Chapitre n°9

Variables aléatoires à densités

Dans tout le chapitre, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathrm{P})$ désignera un espace probabilisé quelconque et X une variable aléatoire définie sur cet espace. On notera F_X la fonction de répartition de X.

I. Avant-propos

Définition 1.1

Si X est une variable aléatoire, la fonction de répartition de X est la fonction F_X définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F_X(t) = P([X \leq t])$$

La fonction de répartition est toujours continue par morceaux mais pas (forcément) continue partout sur $\mathbb{R}$.

Exercice 1

1. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$.
2. Même question pour $X \hookrightarrow \mathcal{G}(p)$.

Remarques :

R1 – On peut montrer que, si X est une variable aléatoire avec $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X = n) = F_X(n) - F_X(n-1)$$

R2 – Lorsqu'on considère une certaine fonction, on peut se demander si on peut lui associer une variable aléatoire, c'est à dire si c'est la fonction de répartition d'une certaine variable aléatoire X. C'est l'objet de la propriété ci-dessous.

Proposition 1.2

Une fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction de répartition d'une variable aléatoire X si et seulement si

1. F est croissante sur $\mathbb{R}$;
2. F est continue à droite en tout point ;
3. F admet des limites en $-\infty$ et $+\infty$ et vérifie $\lim\limits_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} F_X(x) = 1$.

II. Variables aléatoires à densité

II. 1 Généralités

Définition 2.1

Soient X une variable aléatoire. On dit que X est une **variable à densité** lorsque :

- F_X est continue sur $\mathbb{R}$,
- F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.

Méthode :

Pour démontrer qu'une variable aléatoire X de fonction de répartition F_X est à densité, il suffit de vérifier que

1. F_X est croissante sur $\mathbb{R}$,
2. $\lim\limits_{t \to -\infty} F_X(t) = 0$ et $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) = 1$,
3. F_X est continue sur $\mathbb{R}$,
4. F_X est de classe C^1 sur $\mathbb{R}$, sauf peut-être en un nombre fini de points.

Exercice 2

Soit X une variable aléatoire réelle telle que $F_X(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ t & \text{si } 0 < t < 1 \\ 1 & \text{si } t \geqslant 1. \end{cases}$

1. Représenter F_X.
2. Montrer que X est une variable aléatoire à densité.

Remarque :

Si X est une variable aléatoire discrète, alors sa fonction de répartition est constante par morceaux sur $\mathbb{R}$, elle n'est donc pas continue sur $\mathbb{R}$:

$$\boxed{\text{Les variables aléatoires discrètes ne sont pas à densité}}$$

Exercice 3

Considérons la fonction $F : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x < 0 \\ 1 - e^{-x} & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$ Montrer que F est la fonction de répartition d'une variable à densité.

Remarque :

Si on considère X une variable aléatoire admettant la fonction précédente comme fonction de répartition, et qu'on note $Y = \max(1, X)$, on peut montrer (bon exercice) que Y n'est ni discrète, ni à densité.

Définition 2.2

Soient X une variable à densité et F_X sa fonction de répartition.
On appelle **densité** de X toute fonction f_X, définie sur $\mathbb{R}$ telle que :

- $\forall t \in \mathbb{R},\ f_X(t) \geq 0.$
- pour tout réel t où F_X est de classe $\mathcal{C}^1$:
$$f_X(t) = F_X^{'}(t).$$

Attention:

- Une densité n'est pas unique et il important de donner une valeur arbitraire positive à f_X en les points où F_X n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$.
- On ne parle donc jamais de **la** densité, mais **d'une** densité de X.
- Ainsi si f et g sont deux densités de X, elles sont égales sauf en un nombre fini de points.
- Si F_X est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, alors il n'y a qu'une seule densité $f_X = F_X'$ qui est alors continue sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4

Donner une densité de la variable X des exercices 2. et 3

Remarque :

En théorie il est possible de donner des valeurs arbitraires aux points de discontinuité. En pratique, **on ne le fait pas**. Quand c'est possible, on prolonge par continuité sur un des intervalles.

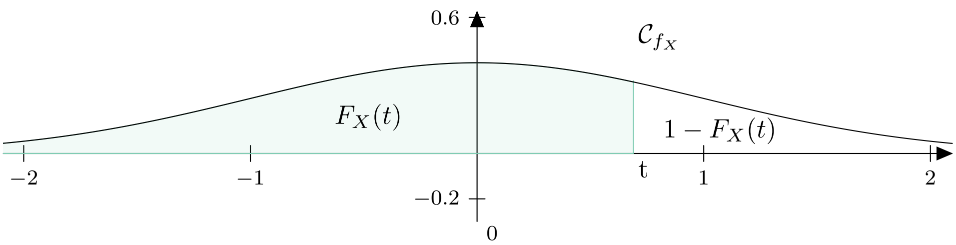
Proposition 2.3 — Lien entre densité et fonction de répartition

Soit X une variable aléatoire admettant f_X comme densité. Alors pour tout réel t, on a :

- $F_X(t) = \mathrm{P}(X \leqslant t) =$

- $1 - F_X(t) = P(X > t) =$

Représentation graphique des propriétés fondamentales.



Remarques :

R1 – Les intégrales précédentes sont nécessairement convergentes dès que f_X est une densité.

