Exercice

Soit m un réel strictmeent positif et f l'endomiorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ est donnée par : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix}$,

1. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

   $u \in \ker(f) \iff M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2}z = 0 \\ mx + \frac{1}{m}z = 0 \\ m^2x + my = 0 \end{cases}$ et comme $m \neq 0$

   $\iff \begin{cases} z = -my \\ 2y = 0 \\ x = -\frac{1}{m}y \end{cases} \iff x = y = z = 0$

   Conclusion : $\boxed{\text{Donc } \ker(f) = \{0\}, \text{ donc } f \text{ bijective et } M \text{ inversible et } \operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^3}$

2. a) On a $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1/m & 1/m^2 \\ m & 0 & 1/m \\ m^2 & m & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{m} & \frac{1}{m^2} \\ m & 2 & \frac{1}{m} \\ m^2 & m & 2 \end{pmatrix} = M + 2I$

   b) Donc $M^2 - M - 2I = 0$ et le polynôme $P = X^2 - X - 2$ est annulateuir de M

   c) Donc, si α est valeur propre de M alors $P(\alpha) = 0$ ce qui a pour solutions $\alpha = -1$ et $\alpha = 2$ (ce sont les seules car il n'en a pas plus de 2)

   Conclusion : $\boxed{\text{Les seules valeurs propres } \textbf{possibles} \text{ sont donc } \alpha = -1 \text{ et } 2.}$

   Reste à vérifier si elles le sont ou pas :

   Pour $\alpha = -1$:Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

   $(M + I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} x + \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2}z = 0 \\ mx + y + \frac{1}{m}z = 0 \\ m^2x + my + z = 0 \end{cases}$ et comme $L_1 = \frac{1}{m^2}L_3$ et $L_2 = \frac{1}{m}L_3$

   $\iff m^2x + my + z = 0 \iff z = -m^2x - my$

   Les solutions sont donc $E_1 = \operatorname{Vect}((1, 0, -m), (0, 1, -m)) \neq \{0\}$

   Conclusion : $\boxed{\text{Donc 1 est bien valeur propre et est associé à } \operatorname{Vect}((1, 0, -m), (0, 1, -m))}$

   La famille de deuxc vecteurs non proportionnels $((1, 0, -m), (0, 1, -m))$ est donc génératrice de E_1 et libre. C'est donc une base de E_1 et

   Conclusion : $\boxed{\dim(E_1) = 2.}$

   Pour $\alpha = 2$:Soit $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

   $(M - 2I) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{cases} -2x + \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2}z = 0 \\ mx - 2y + \frac{1}{m}z = 0 \\ m^2x + my - 2z = 0 \end{cases}$

   $\iff \begin{cases} -2x + \frac{1}{m}y + \frac{1}{m^2}\left(\frac{m^2}{2}x + \frac{m}{2}y\right) = 0 \\ mx - 2y + \frac{1}{m}\left(\frac{m^2}{2}x + \frac{m}{2}y\right) = 0 \\ z = \frac{m^2}{2}x + \frac{m}{2}y \end{cases} \iff \begin{cases} -\frac{3}{2}x + \frac{3}{2m}y = 0 \\ \frac{3}{2}mx - \frac{3}{2}y = 0 \\ z = \frac{m^2}{2}x + \frac{m}{2}y \end{cases}$

   $\iff \begin{cases} 0 = 0 \\ y = mx \\ z = \frac{m^2}{2}x + \frac{m}{2}y \end{cases} \iff \begin{cases} y = mx \\ z = m^2x \end{cases}$

   Les solutions sont donc $E_{-2} = \operatorname{Vect}((1, m, m^2))$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } -2 \text{ est bien valeur propre et est associé à Vect}\left(\left(1,m,m^2\right)\right)}$
et $\left(\left(1,m,m^2\right)\right)$ en est une famille libre (un seul vecteur non nul) et génératrice, donc une base.
Conclusion : $\boxed{\dim\left(E_{-2}\right)=1}$
Conclusion : $\boxed{\text{Les valeurs propres de } M \text{ sont donc } \alpha=-1 \text{ et } 2.}$
La somme des dimensions des sous espaces propres est $1+2=3=\dim\mathbb{R}^3$
Conclusion : $\boxed{M \text{ est donc diagonalisable.}}$

3. La juxtapositon des bases des sous espaces propres $\left((1,0,-m),(0,1,-m),\left(1,m,m^2\right)\right)$ est alors une base de $\mathbb{R}^3$.
Donc avec $R=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&m\\-m&-m&m^2\end{pmatrix}$ inversible et $D=\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$ on a $M=RDR^{-1}$ et $M^n=RD^nR^{-1}$ avec D diagonale, on a directement D^n.
Il resterait donc à calculer explicitement R^{-1}.

