Introduction

Exercice 1

À partir de 7heures du matin, les bus passent toutes les quinze minutes à un arrêt précis. Un usager se présente à cet arrêt entre 7h et 7h30. On fait l'hypothèse que l'heure exacte de son arrivée, représentée par le nombre de minutes après 7h, est une variable aléatoire uniformément répartie sur l'intervalle [0,30]. Quelle est la probabilité que l'usager attende moins de cinq minutes le prochain bus ? Qu'il l'attende plus de dix minutes ?

Exercice 2

Les ampoules électriques d'un tunnel routier sont allumées 24 heures sur 24 et la durée de vie de chaque ampoule suit une loi exponentielle d'espérance 10000 heures. Il y a 100 ampoules dans le tunnel et à l'instant t = 0, on installe des ampoules neuves. Au bout de combien de temps, la probabilité qu'au moins une ampoule soit en panne dépasse-t-elle 95% ?

Exercice 3

Dans une station-service, la demande hebdomadaire en essence, en milliers de litres, est une variable aléatoire X de densité $f(x) = \begin{cases} c(1-x)^4 & \text{si } [0,1] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$.

1. Déterminer c.
2. La station est réapprovisionnée chaque lundi à 20h. Quelle doit être la capacité du réservoir d'essence pour que la probabilité d'épuiser ce réservoir soit inférieure à 10^{-5} ?

Définitions

Exercice 4

Déterminer si c'est possible la valeur de la constante a pour que les fonctions suivantes soient des densités. Dans ce cas là calculer leur fonction de répartition.

Dans les cas ou une valeur a convient, calculer les probabilités $P(X \leqslant 0)$ $P(X \geqslant 0)$ et $P(0 \leqslant X \leqslant 1$

1. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ate^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$
2. $f(t) = \begin{cases} \dfrac{a}{t} & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ at^2e^{-t} & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$
4. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ae^{-2t}(1-e^{-2t})^2 & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$
5. $f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ ae^{-t}\ln\left(1+e^t\right) & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$ On pourra poser $u(t) = e^t$ et faire un changement de variable.
6. $f(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{t} & \text{si } 1 \leqslant t \leqslant a \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 5

Déterminer si les fonctions suivantes sont des fonctions de répartition. Si oui calculer une densité associée.

1. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - \dfrac{1}{1+x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$
2. $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{1+e^x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$

Transfert, opérations, min max...

Exercice 6

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(]-1;1[)$ On note $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire réelle et on note F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et de Y.

1. Écrire une fonction Python `def exo()` qui simule (une fois) cette expérience aléatoire.
2. Montrer que le support de Y est $[0;1[$.
3. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}_-$, $F_Y(x) = 0$.
4. Soit $x > 0$ montrer que
$$[Y \leqslant x] = [-x \leqslant X \leqslant x]$$
5. En déduire $F_Y(x)$ quand $x > 0$.
6. Montrer que Y est une variable à densité et calculer une densité de Y.

Exercice 7

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}(]-1;2[)$ On note $Y = |X|$ et on admet que Y est une variable aléatoire réelle et on note F_X et F_Y les fonctions de répartition de X et de Y.

1. Écrire une fonction Python `def exo()` qui simule (une fois) cette expérience aléatoire. On utilisera `grand`
2. Calculer le support de Y.
3. Calculer la fonction de répartition de Y. On distinguera 4 cas $x < 0$, $0 \leqslant x < 1$, $1 \leqslant x < 2$ et $x \geqslant 2$
4. Montrer que Y est une variable à densité et calculer une densité de Y.

Exercice 8

Soit X une variable aléatoire suivant la loi uniforme sur $[0; n+1[$ où n est un entier naturel non nul. On note $Y = \lfloor X \rfloor$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ est la partie entière. On admet que Y est une variable aléatoire réelle.

1. Écrire une fonction Python `def exo(n)` qui simule (une fois) cette expérience aléatoire. On utilisera `grand`
2. Rappeler la définition de la partie entière.
3. Donner le support de Y.
4. Montrer que pour tout entier $k \in [\![0, n]\!]$
$$[Y = k] = [k \leqslant X < k+1]$$
5. En utilisant la fonction de répartition de X en déduire $P(Y = k)$.

Exercice 9

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. On admet dans les questions suivantes que les objets manipulés sont bien des variables aléatoires réelles

1. On pose $Y = \sqrt{X}$. Quel est le support de Y.
2. Comment simuler cette variable aléatoire en Python.
3. Calculer la fonction de répartition de Y. On distinguera les cas $x < 0$ et $x \geqslant 0$
4. Montrer que Y est une variable à densité et calculer une densité de Y.
5. On pose $Z = X^2$, reprendre les questions précédentes avec Z.

Exercice 10

Soit X une variable aléatoire à densité dont la fonction de répartition est F.

On suppose que F est strictement croissante et on note $Y = F(X)$ on admet que Y est une variable aléatoire réelle.