R2 – Si f_X est continue sur $\mathbb{R}$, F_X sera de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

R3 – Sachant que $\lim\limits_{t \to +\infty} F_X(t) =$, on a :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)\,dt =$$

Proposition 2.4

Si X est une variable aléatoire à densité, alors pour tout réel t, $\mathrm{P}(X = t) =$

Démonstration. □

Proposition 2.5

Soient X une variable aléatoire de densité f_X et $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$. Alors :

$$\mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant b) = \mathrm{P}(a \leqslant X < b) = \mathrm{P}(a < X \leqslant b) = \mathrm{P}(a \leqslant X \leqslant b) =$$

Exercice 5

Soit X la variable de l'exemple 2. Calculer $P(-1 \leq X \leq 0.5)$.

Remarque :

On peut généraliser la proposition précédente. Si D est un domaine de $\mathbb{R}$

$$P(X \in D) = \int_D f(t)\,\mathrm{d}t$$

II. 2 Caractérisation des densités

Si f_X est une densité d'une variable aléatoire X alors :

- f_X est positive sur $\mathbb{R}$.
- f_X est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre finie de points (car F_X est $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf en un nombre fini de points).
- L'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Réciproquement, on à la proposition suivante :

Proposition 2.6

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$. Si :

- f est positive sur $\mathbb{R}$.
- f est continue sur $\mathbb{R}$ éventuellement privé d'un nombre fini de points.
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Alors f est une densité d'une variable aléatoire.

Exercice 6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$$

Montrer que f est une densité d'une variable aléatoire X puis déterminer la fonction de répartition F_X de X.

Exercice 7

Montrer dans les cas suivant que $f$est une densité de probabilité et calculer la fonction de répartition d'une variable X de densité f :

1. $f : x \mapsto \dfrac{1}{2}e^{-|x|}$
2. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \in [-1,1] \\ \dfrac{1}{2x^2} & \text{sinon} \end{cases}$

Remarques :

R1 – Si X est une variable aléatoire à densité dont la densité est non nulle sur $[a, b]$ (avec $a \leq b$) et nulle ailleurs alors la fonction de répartition est nulle sur $]-\infty, a[$ et vaut 1 sur $]b, +\infty[$.

R2 – On peut trouver une densité à partir de la fonction de répartition, et réciproquement. Alors

La fonction de répartition d'une VA caractérise sa loi

est équivalent à

La densité associée à une VA caractérise sa loi

II. 3 Transformation d'une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire à densité, de densité f_X et de fonction de répartition F_X. Pour toute fonction g définie et continue sur $X(\Omega)$, on peut définir la variable aléatoire $Y = g(X)$.

Méthode :

Déterminer si la V.A $Y = g(X)$ est à densité et, le cas échéant, en donner une densité :

- on commence par réfléchir à $Y(\Omega)$ (en principe, une inclusion suffit...),
- on détermine la fonction de répartition de Y (on veille à bien justifier les égalités d'évènements en jeu...),
- on regarde si F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et $\mathcal{C}^1$ sauf éventuellement en un nombre fini de points,
- si c'est le cas, alors on donne une densité en dérivant F_Y là où elle est $\mathcal{C}^1$ et en donnant des valeurs "arbitraires positives" ailleurs (attention à la dérivée d'une composée...).

Exercice 8

Dans les cas suivants, on considère une variable aléatoire X de densité f_X, continue sur $\mathbb{R}$ et de fonction de répartition F_X. On considère également que $X(\Omega) = \mathbb{R}$.

1. Montrer que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a \neq 0$, la variable aléatoire $Y = aX + b$ est à densité et en donner une densité.
2. Montrer que la variable aléatoire $Y = \exp(X)$ est à densité et en donner une densité.
3. Montrer que la variable aléatoire $Y = |X|$ est à densité et en donner une densité.
4. Montrer que la variable aléatoire $Y = X^2$ est à densité et en donner une densité.

II. 4 Indépendance

Certain.e.s résultats ou définitions déjà introduit.e.s dans le Chapitre 6 sur les couples de variables discrètes peuvent également avoir un sens dans le cadre de variables aléatoires continues.

Définition 2.7

On dit que deux v.a. à densité X et Y sont indépendantes si et seulement si, pour tous intervalles I et J

$$P([X \in I] \cap [Y \in J]) = P([X \in I]) \times P([Y \in J])$$

On dit qu'une famille $(X_1, \ldots, X_n)$ de variables aléatoires à densité est mutuellement indépendantes si, pour toute partie $P \subset [\![1, n]\!]$ et $I_1, \ldots I_n$ des intervalles :

$$P\left(\bigcap_{j \in P} [X_j \in I_j]\right) = \prod_{j \in P} P(X_j \in I_j)$$

Proposition 2.8 — Lemme des coalitions

- Si X et Y sont deux v.a. à densité indépendantes et si f et g sont deux fonctions numériques définies respectivement sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.
- Soient $X_1, \ldots, X_n$ mutuellement indépendantes et soit $p \in [\![2, n-1]\!]$. Alors toute variable aléatoire fonction des variables $X_1, \cdots, X_p$ est indépendante de toute variable aléatoire fonction des variables $X_{p+1}, \cdots, X_n$.