4. a) On passe par la matrice associée dans la base de vecteurs propres :
p apour matrice : $P=\dfrac{1}{3}(D+I)=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$ et q a pour matrice : $Q=-\dfrac{1}{3}(D-2I)=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$
(Les opérations entre matrices diagonales se font sur la diagonale)
On a $QP=0$ et $PQ=0$ et $P^n=P$ et $Q^n=Q$ pour $n\geq 1$
Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} pq=qp=0\\ p^n=p \text{ et } q^n=q \text{ pour } n\in\mathbb{N}^* \text{ et } p^0=q^0=I \text{ pour } n=0\end{array}}$

b) On reconstitue f à partir de p et q : $f=2p-q$ et comme $p\circ q=qop$ alors par le binôme

$$\begin{aligned} f^n &= (2p-q)^n\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}2^n(-1)^{n-k}p^k\circ q^{n-k} \text{ suivant } k=0 \text{ et } n-k=0\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}2^n(-1)^{n-k}p\circ q+(-1)^n q+2^n p\end{aligned}$$

le découpage étant valable pour $n\geq 2$ et encore vrai pour $n=0$ $(p+q=Id)$ et $n=1$ $(-q+2p=f)$
Finalement

$$\begin{aligned} f^n &= (-1)^n q+2^n p\\ &= -\frac{(-1)^n}{3}(f-2\mathrm{Id})+\frac{2^n}{3}(f+\mathrm{Id})\\ &= \frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n\right)f+\frac{1}{3}\left(2(-1)^n+2^n\right)\mathrm{Id}\end{aligned}$$

c) et sa matrice associée est
Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} M^n=\frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n\right)M+\frac{1}{3}\left(2(-1)^n+2^n\right)I\\ \text{et } a_n=\frac{1}{3}\left(2^n-(-1)^n\right) \text{ et } b_n=\frac{1}{3}\left(2(-1)^n+2^n\right)\end{array}}$

d) Il faut vérifier si le produit par la candidate inverse vaut I :

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{1}{3}\left(2^{n}-(-1)^{n}\right) M+\frac{1}{3}\left(2(-1)^{n}+2^{n}\right) I\right]\left[\frac{1}{3}\left(2^{-n}-(-1)^{-n}\right) M+\frac{1}{3}\left(2(-1)^{-n}+2^{-n}\right) I\right] \\
= & \frac{1}{9}\left(2^{n}-(-1)^{n}\right)\left(2^{-n}-(-1)^{-n}\right) M^{2}+\frac{1}{9}\left(2^{n}-(-1)^{n}\right)\left(2(-1)^{-n}+2^{-n}\right) M \\
& +\frac{1}{9}\left(2(-1)^{n}+2^{n}\right)\left(2^{-n}-(-1)^{-n}\right) M+\frac{1}{9}\left(2(-1)^{n}+2^{n}\right)\left(2(-1)^{-n}+2^{-n}\right) I
\end{aligned}$$

que l'on développe en se souvenant que $M^2 = M + 2I$

$$\begin{aligned}
= & \frac{1}{9}\left(1-(-2)^{n}-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}+1\right)(M+2I) \\
& +\frac{1}{9}\left(2(-2)^{n}+1-2-\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}\right) M \\
& +\frac{1}{9}\left(2\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}-2+1-(-2)^{n}\right) M \\
& +\frac{1}{9}\left(4+2\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}+2(-2)^{n}+1\right) I \\
= & I \text{ (bluff)}
\end{aligned}$$

il faut aimer les calculs ... pour combien de points à l'arrivé ? SImplement donner l'idée est sans doute plus rentable !
Donc la formule est encore vrai pour n négatif
Conclusion : $\boxed{\text{La formule est vraie pour tout } n \in \mathbb{Z}}$

Problème

Partie I. Loi à 1 paramètre

On note un réel strictement positif. On considère la fonction f_λ définie par

$$f_{\lambda}(x)=\begin{cases}\frac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda \sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x<0\end{cases}$$

1. a) Su $\mathbb{R}_+^*$ on a $x >$ et $\sqrt{x} \neq 0$ donc f_λ est C^2 comme composée et quotient de fonctions C^2
   b) Pour tout $x > 0$ on a :

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{\lambda}{2}\left(\frac{-\frac{1}{2}}{x^{3/2}} e^{-\lambda \sqrt{x}}+\frac{1}{\sqrt{x}} e^{-\lambda \sqrt{x}} \frac{-\lambda}{2 \sqrt{x}}\right) \\
&= \frac{\lambda}{4} \frac{1}{x^{3/2}} e^{-\lambda \sqrt{x}}\left(-1-\lambda \sqrt{x}\right)<0
\end{aligned}$$

En 0 : $f_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda\sqrt{x}} \to +\infty$
En $+\infty$: $f_\lambda(x) = \frac{\lambda}{2\sqrt{x}} e^{-\lambda\sqrt{x}} \to 0$ d'où

x	0	$+\infty$
$f'_\lambda(x)$	$-$	
$f_\lambda(x)$	$+\infty$ $\searrow$	0

c) Pour tout $x > 0$, on a :

$$\begin{aligned}
f''(x) &= \frac{\lambda}{4}\left[\frac{-3/2}{x^{5/2}}e^{-\lambda\sqrt{x}}\left(-1-\lambda\sqrt{x}\right)+\frac{1}{x^{3/2}}e^{-\lambda\sqrt{x}}\frac{-\lambda}{2\sqrt{x}}\left(-1-\lambda\sqrt{x}\right)+\frac{1}{x^{3/2}}e^{-\lambda\sqrt{x}}\frac{-\lambda}{2\sqrt{x}}\right]\\
&= \frac{\lambda}{8x^{5/2}}e^{-\lambda\sqrt{x}}\left[\frac{3}{x^{5/2}}\left(1+\lambda\sqrt{x}\right)+\lambda\sqrt{x}\left(1+\lambda\sqrt{x}\right)-\lambda\sqrt{x}\right]\\
&= \frac{\lambda}{8x^{5/2}}e^{-\lambda\sqrt{x}}\left[\frac{3}{x^{5/2}}\left(1+\lambda\sqrt{x}\right)+\lambda^2 x\right] > 0
\end{aligned}$$