1. Montrer que F est une bijection de $\mathbb{R}$ vers un ensemble que l'on déterminera. On note F^{-1} la bijection réciproque de F.
2. On note G la fonction de répartition de Y. Montrer que pour $x < 0$ $G(x) = 0$ et que pour $x > 1$ on a $G(x) = 1$.
3. Montrer que pour $x \in [0; 1]$ on a $G(x) = x$.
4. Reconnaitre la loi de Y.

Exercice 11 — EML 1996

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\begin{cases} f(x) = e^{-|x|} & \text{si } -\ln 2 \leqslant x \leqslant \ln 2 \\ f(x) = 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Etudier les variations de f et tracer sa représentation graphique dans un repère orthonormé (unité 5cm).
2. Montrer que f est une densité de probabilité.
3. Soit X une variable aléatoire réelle admettant f comme densité.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F de X.
   (b) Montrer que X admet une espérance et calculer l'espérance de X.
   (c) On pose $Y = |X|$.
   Déterminer la fonction de répartition G de Y. Montrer que Y est une variable à densité et déterminer une densité g de Y.

Exercice 12 — EDHEC 2002

Pour tout nombre réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de x, c'est-à-dire l'unique nombre entier vérifiant : $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$.
Soit X la variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre λ ($\lambda > 0$).
On pose $Y = \lfloor X \rfloor$, Y est donc la partie entière de X et on a :

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad [Y = k] = [k \leqslant X < k+1]$$

1. (a) Montrer que Y prend ses valeurs dans $\mathbb{N}$.
   (b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, calculer $P(Y = k-1)$.
   (c) En déduire que la variable aléatoire $Y + 1$ suit une loi géométrique dont on donnera le paramètre.
   (d) Donner l'espérance et la variance de $Y+1$. En déduire l'espérance et la variance de Y.
2. On pose $Z = X - Y$.
   (a) Déterminer $Z(\Omega)$.
   (b) En utilisant le système complet d'événements $(Y = k)_{k\in\mathbb{N}}$, montrer que :
   $$\forall x \in [0; 1[, \quad P(Z \leqslant x) = \frac{1 - e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}$$
   (c) En déduire une densité f de Z.

(d) Déterminer l'espérance $E(Z)$ de Z. Ce résultat était-il prévisible ?

Exercice 13 — [

Transfert affine] Soit X une variable aléatoire admettant pour densité f. On pose $Y = 3X + 4$.

Montrer que Y est une variable à densité et calculer une densité de Y

Moments

Exercice 14 — Parité et espérance

Soit f une fonction continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en un nombre fini de points.. On suppose que f est paire.

1. Montrer que si $\int_{-\infty}^{0} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge alors $\int_{0}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. (changement de variable) et a même valeur
2. En déduire que si $\int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ alors $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que dans ce cas là
$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 2\int_{0}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$$
Dans la suite on suppose avoir montré que f est une densité d'une variable aléatoire réelle.
3. Montrer que si $\int_{0}^{+\infty} xf(x)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente alors X admet une espérance et que dans ce cas là $E(X) = 0$.
4. Que peut on dire pour la variance ? pour les autres moments (sans démonstration)

Exercice 15

Vous pouvez utiliser l'exercice On pose

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{x^2} & \text{si } |x| \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où α est une constante réelle positive

1. Montrer que f est paire et tracer rapidement son graphe.
2. Trouvez α pour que f soit une densité.
On note dans la suite X une variable aléatoire dont f est une densité.
3. X admet elle une espérance ? Si oui la calculer
4. Calculer F_X la fonction de répartition de X. Cette fonction est elle paire ? Est elle impaire
5. Recommencer avec $g(x) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{x^4} & \text{si } |x| \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 16

Après avoir vérifié que les fonctions suivantes définissent des densités, calculer l'espérance et la variance associée si elles existent.

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3}{4}(1-x^2) & \text{si } x \in [-1;\,1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} 4\dfrac{\ln x}{x^3} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Exercice 17

Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant la loi uniforme $\mathcal{U}([a;\,b])$

Exercice 18

Calculer l'espérance et la variance d'une variable aléatoire suivant normale de $\mathcal{N}(0,\ 1)$.

Exercice 19

Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 1 \\ \dfrac{2}{t^3} & \text{sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f est bien une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Montrer que f admet une espérance et calcule cette espérance.
3. Montrer que f n'admet pas de variance

Exercice 20

Dans tout l'exercice λ désigne un réel strictement positif.
On considère la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$h(x) = \begin{cases} \lambda^2 x e^{-\lambda x} \text{ si } x \geqslant 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$$

1. En utilisant les propriétés de la loi exponentielle, montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} h(x)dx$ puis donner sa valeur.
2. Montrer que h peut être considérée comme la densité d'une variable aléatoire X.
3. Montrer la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} xh(x)dx$ puis donner sa valeur. En déduire que X possède une espérance et la déterminer.