III. Lois à densité usuelles

III. 1 Loi uniforme sur $[a, b]$ avec $a < b$

Définition 3.1

Soit X une variable aléatoire. On dit que X suit la **loi uniforme** sur $[a, b]$, et on note $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([a, b]\big)$, lorsque X a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Proposition 3.2

Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$ et X une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$. Alors la fonction de répartition de X, notée F_X, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$F_X(t) = \begin{cases} & \text{si} \quad t < a \\ & \text{si} \quad t \in [a, b] \\ & \text{si} \quad t > b \end{cases}$$

Démonstration. □

Exemple :

Si X suit une loi uniforme sur $[a, b]$, sa fonction de répartition est définie par : $F_X(t) = \begin{cases} & \text{si} \quad t < 0 \\ & \text{si} \quad t \in [0, 1] \\ & \text{si} \quad t > 1 \end{cases}$

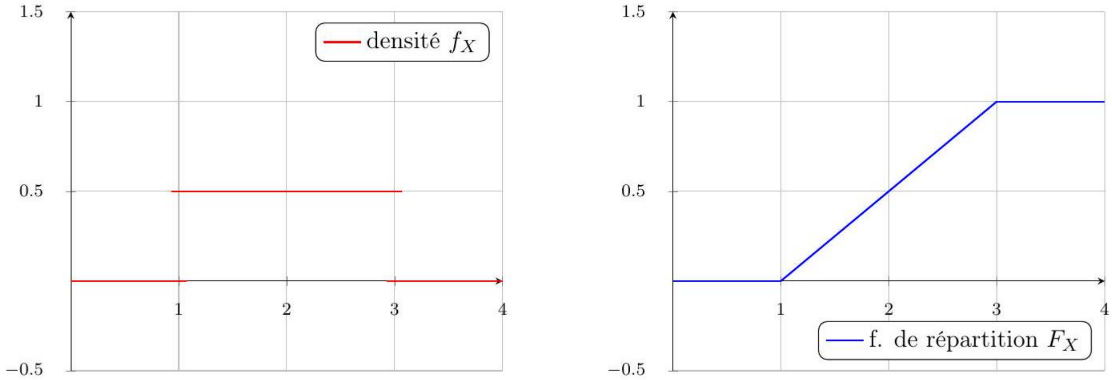
Remarque :

Le choix de la valeur d'une densité en un nombre fini de points étant arbitraire, la loi uniforme sur $[a, b]$ est la même que la loi uniforme sur $]a, b]$, sur $[a, b[$ ou sur $]a, b[$. En effet, $P(X = a) = P(X = b) = 0$, on peut donc changer la densité sans changer la loi. Par exemple, on peut choisir pour densité :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in]a, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Courbe représentative de f_X

On représente ci-dessous une densité f_X et la fonction de répartition F_X de la loi uniforme $X \hookrightarrow \mathcal{U}([1; 3])$.



Exercice 9

Comment simuler une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $[a, b]$ avec Python ?

Exercice 10

Soit X une v.a. suivant une loi uniforme sur $[-1, 1]$. On pose $Y = |X|$ et on admet que Y est une v.a.

1. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité.
2. Quelle est la loi de Y ?
3. Comment simuler Y à l'aide de Python ?

Attention:

Ne pas confondre une loi uniforme sur $[a, b]$ et une loi uniforme sur $[\![a\,;\,b]\!]$.

Proposition 3.3 — Transformation affine de loi uniforme

Soit X une variable aléatoire à densité.

$$X \hookrightarrow \mathcal{U}([0, 1]) \Leftrightarrow (b-a)X + a \hookrightarrow$$

Démonstration. □

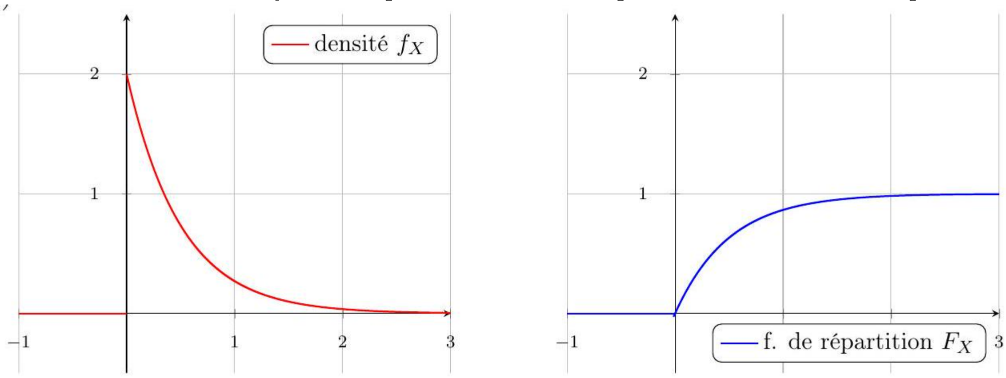
III. 2 Lois exponentielles

Définition 3.4

Soit X une variable aléatoire. On dit que X suit la **loi exponentielle** de paramètre λ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$, et on note $X \hookrightarrow \mathrm{E}(\lambda)$, lorsque X a pour densité la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} & \text{si } x < 0 \\ & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On représente ci-dessous une densité f_X ainsi que la fonction de répartition F_X d'une loi exponentielle $X \hookrightarrow \mathcal{E}(2)$.