Donc f_λ est conc convexe sur $\mathbb{R}_+^*$

d) Pour tracer l'allure, on ne place que les asymptotes en 0 (verticale) et à l'infini (horizontale) et on n'oublie pas la fonction nulle sur $\mathbb{R}_-$

2. a) Soit $F(x) = -e^{-\lambda\sqrt{x}}$
F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et

$$F'(x) = -e^{-\lambda\sqrt{x}}\frac{-\lambda}{2\sqrt{x}} = f_\lambda(x)$$

Conclusion : $\boxed{F \text{ } est \text{ une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}$

b) $\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\,dx$ est impropre en 0 et $+\infty$.
Pour $\varepsilon \to 0^+$:

$$\begin{aligned}
\int_\varepsilon^1 f_\lambda(x)\,dx &= -e^{-\lambda}+e^{-\lambda\sqrt{\varepsilon}}\\
&\to 1-e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

donc $\int_0^1 f_\lambda(x)\,dx$ converge et vaut $1-e^{-\lambda}$
Et quand $M \to +\infty$:

$$\begin{aligned}
\int_1^M f_\lambda(x)\,dx &= -e^{-\lambda\sqrt{M}}+e^{-\lambda}\\
&\to e^{-\lambda}
\end{aligned}$$

donc $\int_1^{+\infty} f_\lambda(x)\,dx$ converge et vaut $e^{-\lambda}$

Conclusion : $\boxed{\int_0^{+\infty} f_\lambda(x)\,dx \text{ converge et vaut } 1}$

c) f_λ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et positive. $\int_{-\infty}^0 f_\lambda(x)\,dx = 0$ donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1$

Conclusion : $\boxed{f_\lambda \text{ est une densité de probabiltés sur } \mathbb{R}}$

3. X de densité f_λ et $Y = \lambda\sqrt{X}$

a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $F_\lambda(x) = \int_{-\infty}^x f_\lambda(t)\,dx$
- pour $x \leq 0$: $F_\lambda(x) = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$
- pour $x > 0$: $F_\lambda(x) = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^x f_\lambda(t)\,dt$
avec $\int_\varepsilon^x f_\lambda(t)\,dt = -e^{-\lambda\sqrt{x}} + +e^{-\lambda\sqrt{\varepsilon}} \to 1-e^{-\lambda\sqrt{x}}$
donc $F_\lambda(x) = 1-e^{-\lambda\sqrt{x}}$

b) Soit G la fonciton de réparition de Y :

Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} G(x) &= \mathrm{P}(Y \leq x) \\ &= \mathrm{P}\left(\lambda\sqrt{X} \leq x\right) \text{ et si } x \geq 0 \\ &= \mathrm{P}\left(X \leq \left(\frac{x}{\lambda}\right)^2\right) \\ &= F_\lambda\left(\left(\frac{x}{\lambda}\right)^2\right) = 1 - e^{-\lambda x/\lambda} = 1 - e^{-x} \end{aligned}$$

et si $x < 0 : G(x) = \mathrm{P}\left(\lambda\sqrt{X} \leq x\right) = 0$
et on reconnait ula fonciton de répartition de $\varepsilon(1)$
Conclusion : $\boxed{Y \hookrightarrow \varepsilon(1)}$

c) On montre la convergence de $\int_0^{+\infty} x^r e^{-x} dx$ impropre en $+\infty$ car $r > 0$ en comparant à une usuelle (Riemann ou exp)
$x^r e^{-x}/e^{-x/2} = x^r/e^{x/2} \to 0$ car $x^r = o\left(e^{x/2}\right)$ donc $x^r e^{-x} = o\left(e^{-x/2}\right)$
De plus $\int_0^{+\infty} e^{-x/2} dx$ converge
DOnc, par majoration de foncitons positive, $\int_0^{+\infty} x^r e^{-x} dx$ converge également.
Conclusion : $\boxed{Y^r \text{ a donc une espérance et pour tout } r \in \mathbb{N}^*}$
(pour $r = 0$, on a $Y^0 = 1$ quin'est plus à denisté)

d) Pour tout $M > 0$, avec $u(x) = x^{r+1} : u'(x) = (r+1)x^r : v'(x) = e^{-x} : v(x) = -e^{-x}$ avec u et v de classe C^1

