\displaystyle\lim_{a\to 0^+} a^x = 0$ *et* $\displaystyle\lim_{a\to 0^+}(1-a)^y = 1$ *donc* $\displaystyle\lim_{a\to 0^+}\frac{1}{y}a^x(1-a)^y = 0$ *;*

Puisque $x>0, y>0$ *et* $\displaystyle\lim_{b\to 1^-} 1-b = 0^+$, $\displaystyle\lim_{b\to 1^-}(1-b)^y = 0$ *et* $\displaystyle\lim_{b\to 1^-} b^x = 1$ *donc* $\displaystyle\lim_{b\to 1^-} -\frac{1}{y}b^x(1-b)^y = 0$ *; en faisant tendre a vers 0^+ et b vers 1^-, on obtient bien la relation :*

$$B(x+1,y) = \frac{x}{y}B(x,y+1)$$

* * *

(b) En déduire l'égalité : $\quad B(x,y+1) = \dfrac{y}{x+y}\times B(x,y)$.

RÉPONSE:

Avec de la pratique, on apprend à chercher d'autres relations entre les objets manipulés ; en écrivant :

$$\begin{aligned} B(x,y+1) &= \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^y\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}(1-t)\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \left(t^{x-1}(1-t)^{y-1} - t^x(1-t)^{y-1}\right)\mathrm{d}t = B(x,y) - B(x+1,y) \end{aligned}$$

Et la relation précédente donne donc :

$$B(x,y+1) = B(x,y) - \frac{x}{y}B(x,y+1) \Longleftrightarrow \left(1+\frac{x}{y}\right)B(x,y+1) = B(x,y) \Longleftrightarrow B(x,y+1) = \frac{y}{x+y}B(x,y)$$

* * *

6. Pour tout réel z, soit $\left((z)^{[m]}\right)_{m\in\mathbf{N}}$ la suite définie par : $(z)^{[0]} = 1$ et $\forall m\in\mathbf{N}, (z)^{[m+1]} = (z+m)\times(z)^{[m]}$.
(par exemple, pour tout $m\in\mathbf{N}$, on a $(1)^{[m]} = m!$)
Établir pour tout $(x,y)\in\left(\mathbf{R}^{+*}\right)^2$ et pour tout couple (k,ℓ) d'entiers tels que $0\leqslant k\leqslant \ell$, la relation :

$$B(x+k,y+\ell-k) = \frac{(x)^{[k]}\times(y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}}\times B(x,y)$$

RÉPONSE:

Pour tout $(x,y) \in \left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ et tout couple d'entier (k,ℓ) d'entiers tels que $0 \leqslant k \leqslant \ell$:

$$\begin{aligned}
B(x+k, y+\ell-k) &= \frac{x+k-1}{x+\ell-k} \times B(x+k-1, y+\ell-(k-1)) \\
&= \frac{x+k-1}{y+\ell-k} \times \frac{x+k-2}{y+\ell-(k-2)} \times B(x+k-2, y+\ell-(k-2)) \\
&= \ldots \quad (k \text{ itérations du processus }) \\
&= \frac{(x+k-1)(x+k-2)\ldots(x+1)x}{(y+\ell-k)(y+\ell-(k-1))\ldots(y+\ell-1)} \times B(x, y+\ell)
\end{aligned}$$

Ensuite :

$$\begin{aligned}
B(x, y+\ell) &= \frac{y+\ell-1}{x+y+\ell-1} \times B(x, y+\ell-1) \\
&= \frac{(y+\ell-1)(y+\ell-2)}{(x+y+\ell-1)(x+y+\ell-2)} \times B(x, y+\ell-2)
\end{aligned}$$

... (ℓ itérations du processus)

$$= \frac{(y+\ell-1)(y+\ell-2)\ldots(y+1)y}{(x+y+\ell-1)(x+y+\ell-2)\ldots(x+y)} \times B(x,y)$$

En simplifiant les produits $(y+\ell-1)(y+\ell-2)\ldots(y+1)y$ et $(y+\ell-k)(y+\ell-(k-1))\ldots(y+\ell-1)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
B(x+k, y+\ell-k) &= \frac{x(x+1)\ldots(x+k-2)(x+k-1) \times y(y+1)\ldots(y+\ell-k-1)}{(x+y)(x+y+1)\ldots(x+y+\ell-2)(x+y+\ell-1)} \times B(x,y) \\
&= \frac{(x)^{[k]} \times (y)^{[\ell-k]}}{(x+y)^{[\ell]}} \times B(x,y)
\end{aligned}$$

* * *

7. Soit a et b des réels strictement positifs.

   Pour $k \in [[0,n]]$, on pose : $\quad p_k = \binom{n}{k} \dfrac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$.