Couple et suite de vad

Exercice 21

Soit X et Y deux variables aléatoires réelles indépendante suivant la même loi $\mathcal{E}(\lambda)$. On note $I = \inf(X, Y)$ le minimum et $S = \sup(X, Y)$ le maximum des deux lois.

1. Écrire une fonction python `def maxexp(n,l)` qui revoit un tableau ou chaque case est la simulation d'une expérience décrite précédemment. n désigne la longueur du tableau et l le paramètre de la loi exponentielle.
2. Calculer une densité de S.
3. Calculer la fonction de répartition de I et reconnaître la loi de I.
4. Montrer que $X + Y = I + S$ et calculer l'espérance de S.
5. S et I sont elles indépendantes.

Exercice 22 — ECRICOME 2008

Le participant d'un jeu lance trois fléchettes dans une cible circulaire de centre O et de rayon 1. Pour $1 \leqslant i \leqslant 3$, on note X_i la variable aléatoire égale à la distance du point d'impact de centre O de la $i^{ème}$ fléchette. Ces trois variables aléatoires X_1, X_2, X_3 de même loi, indépendantes, sont des variables à densité dont une densité f est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [0;1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Le joueur gagne si la distance la plus proche du centre O se trouve à une distance inférieure à $\frac{1}{5}$ de ce centre. Enfin, on note M la variable aléatoire représentant la plus petite des trois distances X_1, X_2, X_3.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité et déterminer la fonction de répartition F de X_i.
2. Déterminer l'espérance de X_i.
3. Exprimer l'événement $[M > t]$ à l'aide des événements $[X_1 > t], [X_2 > t], [X_3 > t]$ pour tout réel t.
4. Déterminer la fonction de répartition F_M de M et montrer que M est une variable à densité et en donner une densité notée f_M.
5. Quelle est la probabilité de l'événement $G =$"le joueur gagne la partie" ?

Lois usuelles

Exercice 23

1. Tracer le tableau de variation de la densité $f_{m,\sigma}$ d'une varibale aléatoire loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. On justifiera les limites, et on étudiera la concavité/convexité ainsi qu les points d'inflexion.
2. En quel point $f_{m,\sigma}$ atteint elle son maximum ? (C'est le mode)

Exercice 24

1. Soit $U \hookrightarrow \mathcal{N}(0, 2)$ et soit $V \hookrightarrow \mathcal{N}(1, 3)$ indépendantes , trouver la loi de $2U + 3V$
2. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{G}(2)$ et soit $Y \hookrightarrow G(3)$ indépendantes, trouver la loi de $3X + Y$

Exercice 25

On note Φ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et $\Phi_{m,\sigma}$ la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$

1. Montrer que $\Phi(0) = \frac{1}{2}$.
2. Trouver un réel μ tel que $\Phi_{m,\sigma}(\mu) = \frac{1}{2}$
3. On appelle ce réels une médiane. Pourquoi ?

Exercice 26

1. Soit λ et μ deux réels strictement positifs. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
   Montrer que $Y = \mu X$ suit une loi classique dont on donnera le paramètre.
2. Soit $\lambda > 0$ montrer que
$$X \hookrightarrow \mathcal{E}(1) \Leftrightarrow \frac{1}{\lambda}X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$$

Exercice 27

Soit $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b])$ et $\alpha > 0$, β deux réels. Montrer que $Y = \alpha X + \beta$ suit une loi usuelle.

Exercice 28

Soit a et b deux réels tels que $a < b$. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{U}([a;b])$ et on note X^* la variable aléatoire centrée-réduite associée à X.
Trouver (sans calculs) la loi de X^*

Exercice 29

Soit $m \in \mathbb{R}$ et σ deux réels tels que $\sigma > 0$. On suppose que $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et on note X^* la variable aléatoire centrée-réduite associée à X.
Trouver (sans calculs) la loi de X^*

Exercice 30

Soit f la fonction définie par : $\begin{cases} f(x) = 0 \text{ si } x < 0 \\ f(x) = xe^{-\frac{x^2}{2}} \text{ si } x \geqslant 0 \end{cases}$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
   La durée de vie d'un certain composant électronique est une variable aléatoire X dont une densité est f.
2.
   (a) Déterminer la fonction de répartition F de X.
   (b) Calculer la médiane de X c'est-à-dire le réel μ tel que $\mathrm{P}(X \leqslant \mu) = \dfrac{1}{2}$.
3. On appelle mode de la variable X tout réel x en lequel f atteint son maximum. Montrer que X a un seul mode, noté M_o, et le déterminer.
4.
   (a) En utilisant un résultat connu concernant la loi normale, établir que X a une espérance et montrer que $E(X) = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{2}$.
   (b) Calculer, à l'aide d'une intégration par parties, la variance de X.