$$\begin{aligned} \int_0^M x^{r+1} e^{-x} dx &= \left[-x^{r+1} e^{-x}\right]_0^M - \int_0^M (-r+1) x^r e^{-x} dx \\ &= -x^{M+1} e^{-M} + 0 + (r+1) \int_0^M x^r e^{-x} dx \\ &\to (r+1) \int_0^{+\infty} x^r e^{-x} dx \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{donc } E\left(Y^{r+1}\right) = (r+1) E\left(Y^r\right) \text{ pour tout } r \geq 1}$
Et comme $E\left(Y^1\right) = E(Y) = 1$ (loi $\varepsilon(1)$) on reconnait alors la suite factorielle et *
Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } r \geq 1 : E\left(Y^r\right) = r!}$

e) Comme $Y = \lambda\sqrt{X}$ alors $X = (Y/\lambda)^2$ donc $X^r = \dfrac{1}{\lambda^{2r}} Y^{2r}$ a une espérance et $E\left(X^r\right) = \dfrac{1}{\lambda^{2r}} E\left(Y^{2r}\right)$

Conclusion : $\boxed{E\left(X^r\right) = \dfrac{(2r)!}{\lambda^{2r}} \text{ pour tout } r \in \mathbb{N}^*}$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}\text{Enparticulier } E(X) = 2/\lambda^2 : E\left(X^2\right) = 24/\lambda^4 \\ \text{et } V(X) = 20/\lambda^4\end{array}}$

4. la convergence en loi demande la limite de la fonciton de réparttion. Il faut donc la déterminer, puis passezr à la limite.
Ici, la marche est haute à franchir et il faut prendre des initiatives...

$n^2 a_n \to 1$ et $n^2 b_n \to 0$ strictement positifs.
Les X_k ont même loi que X.
Et pour $n \in \mathbb{N}^*$: $M_n = \min(X_k)$ et $J_n = \frac{M_n - b_n}{a_n}$
Donc On détermine la fonction de répartiton G de M_n :

$$\begin{aligned} (M_n > x) &= (\text{"tous } > x\text{"}) = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k > x) \text{ donc} \\ \mathrm{P}(M_n > x) &= [\mathrm{P}(X > x)]^n \text{ par indépendace} \end{aligned}$$

Donc $G(x) = 1 - (1 - F_\lambda(x))^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda n \sqrt{x}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ et M_n suit la même loi pour le paramètre $n\lambda$ que X
Puis, on détermine la fonction de répartition H de J_n :

$$\begin{aligned} (J_n > x) &= \left(\frac{M_n - b_n}{a_n} > x \right) \\ &= (M_n > x a_n + b_n) \text{ donc} \\ \mathrm{P}(J_n > x) &= \mathrm{P}(M_n > x a_n + b_n) \\ &= \begin{cases} 1 & \text{si } x \leq \frac{-b_n}{a_n} \\ e^{-\lambda n \sqrt{x a_n + b_n}} & \text{si } x > \frac{-b_n}{a_n} \end{cases} \end{aligned}$$

Et comme $\frac{-b_n}{a_n} = \frac{-n^2 b_n}{n^2 a_n} \to 0$ d'une part (conditions pour les formules) et $-\lambda n \sqrt{x a_n + b_n} = -\lambda \sqrt{x a_n n^2 + b_n n^2} \to -\lambda \sqrt{x}$ alors, la valeur 0 étant toujours supérieur à $\frac{-b_n}{a_n}$:

$$\mathrm{P}(J_n \leq x) \to \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ 1 - e^{-\lambda \sqrt{x}} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

où l'on reconnait la fonciton de répartition de X
Conclusion : $\boxed{J_n \text{ converge en loi vers la loi de } X}$

Partie II : Estimation ponctuelle de λ

$(X_k)_k$ indépendantes de même loi que X.
$Y = \lambda \sqrt{X}$ et $Y_k = \lambda \sqrt{X_k}$ et $S_k = \sum_{j=1}^{k} Y_k$ et g_k une densité de S_k. On admet que S_k et Y_{k+1} sont indépendantes.
Si T et Z sont indépendantes, avec leurs densités bornées alors $T + Z$ a une densité f_{T+Z} définie par $f_{T+Z}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(y) f_Z(x-y)\, dy$

1. a) Les densités de Y_1 et Y_2 est $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ e^{-x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ sont bornées.

   Donc S_2 a une densité donnée pour tout réel x par :$g_2(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) f(x-y)\, dy$
   Il faut distinguer suivant que $y \lesseqgtr 0$ et $x - y \lesseqgtr 0 \Longleftrightarrow x \lesseqgtr y$
   et donc distinguer suivant que $x \lesseqgtr 0$
   – Si $x \leq 0$:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) f(x-y)\, dy &= \int_{-\infty}^{0} f(y) f(x-y)\, dy + \int_{0}^{+\infty} f(y) f(x-y)\, dy \\ &= \int_{-\infty}^{0} 0 dy + \int_{0}^{+\infty} 0 dy = 0 \text{ car } x - y \leq 0 \end{aligned}$$