Remarque :

Comme $f(x) = 0$ pour $x \in \mathbb{R}_-^*$, les valeurs prises par X sont positives : $\forall x < 0$, $F_X(x) = P(X \leq x) = 0$. De plus, sachant que $P(X = 0) = 0$, on peut choisir une autre densité pour X : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \lambda e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$.

Proposition 3.5

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Alors la fonction de répartition de X, notée F_X, est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $F_X(t) = \begin{cases} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$

Exercice 11

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, $\lambda > 0$. On pose $Y = X^2$ et on admet que Y est une v.a.

1. Déterminer la fonction de répartition de Y.
2. Montrer que Y est une variable aléatoire à densité.
3. Déterminer une densité de Y.

Proposition 3.6

Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ. Alors pour tout $t, h \in \mathbb{R}^+$, on a :

$$\mathrm{P}(X > t + h) = \mathrm{P}(X > t) \times \mathrm{P}(X > h)$$

Remarque :

La propriété $\mathrm{P}(X > t+h) = \mathrm{P}(X > t) \times \mathrm{P}(X > h)$ pour tout $t, h \in \mathbb{R}^+$ s'appelle **l'absence de mémoire** de la variable aléatoire. En effet, on peut la réécrire : pour tout $t, h \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathrm{P}_{[X>t]}(X > t+h) = \mathrm{P}(X > h)$$

Proposition 3.7

Soit X une variable aléatoire à densité positive telle que pour tout $x > 0$, $P(X > x) > 0$.
Alors la variable X est sans mémoire si et seulement si X suit une loi exponentielle.

III. 3 Les lois normales

On peut montrer la convergence de l'intégrale suivante dont on ne peut par contre, avec le programme d'ECG, qu'admettre la valeur :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$$

Les lois normales (et notamment la loi normale centrée-réduite) jouent un rôle crucial en probabilités et statistiques, notamment grâce au théorème de la limite centrale, point ESSENTIEL du programme de Maths Appliquées. Il faut se familiariser avec la loi normale !!!

Loi normale centrée réduite

Définition 3.8

Une variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite, notée $\mathcal{N}(0,1)$, si une densité de X est la fonction φ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$$

La fonction de répartition d'une telle variable aléatoire est la fonction, notée Φ, définie par

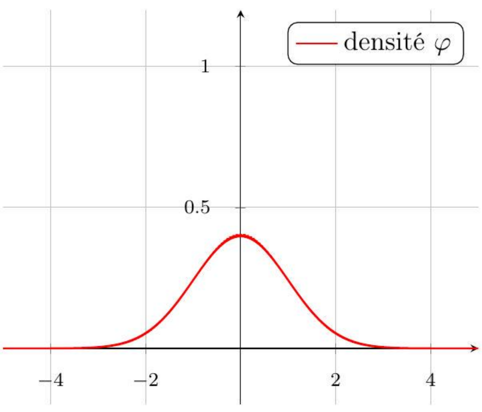
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t$$

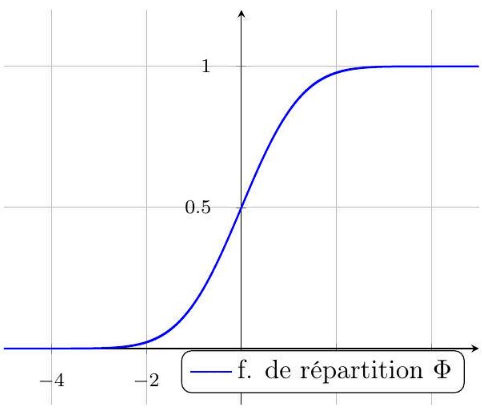
Remarques :

R1 – On ne peut pas exprimer la fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite à l'aide des fonctions usuelles.

R2 – Les calculs explicites d'images par Φ se font alors avec la table de valeurs (voir Appendice) ou avec un ordinateur. Cependant, on peut déduire des propriétés de la gaussienne tout un tas de formule à savoir retrouver en un clin d'oeil.

On représente ci-dessous la densité φ ainsi que la fonction de répartition Φ d'une variable aléatoire de loi normale centrée réduite $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$.





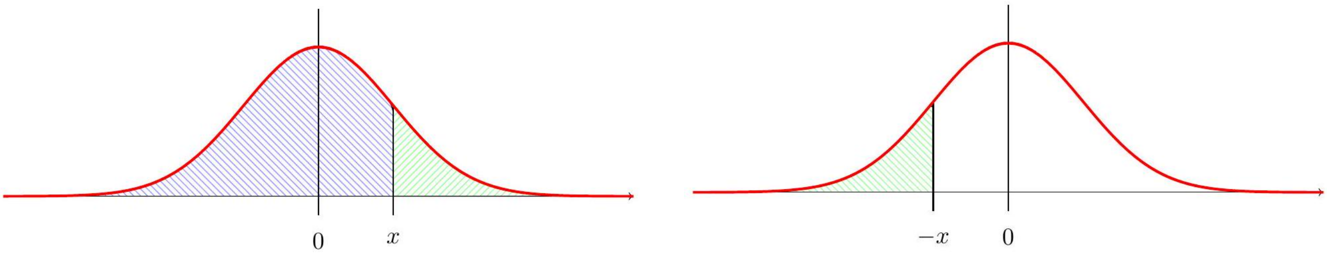
Proposition 3.9

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Par parité de notre densité, on déduit les résultats suivants, illustrés par les figures ci-après.