   (a) À l'aide de la relation obtenue dans la question 6, montrer que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$.

RÉPONSE:

D'après la relation précédente :

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{B(a+k, b+n-k)}{B(a,b)} = \frac{1}{B(a,b)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \int_0^1 t^{a+k-1}(1-t)^{b+n-k-1}\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} \times \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}\,\mathrm{d}t \qquad \text{on reconnaît le binôme de Newton}$$

$$= \frac{1}{B(a,b)} \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1}\,\mathrm{d}t \qquad \text{puisque } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}\,\mathrm{d}t = (t+1-t)^n = 1$$

$$\sum_{k=0}^{n} p_k = \frac{B(a,b)}{B(a,b)} = 1$$

On dit qu'une variable aléatoire S suit la loi bêta-binomiale $\mathcal{B}(n;a,b)$ si $S(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et si :

$$\forall k \in [\![0,n]\!], \quad P([S=k]) = \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$$

* * *

On dit qu'une variable aléatoire S suit une loi bêta-binomiale $\boldsymbol{B}(n;a,b)$ si $S(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et si :

$$\forall k \in \Big[[0,n], \quad P(S=k) = \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}}$$

(b) Reconnaître la loi $\boldsymbol{B}(n;1,1)$.

RÉPONSE:

Lorsque $a=b=1$: pour tout entier $k \in [\![0,n]\!]$,

$$P([S=k]) = \binom{n}{k} \frac{(1)^{[k]} \times (1)^{[n-k]}}{(2)^{[n]}} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \times \frac{k!(n-k)!}{2 \times 3 \times \ldots \times (2+n-1)} = \frac{n!}{2 \times 3 \times \ldots \times (n+1)} = \frac{1}{n+1}$$

ce qui permet de conclure que la loi $\mathcal{B}(n;1,1)$ est la loi uniforme sur $[\![0,n]\!]$.

* * *

(c) Montrer que l'espérance d'une variable aléatoire S qui suit la loi $\boldsymbol{B}(n;a,b)$ est égale à $\dfrac{na}{a+b}$.

RÉPONSE:

Une variable S suivant la loi $\mathcal{B}(n;a,b)$ est finie, donc admet une espérance qui vaut :

$$\begin{aligned}
E(S) &= \sum_{k=\cancel{1}}^{n} kP(S=k) = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} \frac{(a)^{[k]} \times (b)^{[n-k]}}{(a+b)^{[n]}} \\
&= \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} \times \frac{B(a+k, b+n-k)}{B(a,b)} \qquad \textit{formule sans nom} \\
&= \frac{n}{B(a,b)} \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} B(a+j+1, b+n-j-1) \qquad [j=k-1] \\
&= \frac{n}{B(a,b)} \int_0^1 \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} t^{a+j} (1-t)^{b+n-j-2} \, \mathrm{d}t \\
&= \frac{n}{B(a,b)} \int_0^1 t^a (1-t)^{b-1} \times \underbrace{\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} t^j (1-t)^{n-1-j}}_{=(t+1-t)^{n-1}=1} \, \mathrm{d}t
\end{aligned}$$

$$= \frac{n \cdot B(a+1,b)}{B(a,b)} = \frac{n \times \frac{a}{b} B(a,b+1)}{B(a,b)} = \frac{n \times \frac{a}{\cancel{b}} \times \frac{b}{a+b} B(a,b)}{B(a,b)} \qquad \textit{d'après 5.a) et 5.b)}$$

$$E(S) = \frac{na}{a+b}$$

* * *

Partie III. Un modèle possible dans le cas où $n = 2$

Soit a et b des réels strictement positifs et X_1 et X_2 deux variables aléatoires à valeurs dans $\{0,1\}$ telles que :

$$\forall (x_1, x_2) \in \{0,1\}^2 \quad P([X_1 = x_1] \cap [X_2 = x_2]) = \frac{B(a + x_1 + x_2, b + 2 - x_1 - x_2)}{B(a,b)}$$

8. (a) Montrer que les deux variables X_1 et X_2 suivent la même loi de Bernoulli.