– si $x > 0$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) f(x-y)\,dy &= \int_{-\infty}^{0} f(y) f(x-y)\,dy + \int_{0}^{x} f(y) f(x-y)\,dy \\
&\quad + \int_{x}^{+\infty} f(y) f(x-y)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0dy + \int_{0}^{x} e^{-y} e^{-(x-y)} dy + \int_{x}^{+\infty} 0dy \\
&= \int_{0}^{x} e^{-x} dy \text{ avec } e^{-x} \text{ constante} \\
&= xe^{-x}
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{g_2(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \le 0 \\ xe^{-x} & \text{si } x > 0 \end{cases} \text{ est une densité de } S_2}$

b) Pour $n = 2$ on a $(2-1)! = 1$ et $x^{2-1} = x$ et donc la formule coïncide

Soit $n \ge 2$ tel que $g_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-1} e^{-x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \le 0 \end{cases}$ alors la densité est bornée et S_k et Y_{k+1} sont indépendantes donc une densité de $S_{k+1} = S_k + Y_{k+1}$ est :

– Si $x \le 0$:

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) g_k(x-y)\,dy &= \int_{-\infty}^{0} g_k(y) f(x-y)\,dy + \int_{0}^{+\infty} g_k(y) f(x-y)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0dy + \int_{0}^{+\infty} 0dy = 0 \text{ car } x - y \le 0
\end{aligned}$$

– si $x > 0$

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f(y) f(x-y)\,dy &= \int_{-\infty}^{0} g_k(y) f_k(x-y)\,dy + \int_{0}^{x} g_k(y) f(x-y)\,dy \\
&\quad + \int_{x}^{+\infty} g_k(y) f(x-y)\,dy \\
&= \int_{-\infty}^{0} 0dy + \int_{0}^{x} \frac{1}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-y} e^{-(x-y)} dy + \int_{x}^{+\infty} 0dy \\
&= \int_{0}^{x} \frac{1}{(n-1)!} y^{n-1} e^{-x} dy \text{ avec } e^{-x} \text{ constante} \\
&= \frac{1}{(n-1)!} e^{-x} \left[\frac{1}{n} y^n\right]_0^x \\
&= \frac{1}{n!} e^{-x} x^n
\end{aligned}$$

CQFD.

Conclusion : $\boxed{\text{la formule est donc vraie pour tout } n \ge 2}$

c) D'après le th de transfert, $\dfrac{1}{S_n}$ a une espérance si $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x} g_n(x)\,dx$ converge absolument (

ce qui équivaut à la convergence simple) $\frac{1}{S_n}$

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x} g_n(x)\, dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-2} e^{-x} dx \text{ converge si } n-2 \geq 0 \\ &= \frac{1}{(n-1)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(n-2)!} x^{n-2} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{(n-1)}\end{aligned}$$

et l'intégrale, immpropre en 0 diverge sinon ($x^{n-2}e^{-x} \sim x^{n-2}$ et Riemann)

Conclusion : $\boxed{\frac{1}{S_n} \text{ a une espérance si } n \geq 2 \text{ et } E\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{n-1}}$

de même pour même $\frac{1}{S_n^2}$:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2} g_n(x)\, dx &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(n-1)!} x^{n-3} e^{-x} dx \text{ converge si } n-3 \geq 0 \\ &= \frac{1}{(n-1)(n-2)} \int_0^{+\infty} \frac{1}{(n-3)!} x^{n-3} e^{-x} dx \\ &= \frac{1}{(n-1)(n-3)}\end{aligned}$$

Donc $\frac{1}{S_n^2}$ a une espérance si et seulement si $n \geq 3$ et $E\left(\frac{1}{S_n^2}\right) = \frac{1}{(n-1)(n-2)}$

Donc, si $n \geq 3$:

$$\begin{aligned}V\left(\frac{1}{S_n}\right) &= E\left(\frac{1}{S_n^2}\right) - E\left(\frac{1}{S_n}\right)^2 \\ &= \frac{1}{(n-1)(n-2)} - \frac{1}{(n-1)^2} \\ &= \frac{1}{(n-1)^2(n-2)}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\frac{1}{S_n} \text{ a une variance si et seulement si } n \geq 3 \text{ et } V\left(\frac{1}{S_n}\right) = \frac{1}{(n-1)^2(n-2)}}$

2. On a :

$$\begin{aligned}H(\lambda) &= \ln\left(\prod_{k=1}^n f_\lambda(x_k)\right) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln(f_\lambda(x_k)) \\ &= \sum_{k=1}^n \ln\left(\frac{\lambda}{2\sqrt{x_k}} e^{-\lambda\sqrt{x_k}}\right) \text{ car } x_k > 0 \\ &= \sum_{k=1}^n \left[\ln(\lambda) - \ln(2) - \frac{1}{2}\ln x_k - \lambda\sqrt{x_k}\right] \\ &= n\ln(\lambda) - n\ln(2) - \lambda\sum_{k=1}^n \sqrt{x_k} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n \ln x_k\end{aligned}$$

Donc H est dérivable en tout $\lambda > 0$ et (les autres sont des constantes)

$$\begin{aligned} H'(\lambda) &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k} \\ &= \frac{n - \lambda \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}}{\lambda} \end{aligned}$$

Donc $H'(\lambda)$ est du signe de $n - \lambda \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}$

λ	0	$\frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}}$	$+\infty$
$n - \lambda \sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}$	$+$		$-$
$H'(\lambda)$	$\nearrow$		$\searrow$
$H(\lambda)$			

Donc H a un unique maximum en $\lambda_0 = \dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{x_k}}$.