1. La médiane et la moyenne coïncident :

2. $\forall x \in \mathbb{R}$ $\qquad$ $\Phi(0) = P(X \leq 0) =$ $\qquad$ $\Phi(-x) =$

3. $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(|X| \leq x) =$



Exercice 12

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$. Déterminer, à l'aide de la table de la loi normale centrée réduite fournie en appendice, $x > 0$ tel que $P(-x \leq X \leq x) \simeq 0,95$.

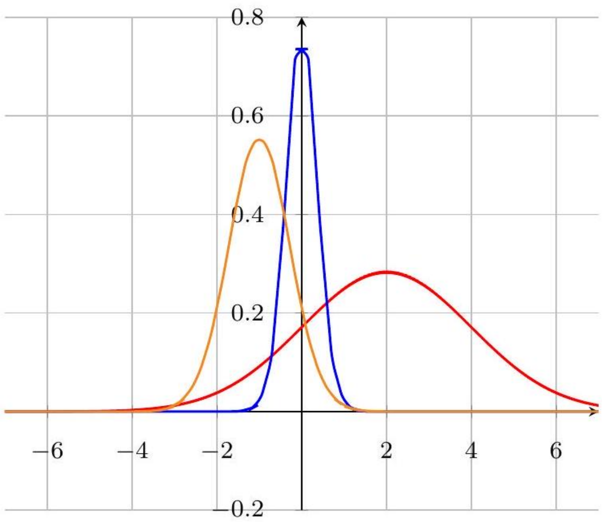
Loi normale ou loi de Laplace-Gauss

Définition 3.10

Une variable aléatoire X suit la loi normale de paramètres (μ, σ^2), notée $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ (où $\sigma > 0$), si une densité de X est la fonction $\varphi_{\mu,\sigma}$ définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi_{\mu,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

Évolution des allures des gaussiennes selon les paramètres : $\varphi_{-1,1/2}$ $\quad \varphi_{0,1/4}$ $\quad \varphi_{2,4}$.



Avec Python

On peut simuler une variable aléatoire suivant une loi normale de paramètres mu et sigma ^{2} à l'aide de la commande `rd.normal (mu, sigma)` .

Proposition 3.11 — Stabilité des lois normales.

- Toute transformation affine de X est encore une loi normale. Plus précisément, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$, alors
$$Y = aX + b \hookrightarrow \mathcal{N}\left(am + b, a^2\sigma^2\right)$$
- La somme de deux lois normales indépendantes est encore une loi normale. Plus précisément, si $X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_1, \sigma_1^2\right)$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_2, \sigma_2^2\right)$ sont indépendantes, alors
$$Z = X + Y \hookrightarrow \mathcal{N}\left(m_1 + m_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)$$
- Plus généralement, si $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ suite de v.a.i.i.d de loi $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$, alors
$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \hookrightarrow \mathcal{N}\left(nm, n\sigma^2\right)$$

Retenir

Toute variable aléatoire suivant une loi normale peut se ramener par une transformation affine à la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.

$$X \hookrightarrow \mathcal{N}\left(\mu, \sigma^2\right) \Longleftrightarrow X^* = \frac{X - \mu}{\sigma} \hookrightarrow \mathcal{N}(0,1)$$

Exercice 13

Pour cet exercice, on utilisera la table de la loi normale centrée réduite, fournie en appendice.

1. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(8,4)$. Donner des valeurs approchées pour
$$P(X < 7,5), P(X > 8,5), P(6,5 < X < 10), P(X > 6 \mid X > 5)$$
2. Soit X une variable aléatoire suivant une loi normale. Déterminer l'espérance et la variance de X sachant que
$$P(X < -1) \simeq 0,05 \text{ et } \quad P(X > 3) \simeq 0,12$$

Type Concours

Sur une ligne de bus, une enquête a permis de révéler que le retard (ou l'avance) sur l'horaire officiel du bus à une station donnée, peut être représenté(e) par une variable aléatoire réelle, notée X, exprimée en minutes, qui suit une loi normale $\mathcal{N}\left(m, \sigma^2\right)$.
On admet de plus que la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes est égale à $p = 0.8413$ et que l'espérance de X est de 5 minutes.

1. Déterminer la valeur de σ en utilisant la table jointe en annexe.
2. Quelle est la probabilité que le retard soit supérieur à 9 minutes ?
3. Sachant que le retard est supérieur à 3 minutes, quelle est la probabilité que le retard soit inférieur à 7 minutes ? (On exprimera cette probabilité à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite, puis on utilisera la table jointe en appendice).

IV. Moments d'une variable aléatoire à densité

IV. 1 Espérance

Définition 4.1

On dit qu'une variable aléatoire X de densité f_X admet une **espérance**, notée $E(X)$ lorsque l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_X(t)\, dt$ est absolument convergente. Dans ce cas, l'intégrale est convergente et on pose :

$$E(X) =$$

Méthode :

Pour montrer qu'une variable à densité X, de densité f_X, **admet** une espérance, il suffit de vérifier la convergence de l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |tf(t)|dt$$

Si le calcul de l'espérance est demandé, il faut ensuite calculer $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)dt$, en calculant des intégrales partielles et en passant à la limite.