RÉPONSE:

La définition générale précédente se décline de la façon suivante :

$$P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) = \frac{B(a+1, b+1)}{B(a,b)} \quad \text{et} \quad P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \frac{B(a+2, b)}{B(a,b)}$$

où, d'après les relations de la Partie II :
$B(a+1, b+1) = \frac{a}{b+1} B(a, b+2) = \frac{a}{b+1} \times \frac{b+1}{a+b+1} B(a, b+1) = \frac{a}{a+b+1} \times \frac{b}{a+b} B(a,b),$
donc : $P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) = \frac{ab}{(a+b)(a+b+1)}.$
De même : $B(a+2, b) = \frac{a+1}{b} B(a+1, b+1) = \frac{a+1}{b} \times \frac{a \times b}{(a+b)(a+b+1)} B(a,b),$
Donc : $P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$. *On en déduit :*
$P([X_1 = 1]) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) + P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \frac{a}{(a+b)(a+b+1)} \times (a \neq b + 1) = \frac{a}{a+b}$
La variable X_1 suit donc la loi de Bernoulli de paramètre $\frac{a}{a+b}$. Les rôles de X_1 et X_2, x_1 et x_2 étant symétriques dans la définition générale au début de cette partie, c'est aussi la loi de X_2.

* * *

(b) Montrer que la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit la loi bêta-binomiale $\boldsymbol{B}(2; a, b)$.

RÉPONSE:

La variable aléatoire $X_1 + X_2$ a pour univers-image $\{0,1,2\}$ et :

- $P([X_1 + X_2 = 0]) = P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = \frac{B(a, b+2)}{B(a,b)} = \frac{b(b+1)}{(a+b)(a+b+1)}$ *puisque :*

$$B(a, b+2) = \frac{b+1}{a+b+1} B(a, b+1) = \frac{b(b+1)}{(a+b)(a+b+1)} B(a,b)$$

- $P([X_1 + X_2 = 2]) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)}$ *comme on l'a déjà vu.*
- $P([X_1 + X_2 = 1]) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) + P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) = \frac{2ab}{(a+b)(a+b+1)}$ *toujours d'après a), les deux probabilités dont on fait la somme étant égales.*

On vérifie que les valeurs obtenues correspondent à celles de la loi bêta-binomiale $\mathcal{B}(2; a, b)$:

- $\binom{2}{0} \frac{(a)^{[0]} \times (b)^{[2]}}{(a+b)^{[2]}} = \frac{1 \times b(b+1)}{(a+b)(a+b+1)} = P(X_1 + X_2 = 0).$
- $\binom{2}{1} \frac{(a)^{[1]} \times (b)^{[1]}}{(a+b)^{[2]}} = \frac{2ab}{(a+b)(a+b+1)} = P(X_1 + X_2 = 1)$
- $\binom{2}{2} \frac{(a)^{[2]} \times (b)^{[0]}}{(a+b)^{[2]}} = \frac{a(a+1) \times 1}{(a+b)(a+b+1)} = P(X_1 + X_2 = 2).$

* * *

(c) Établir la relation : $P_{[X_1=1]}([X_2=1]) = \dfrac{a+1}{a+b+1}$.

RÉPONSE:

$$P_{[X_1=1]}([X_2=1]) = \frac{P([X_1=1]\cap[X_2=1])}{P([X_2=1]} = \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} \times \frac{a+b}{a} = \frac{a+1}{a+b+1}.$$

* * *

9. La fonction Python suivante dont le script est incomplet (lignes (5) et (6)), effectue une simulation des deux variables X_1 et X_2 qu'elle place dans un vecteur ligne à deux composantes.

```
1  def randbetabin(a,b):
2          x=np.zeros([1,2])
3          u=(a+b)*np.rand()
4          v=(a+b+1)*np.rand()
5          if u<a :
6                  x[0][0]=1
7                  if ... :
8                          x[0][1]=1
9          elif ... :
10                         x[0][1]=1
11         return(x)
```

(a) Préciser la loi simulée par la variable u de la ligne (3).