3. Soit $\lambda_n^* = \dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{X_k}}$. (ce qui est rassurant par rapport aux calculs précédents)

   a) λ_0 est donc une réalisation de λ_n^*.

   b) Il nous faut ici un estimateur dont l'espérance soit λ.
   On recherche donc l'espérance de

$$\begin{aligned} \lambda_n^* &= \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \sqrt{X_k}} \\ &= \lambda \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} \lambda \sqrt{X_k}} \\ &= n\lambda \frac{1}{S_n} \text{ donc} \\ E(\lambda_n^*) &= n\lambda E\left(\frac{1}{S_n}\right) \\ &= \frac{n}{n-1}\lambda \end{aligned}$$

   et donc $E\left(\dfrac{n-1}{n}\lambda_n^*\right) = \lambda$

   Conclusion : $\boxed{\hat{\lambda}_n = \dfrac{n-1}{n}\lambda_n^* \text{ est un estimateur sans biais de } \lambda}$

   Sa variance

$$\begin{aligned} V\left(\hat{\lambda}_n\right) &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 V(\lambda_n^*) \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 V\left(n\lambda \frac{1}{S_n}\right) \\ &= \left(\frac{n-1}{n}\right)^2 (n\lambda)^2 V\left(\frac{1}{S_n}\right) \\ &= (n-1)^2 \lambda^2 \frac{1}{(n-1)^2 (n-2)} \\ &= \frac{1}{(n-2)}\lambda^2 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\text{Le risuqe de } \hat{\lambda}_n \text{ comme estimateur de } \lambda \text{ est } \rho\left(\hat{\lambda}_n\right) = \frac{1}{(n-2)}\lambda}$

c) On a donc $\rho\left(\hat{\lambda}_n\right) \to 0$ quand $n \to +\infty$.

Et quand $n \to +\infty$, la moyenne des écart quadratiques entre $\hat{\lambda}_n$et λ tendra vers 0.

On pourra, pour n grand, raisonnablement espérer qu'ils soient proche l'un de l'autre.

Partie III. Loi à 2 paramètres

1. Soit λ et α deuxparamètres réels strictement psitifs. et

$$f_{\lambda,\alpha}(x) = \begin{cases} \lambda\alpha x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x^\alpha) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

a) $\int_0^{+\infty} f_{\lambda,\alpha}(x)\,dx$ est impropre en 0 (si $\alpha \in]0,1]$) et $+\infty$.
Pour $\varepsilon \to 0^+$:

$$\begin{aligned} \int_\varepsilon^1 f_{\lambda,\alpha}(x)\,dx &= \int_\varepsilon^1 \lambda\alpha x^{\alpha-1}\exp(-\lambda x^\alpha)\,dx \\ &= [-\exp(-\lambda x^\alpha)]_\varepsilon^1 \\ &= [-\exp(-\lambda) + \exp(-\lambda\varepsilon^\alpha)] \\ &\to 1 - e^{-\lambda} \end{aligned}$$

donc $\int_0^1 f_{\lambda,\alpha}(x)\,dx$ converge et vaut $1 - e^{-\lambda}$
Et quand $M \to +\infty$:

$$\begin{aligned} \int_1^M f_{\lambda,\alpha}(x)\,dx &= [-\exp(-\lambda x^\alpha)]_1^M \\ &= -e^{-\lambda M^\alpha} + e^{-\lambda} \\ &\to e^{-\lambda} \end{aligned}$$

donc $\int_1^{+\infty} f_{\lambda,\alpha}(x)\,dx$ converge et vaut $e^{-\lambda}$

Conclusion : $\boxed{\int_0^{+\infty} f_{\lambda,\alpha}(x)\,dx \text{ converge et vaut } 1}$

$f_{\lambda,\alpha}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et positive.$\int_{-\infty}^{+\infty} f_{\lambda,\alpha}(x)\,dx = 1$

Conclusion : $\boxed{f_{\lambda,\alpha} \text{ est une densité de probabiltés sur } \mathbb{R}}$

Soit W de densité $f_{\lambda,\alpha}$ on dit que W suit la loi $\mathcal{WB}(\lambda,\alpha)$

b) On note $F_{\lambda,\alpha}$ le fonction de répartition de W.
Pour tout x réel :
– si $x \leq 0$: $F_{\lambda,\alpha}(x) = \int_{-\infty}^x 0dt = 0$
– pour $x > 0$: $F_\lambda(x) = \int_{-\infty}^0 0dt + \int_0^x f_\lambda(t)\,dt$
avec $\int_\varepsilon^x f_{\lambda,\alpha}(t)\,dxdt = -\exp(-\lambda x^\alpha) + \exp(-\lambda\varepsilon^\alpha) \to 1 - \exp(-\lambda x^\alpha)$
donc $F_{\lambda,\alpha}(x) = 1 - \exp(-\lambda x^\alpha)$

c) Soit $Z = F_{\lambda,\alpha}(W)$
Alors pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} (Z \leq x) &= (F_{\lambda,\alpha}(W) \leq x) \text{ or } W > 0 \text{ et pour } x \in]0,1] \\ &= \left(W \leq F_{\lambda,\alpha}^{-1}(x)\right) \end{aligned}$$

car $F_{\lambda,\alpha}$ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$ donc bijective vers $]0;1]$

Pour $x \leq 0$, l'événement est impossible , et il est certain pour $x > 1$.