Théorème 4.2 — Espérances des lois usuelles

- Une variable suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ admet une espérance qui vaut
- Une variable suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$ admet une espérance qui vaut
- Une variable suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ admet une espérance qui vaut
- Une variable suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ admet une espérance qui vaut
- Une variable suivant une loi uniforme $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ admet une espérance qui vaut

Remarque :

En particulier, si $X \hookrightarrow \mathcal{U}\big([0,1]\big)$, son espérance vaut $E(X) = 1/2$.

Proposition 4.3 — Croissance de l'espérance

Soit X et Y deux variables aléatoires qui admettent une espérance. On suppose que l'on a

$$\mathrm{P}(X \leqslant Y) = 1$$

alors

$$\mathrm{E}(X) \leqslant \mathrm{E}(Y)$$

Remarque :

La plupart du temps on prend plus simplement comme hypothèse $X \leqslant Y$.

Proposition 4.4 — Rappel : linéarité de l'espérance

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles admettant une espérance.
Alors $\alpha X + \beta Y$ admet une espérance et

$$\mathrm{E}(\alpha X + \beta Y) = \alpha\,\mathrm{E}(X) + \beta\,\mathrm{E}(Y)$$

Proposition 4.5 — Espérance d'un produit indépendant.

Soit X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** réelles admettant une espérance.
Alors XY admet une espérance.

$$\mathrm{E}(XY) = \mathrm{E}(X)\,\mathrm{E}(Y)$$

Remarques :

R1 – Soit $b \in \mathbb{R}$, $\quad \mathrm{E}(aX + b) =$

R2 – $\mathrm{E}(\mathrm{E}(X)) =$

Définition 4.6

Une variable aléatoire à densité est dite **centrée** si elle admet une espérance et si $\mathrm{E}(X) =$.

Proposition 4.7

Si X est une variable aléatoire à densité admettant une espérance, alors $X - \mathrm{E}(X)$ est une variable aléatoire centrée.

IV. 2 Théorème de transfert et moment d'ordre r

Comme pour les variables discrètes, ce théorème est crucial et puissant. Ici, on l'aime d'amour.

Théorème 4.8 — Théorème de trasnfert

Soient X est une variable aléatoire de densité f et φ une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.
Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) f_X(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente, alors la variable aléatoire $\varphi(X)$ admet une espérance et on a

$$\mathrm{E}(\varphi(X)) =$$

Type Concours

Soit X une variable aléatoire ayant pour densité $f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, où $\lambda > 0$.
La variable $Y = e^X$ admet-elle une d'espérance ?

Type Concours

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}\lambda e^{-\lambda|x|}$, avec $\lambda > 0$.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Montrer que $Z = -\log_2(f(X))$ admet une espérance et la calculer, où $\log_2(t) = \dfrac{\ln(t)}{\ln(2)}$

Définition 4.9

Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^r f(t)\mathrm{d}t$ est absolument convergente alors on dit que X admet un moment d'ordre r, notée $m_r(X)$ et on a

$$m_r(X) =$$

IV. 3 Variance et écart-type

Définition 4.10

Si la variable aléatoire X admet une espérance et si la variable $(X - \mathrm{E}(X))^2$ admet une espérance, on appelle variance de X le réel

$$V(X) = \mathrm{E}\left((X - \mathrm{E}(X))^2\right)$$

Proposition 4.11 — Formule de König-Huyguens

Une variable à densité X admet une variance si et seulement X admet un moment d'ordre 2 et dans ce cas

$$V(X) = \mathrm{E}\left(X^2\right) - [\mathrm{E}(X)]^2$$

Définition 4.12

Si X admet une variance alors $V(X) \geq 0$. On appelle alors écart-type le réel $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

Proposition 4.13

Soit X une variable à densité admettant une variance.
Alors pour tout réels a et $b, aX + b$ admet une variance et on a

$$V(aX + b) =$$

Proposition 4.14 — Variance d'une somme indépendante.

Soit X et Y deux variables aléatoires **indépendantes** réelles admettant une variance alors $X + Y$ admet une variance.

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y)$$

Proposition 4.15 — Généralisation à n variables aléatoires mutuellement indépendantes.

Soit X_1, X_2, … X_n des variables aléatoires discrètes mutuellement indépendantes alors

- Si $X_1, \ldots, X_n$ admettent une variance alors $X_1 + \cdots + X_n$ admet une variance et

$$V(X_1 + \cdots + X_n) = V(X_1) + \cdots + V(X_n)$$

- Si $X_1, \ldots, X_n$ admettent une espérance alors $X_1 X_2 \cdots X_n$ admet une espérance et et

$$E(X_1 X_2 \cdots X_n) = E(X_1) \cdot E(X_2) \cdots E(X_n)$$

Théorème 4.16 — Variances des lois usuelles

- Une variable suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$ admet une variance qui vaut
- Une variable suivant une loi uniforme $\mathcal{U}([a,b])$ admet une variance qui vaut
- Une variable suivant une loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ admet une variance qui vaut
- Une variable suivant une loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ admet une variance qui vaut
- Une variable suivant une loi uniforme $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ admet une variance qui vaut

Exercice 14

Soit X une variable aléatoire de densité f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 2/x^3 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$$

X admet-elle une variance ? Si oui, la calculer.

Type Concours

Soit X une variable suivant la loi uniforme sur $[0;1[$, et $\lambda > 0$. On pose $Y = -\dfrac{1}{\lambda}\ln(1-X)$ et on admet que Y est une variable aléatoire réelle.