RÉPONSE:

L'appel à la fonction rand() simule la loi uniforme sur $[0,1]$ *; d'après le cours sur la loi uniforme,* (a+b)∗rand() *simule donc la loi uniforme sur* $[0, a+b]$*, de fonction de répartition*

$$F_U : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \dfrac{x}{a+b} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a+b \\ 1 & \text{si } x \geqslant a+b \end{cases}$$

Si U *est une variable aléatoire suivant cette loi :* $0 < a < a+b$*, donc :*
$P([U<a]) = F_U(a) = \dfrac{a}{a+b} = P([X_1=1])$*, ce qui explique la partie du test :*
`if (u<a) then x (1,1)=1.`

* * *

(b) Compléter les lignes (5) et (6).

10. (a) Calculer le coefficient de corrélation linéaire de X_1 et X_2.

RÉPONSE:

Puisque $P_{[X_1=1]}([X_2=1]) = \dfrac{a+1}{a+b+1}$ *correspond aussi à la probabilité* $P([V < a+1])$ *lorsque* $V \hookrightarrow \mathcal{U}([0, a+b+1])$*, la condition du deuxième test est bien : if* $(\mathrm{v} < \mathrm{a}+1)$ *then* $\mathrm{x}(1,2)=1$.
Le else de la ligne 6 signifie que ($\mathbf{u} < \mathrm{a}$ *) n'est pas réalisé, c'est donc le contraire qui l'est, et* $\mathrm{x}(1,1)$ *reste égal à 0 comme défini initialement à la ligne 2.*
On utilise dans ce cas la relation :
$P_{[X_1=0]}([X_2=1]) = \dfrac{P([X_1=0]\cap[X_2=1])}{P(X_1=0)} = \dfrac{ab}{(a+b)(a+b+1)} \times \dfrac{a+b}{b} = \dfrac{a}{a+b+1} = P(V<a)$
pour définir la condition du dernier test (voir ci-dessus).
10. a) La covariance des deux variables de Bernoulli est, comme on l'a rappelé au début de la Partie I :

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}(X_1,X_2) &= E(X_1X_2)-E(X_1)E(X_2) = P([X_1=1]\cap[X_2=1]) - P([X_1=1])\times P([X_2=1])\\ &= \frac{a(a+1)}{(a+b)(a+b+1)} - \frac{a^2}{(a+b)^2} = \frac{a}{a+b}\times\left(\frac{a+1}{a+b+1}-\frac{a}{a+b}\right)\\ &= \frac{a}{a+b}\times\frac{a^2+ab+a+b-a^2-ab-a}{(a+b)(a+b+1)} = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}\end{aligned}$$

$V(X_1) = \dfrac{a}{a+b}\times\left(1-\dfrac{a}{a+b}\right) = \dfrac{ab}{(a+b)^2}$, *donc le coefficient de corrélation linéaire de* X_1 *et* X_2 *est :*

$$r_{X_1,X_2} = \frac{\operatorname{Cov}(X_1,X_2)}{\sqrt{V(X_1)V(X_2)}} = \frac{ab}{(a+b)^2(a+b+1)}\times\frac{(a+b)^2}{ab} = \frac{1}{a+b+1}$$

* * *

(b) Soit (p,r) un couple de réels vérifiant $0<p<1$ et $0<r<1$.
Expliquer comment utiliser la fonction `randbetabin` pour simuler deux variables aléatoires suivant une même loi de Bernoulli de paramètre p et dont le coefficient de corrélation linéaire est égal à r.

RÉPONSE:

Soit (p,r) *un couple de réels vérifiant* $0<p<1$ *et* $0<r<1$.
La fonction randbetabin (a, b) *simule, d'après les calculs précédents, deux variables de Bernoulli de paramètre* $\dfrac{a}{a+b}$ *et de coefficient de corrélation linéaire* $\dfrac{1}{a+b+1}$.
On cherche donc à exprimer a *et* b *en fonction de* p *et* r *tels que :*
$r=\dfrac{1}{a+b+1} \iff a+b+1=\dfrac{1}{r} \iff a+b=\dfrac{1}{r}-1=\dfrac{1-r}{r}$,
et $p=\dfrac{a}{a+b} \iff a=(a+b)p=\dfrac{p(1-r)}{r}$, *d'où :* $\quad b=\dfrac{1-r}{r}-a=\dfrac{(1-p)(1-r)}{r}$.
Pour p *et* r *donnés, on simule donc deux variables aléatoires* X_1 *et* X_2 *de loi de Bernoulli de paramètre* p *et de coefficient de corrélation linéaire* r *via l'appel :*

```
randbetabin(p*(1-r)/r,(1-p)*(1-r)/r).
```

* * *