Donc la fonction de répartion de $F_{\lambda,\alpha}(W)$ vaut : $\begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ F_{\lambda,\alpha}\left(F_{\lambda,\alpha}^{-1}(x)\right) = x & \text{si } x \in]0,1] \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$

Conclusion : $\boxed{F_{\lambda,\alpha}(W) \hookrightarrow \mathcal{U}_{]0,1]}}$

d) $Z = F_{\lambda,\alpha}(W)$ peut être simulée par `random`

Et on a donc $W = F_{\lambda,\alpha}^{-1}(Z)$ et il reste à déterminer la réciproque sur $y \in]0;1]$:

$$1 - \exp(-\lambda x^\alpha) = y \iff x = \left(-\frac{1}{\lambda}\ln(1-y)\right)^{1/\alpha} = \exp\left(\ln\left(-\ln(1-y)/\lambda\right)/\alpha\right)$$

d'où la fonction, `randomize` devant au préalable intialiser le générateur de nombres aléatoires.

```
function W(lambda,alpha :real) :real ;
begin
    Z :=random ;
    W :=exp(ln(-ln(1-Z))/lambda)/alpha)
end ;
```

2. Soit K de densité f_K nulle sur $\mathbb{R}^-$, continue sur $\mathbb{R}$, de classe C^1 sur $\mathbb{R}_+^*$ et strictement positive sur $\mathbb{R}_+^*$.

On note F_K sa fonciton de répartition.

On pose $R(x) = -\ln(1 - F_K(x))$ et $r(x) = R'(x)$

a) On suppose que $K \hookrightarrow \mathcal{WB}(\lambda, 2)$ avec $\lambda > 0$

i. F_K est fonction de répartion d'une variable à densité. Donc F_K est C^1 là où la densité $(f_{\lambda,2})$ est continue : sur $\mathbb{R}$ et $F_K'(x) = f_K(x) > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$

Comme $F_K' > 0$ sur $\mathbb{R}_+^*$ elle y est strictement croissante.

Comme $F_K \to 1$ en $+\infty$, alors, pour tout x réel, $F_K(x) < 1$ et $1 - F_K(x) > 0$

$R(x) = -\ln(1 - F_K(x))$ et donc R est C^1 comme composée de fonctions C^1 et $R' = r$ est continue et $r(x) = R'(x) = -\dfrac{-F_K'(x)}{1 - F_K(x)} > 0$

$R'(0) = \dfrac{f_{\lambda,2}(0)}{1 - F_K(0)} = 0$

Conclusion : $\boxed{\text{Donc } r \text{ est continue sur } \mathbb{R}_+^* \text{ et strictement croissante et } r(0) = 0.}$

ii. On explicite r pour tout $x > 0$:

$$\begin{aligned} r(x) &= \frac{-F_K'(x)}{1 - F_K(x)} = \frac{f_{\lambda,2}(x)}{1 - F_{\lambda,2}(x)} \\ &= \frac{2\lambda x \exp(-\lambda x^2)}{\exp(-\lambda x^2)} \\ &= 2\lambda x \end{aligned}$$

d'où la fonction de répartion :

$$\begin{aligned} (r(K) \leq x) &= (2\lambda K \leq x) \\ &= \left(K \leq \frac{x}{2\lambda}\right) \end{aligned}$$

N.B. pour passer par labijectivité de r, il faut déterminer sa limite en $+\infty$, ce qui demande d'expliciter $r(x)$. Dès lors, autant en profiter !
donc, :

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(r(K) \leq x) &= F_{\lambda,2}\left(\frac{x}{2\lambda}\right) \text{ et pour } \frac{x}{2\lambda} > 0 \\
&= 1 - \exp\left(-\lambda\left(\frac{x}{2\lambda}\right)^2\right) \\
&= 1 - \exp\left(-\frac{1}{4\lambda}x^2\right) \\
&= 0 \text{ si } x \leq 0
\end{aligned}$$

et on reconnait la fonciton de répartition de $\mathcal{WB}\left(\frac{1}{4\lambda}, 2\right)$

Conclusion : $\boxed{r(K) \hookrightarrow \mathcal{WB}\left(\frac{1}{4\lambda}, 2\right)}$

b) Réciproquement, r est strictement croissante, sur $\mathbb{R}_+$
et $r(x) = \dfrac{-F_K'(x)}{1 - F_K(x)}$
Soit $Z = r(K) \hookrightarrow \mathcal{WB}\left(\frac{1}{4\lambda}, 2\right)$
Alors, pour tout $x \geq 0$

$$(K \leq x) = (r(K) \leq r(x))$$

car r strictement croissante, sur $\mathbb{R}_+$ donc, comme $r(x) \geq 0$

$$\begin{aligned}
F_K(x) &= \mathrm{P}(K \leq x) \\
&= \mathrm{P}(r(K) \leq r(x)) \\
&= F_{\frac{1}{4\lambda},2}(r(x))
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
F_K'(x) &= F'_{\frac{1}{4\lambda},2}(r(x))\, r'(x) \\
&= \cdots
\end{aligned}$$