1. Calculer la loi de Y.
2. Calculer son espérance et sa variance.
3. Déterminer une densité de $Z = \dfrac{1}{Y}$.

Définition 4.17

- Si X est une variable à densité telle que $\mathrm{E}(X) = 0$ on dit que X est une variable centrée.
- Si X est une variable à densité telle que $\sigma(X) = 1$, on dit que X est une variable réduite.
- Si X admet une espérance et un écart-type non nul, on appelle variable centrée-réduite associée à X la variable

V. Récapitulatif

Nom	Notation	Support	densité	Fonction de répartition	Espérance	Variance
uniforme	$\mathcal{U}([a;\, b])$	$[a;\, b]$ ou $]a;\, b[$ ou $[a;\, b[$ ou $]a;\, b]$	$\begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{si } x \in [a;\, b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} \dfrac{x-a}{b-a} & \text{si } x \in [a;\, b] \\ 0 & \text{si } x \leqslant a \\ 1 & \text{si } x \geqslant b \end{cases}$	$\dfrac{a+b}{2}$	$\dfrac{(b-a)^2}{12}$
uniforme	$\mathcal{U}([0;\, 1])$	$[0;\, 1]$,$]0;\, 1[$ ou $[0;\, 1[$ ou $]0;\, 1]$	$\begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0;\, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} x & \text{si } x \in [0;\, 1] \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$	$\dfrac{1}{2}$	$\dfrac{1}{12}$
exponentielle	$\mathcal{E}(\lambda)$	$\mathbb{R}_+$ ou $\mathbb{R}_+^*$	$\begin{cases} \lambda\,\mathrm{E}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\begin{cases} 1-\mathrm{E}^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$	$\dfrac{1}{\lambda}$	$\dfrac{1}{\lambda^2}$
normale	$\mathcal{N}(m, \sigma^2)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right)$	Φ_{m,σ^2}	m	σ^2
normale centrée réduite	$\mathcal{N}(0, 1)$	$\mathbb{R}$	$\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{x^2}{2}\right)$	Φ	0	1

VI. Comparatif Variables discrètes VS Variables à densité

	Variables aléatoires discrètes	Variables aléatoires à densité
Donnée de la loi de probabilité	$X(\Omega)$ est fini ou dénombrable et on donne la *fonction de masse* : • $\mathbb{P}([X=n])$ pour tout $n \in X(\Omega)$ • $\mathbb{P}([X=n]) = 0$ pour tout n en dehors de $X(\Omega)$ • On a : $\displaystyle\sum_{n \in X(\Omega)} \mathbb{P}([X=n]) = 1$	$X(\Omega)$ est un intervalle (ou union d'intervalles) de $\mathbb{R}$ et on donne une *fonction de densité* : • f_X est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points • f_X est positive sur $\mathbb{R}$ • $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(t)dt$ est convergente et vaut 1
Calculs de probabilités	• $\displaystyle\mathbb{P}([a \leq X \leq b]) = \sum_{\substack{n \in X(\Omega) \\ a \leq n \leq b}} \mathbb{P}([X=n]) = F_X(b) - F_X(a) + \mathbb{P}([X=a])$ • $\displaystyle\mathbb{P}([X \leq b]) = \sum_{\substack{n \in X(\Omega) \\ n \leq b}} \mathbb{P}([X=n])$ • $\displaystyle\mathbb{P}([X \geq a]) = \sum_{\substack{n \in X(\Omega) \\ n \geq a}} \mathbb{P}([X=n])$	• $\displaystyle\mathbb{P}([a \leq X \leq b]) = \int_a^b f_X(t)dt = F_X(b) - F_X(a)$ • $\displaystyle\mathbb{P}([X \leq b]) = \int_{-\infty}^b f_X(t)dt$ • $\displaystyle\mathbb{P}([X \geq a]) = \int_a^{+\infty} f_X(t)dt$ • $\mathbb{P}([X=a]) = 0$; $\mathbb{P}([X<b]) = \mathbb{P}([X \leq b])$; $\mathbb{P}([X>a]) = \mathbb{P}([X \geq a])$
Propriétés de la fonction de répartition F_X	• F_X est constante par morceaux • F_X est discontinue en chaque $n \in X(\Omega)$ • le saut de continuité en n est égal à $\mathbb{P}(X=n)$ • $\forall n \in X(\Omega),\ \mathbb{P}([X \leq n]) - \mathbb{P}([X \leq n-1]) = \mathbb{P}(X=n)$	• F_X continue sur $\mathbb{R}$ • F_X est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points • pour tout x où F_X est $\mathscr{C}^1$: $F_X'(x) = f_X(x)$
Indépendance	Pour tout $(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$: $\mathbb{P}\big([X=x] \cap [Y=y]\big) = \mathbb{P}([X=x]) \times \mathbb{P}([Y=y])$	Pour tous intervalles I, J de $\mathbb{R}$: $\mathbb{P}\big([X \in I] \cap [Y \in J]\big) = \mathbb{P}([X \in I]) \times \mathbb{P}([Y \in J])$
Espérance (si existence)	• X a une espérance ssi $\displaystyle\sum_{n \in X(\Omega)} \lvert n\mathbb{P}([X=n]) \rvert$ est convergente • $\displaystyle\mathbb{E}(X) = \sum_{n \in X(\Omega)} n\mathbb{P}([X=n])$	• X a une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert tf_X(t) \rvert dt$ est convergente • $\displaystyle\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} tf_X(t)dt$
Théorème de transfert	• $g(X)$ a une espérance ssi $\displaystyle\sum_{n \in X(\Omega)} \lvert g(n)\mathbb{P}(X=n) \rvert$ est convergente • $\displaystyle\mathbb{E}\big(g(X)\big) = \sum_{n \in X(\Omega)} g(n)\mathbb{P}([X=n])$ et en particulier : $\displaystyle\mathbb{E}(X^2) = \sum_{n \in X(\Omega)} n^2\mathbb{P}([X=n])$	Si g est continue sur $X(\Omega)$: • $g(X)$ a une espérance ssi $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \lvert g(t)f_X(t) \rvert dt$ est convergente • $\displaystyle\mathbb{E}\big(g(X)\big) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t)f_X(t)dt$ et en particulier : $\displaystyle\mathbb{E}(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f_X(t)dt$
Variance (si existence)	$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}\Big(\big(X - \mathbb{E}(X)\big)^2\Big)$	
Formule de Keonig-Huygens	$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$	
Propriétés de l'espérance et de la variance	Soient $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. • **Linéarité de l'espérance.** Si X et Y ont une espérance, alors, $aX+bY$ aussi et : $\mathbb{E}(aX+bY) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y)$. • **Croissance de l'espérance.** Si X et Y ont une espérance et $\mathbb{P}([X \leq Y]) = 1$, alors $\mathbb{E}(X) \leq \mathbb{E}(Y)$. • Si X a une variance, alors $aX+b$ aussi et : $\mathbb{V}(aX+b) = a^2\mathbb{V}(X)$. • Si X et Y ont une espérance et sont indépendantes, alors XY a une espérance et $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$. Si $X_1, \dots, X_n$ ont une espérance et sont indépendantes, alors $\displaystyle\prod_{k=1}^n X_k$ a une espérance et $\displaystyle\mathbb{E}\left(\prod_{k=1}^n X_k\right) = \prod_{k=1}^n \mathbb{E}(X_k)$. • Si X et Y ont une variance et sont indépendantes, alors $X+Y$ a une variance et $\mathbb{V}(X+Y) = \mathbb{V}(X) + \mathbb{V}(Y)$. Si $X_1, \dots, X_n$ ont une variance et sont indépendantes, alors $\displaystyle\sum_{k=1}^n X_k$ a une variance et $\displaystyle\mathbb{V}\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \mathbb{V}(X_k)$.	

Appendice - Tableau de la loi Normale

$$\Phi(t)(x) = P(X \leq x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

x	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319
1.5	0.9332	0.9345	0.9357	0.9370	0.9382	0.9394	0.9406	0.9418	0.9429	0.9441
1.6	0.9452	0.9463	0.9474	0.9484	0.9495	0.9505	0.9515	0.9525	0.9535	0.9545
1.7	0.9554	0.9564	0.9573	0.9582	0.9591	0.9599	0.9608	0.9616	0.9625	0.9633
1.8	0.9641	0.9649	0.9656	0.9664	0.9671	0.9678	0.9686	0.9693	0.9699	0.9706
1.9	0.9713	0.9719	0.9726	0.9732	0.9738	0.9744	0.9750	0.9756	0.9761	0.9767
2.0	0.9772	0.9778	0.9783	0.9788	0.9793	0.9798	0.9803	0.9808	0.9812	0.9817
2.1	0.9821	0.9826	0.9830	0.9834	0.9838	0.9842	0.9846	0.9850	0.9854	0.9857
2.2	0.9861	0.9864	0.9868	0.9871	0.9875	0.9878	0.9881	0.9884	0.9887	0.9890
2.3	0.9893	0.9896	0.9898	0.9901	0.9904	0.9906	0.9909	0.9911	0.9913	0.9916
2.4	0.9918	0.9920	0.9922	0.9925	0.9927	0.9929	0.9931	0.9932	0.9934	0.9936
2.5	0.9938	0.9940	0.9941	0.9943	0.9945	0.9946	0.9948	0.9949	0.9951	0.9952
2.6	0.9953	0.9955	0.9956	0.9957	0.9959	0.9960	0.9961	0.9962	0.9963	0.9964
2.7	0.9965	0.9966	0.9967	0.9968	0.9969	0.9970	0.9971	0.9972	0.9973	0.9974
2.8	0.9974	0.9975	0.9976	0.9977	0.9977	0.9978	0.9979	0.9979	0.9980	0.9981
2.9	0.9981	0.9982	0.9982	0.9983	0.9984	0.9984	0.9985	0.9985	0.9986	0.9986
3.0	0.9987	0.9987	0.9987	0.9988	0.9988	0.9989	0.9989	0.9989	0.9990	0.9990
3.1	0.9990	0.9991	0.9991	0.9991	0.9992	0.9992	0.9992	0.9992	0.9993	0.9993
3.2	0.9993	0.9993	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9994	0.9995	0.9995	0.9995
3.3	0.9995	0.9995	0.9995	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9996	0.9997
3.4	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9997	0.9998
3.5	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998	0.9998
3.6	0.9998	0.9998	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.7	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.8	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999	0.9999
3.9	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000	1.0000