3. Soit, pour $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$\varphi(x) = \frac{\sum_{k=1}^n (w_k)^x \ln(w_k)}{\sum_{k=1}^n (w_k)^x} - \frac{1}{x}$$

a) Soit $Q(t) = \sum_{k=1}^n (z_k - t\ y_k)^2 \geq 0$ somme de carrés.
et

$$\begin{aligned}
Q(t) &= \sum_{k=1}^n \left(z_k^2 - 2t\ z_k y_k + t^2 y_k^2\right) \\
&= t^2 \sum_{k=1}^n \left(y_k^2\right) - 2t \sum_{k=1}^n (z_k y_k) + \sum_{k=1}^n \left(z_k^2\right)
\end{aligned}$$

Astuce : polyôme du second degré, positif ou nul pour tout $t \in \mathbb{R}$.
Son discriminant est doncnégatif ou nul

$$\Delta = 4\left[\sum_{k=1}^{n}(z_k y_k)\right]^2 - 4\sum_{k=1}^{n}\left(y_k^2\right)\sum_{k=1}^{n}\left(z_k^2\right) \leq 0$$

Conclusion : $\boxed{\left(\sum_{k=1}^{n} z_k y_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} y_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} z_k^2\right)}$

b) Prémabule : La dérivée de $x \to a^x = \exp(x\ln(a))$ est $x \to \exp(a\ln(x))\ln(a) = \ln(a)\,a^x$

φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car $w_k > 0$) et

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &= \frac{\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x(\ln(w_k))^2\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x - \sum_{k=1}^{n}(w_k)^x\ln(w_k)\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x\ln(w_k)}{\left(\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x\right)^2} + \frac{1}{x^2}\\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n}\left((w_k)^x(\ln(w_k))^2\right)\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x - \left[\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x\ln(w_k)\right]^2}{\left(\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x\right)^2} + \frac{1}{x^2}
\end{aligned}$$

et on utlise l'inégalité précédente (par ce que l'on ne sait pas quoi faire d'autre)

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x\ln(w_k)\right]^2 \leq \left[\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x\right]^2\left[\sum_{k=1}^{n}\ln(w_k)\right]^2$$

donc

$$\begin{aligned}
\varphi'(x) &\geq \frac{\sum_{k=1}^{n}\left((w_k)^x(\ln(w_k))^2\right)\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x - \left[\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x\right]^2\left[\sum_{k=1}^{n}\ln(w_k)\right]^2}{\left(\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x\right)^2} + \frac{1}{x^2}\\
&= \left[\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x\right]\frac{\sum_{k=1}^{n}\left((w_k)^x(\ln(w_k))^2\right) - \sum_{k=1}^{n}(w_k)^x\left[\sum_{k=1}^{n}\ln(w_k)\right]^2}{\left(\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x\right)^2} + \frac{1}{x^2}\\
&= \frac{\sum_{k=1}^{n}\left((w_k)^x(\ln(w_k))^2\right) - \sum_{k=1}^{n}(w_k)^x\left[\sum_{k=1}^{n}\ln(w_k)\right]^2}{\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x} + \frac{1}{x^2} > 0???
\end{aligned}$$

et j'admet φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

c) On note n_0 le nombre d'entiers k_0 de $[[1,n]]$ tel que $w_{k_0} = \max\limits_{1\leq k\leq n}(w_k)$.

C'est donc le nombre des indices pour lesquels w prend sa valeur maximale.

Pour un nombre fini d'indice, le maximum est atteint au moins une fois, donc $n_0 \geq 1$

$n_0 = n$ signifierait que ce maximum est atteint pour tous les indices, donc que w_k serait la même valeur pour tout k.

Et comme ils sont supposés non tous égaux,

Conclusion : $\boxed{1 \leq n_0 \leq n}$

d) On factorise par le prépondérant pour avoir un équivalent quand $x \to +\infty$.

C'est l'exponentielle de plus grande base. Soit w_{k_0} une telle base

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x &= (w_{k_0})^x\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{w_k}{w_{k_0}}\right)^x = (w_{k_0})^x\left[\sum_{k\ /\ w_k=w_{k_0}}1 + \sum_{k\ /\ w_k\neq w_{k_0}}\left(\frac{w_k}{w_{k_0}}\right)^x\right]\\
&= n_0(w_{k_0})^x\frac{1}{n_0}\left[\sum_{k\ /\ w_k=w_{k_0}}1 + \sum_{k\ /\ w_k\neq w_{k_0}}\left(\frac{w_k}{w_{k_0}}\right)^x\right]
\end{aligned}$$

et pour les k tels que $w_k \neq w_{k_0}$ on a $0 < \left(\frac{w_k}{w_{k_0}}\right) < 1$ et donc les termes tendent verts 0 et $\frac{1}{n_0}[]$ tend vers 1.

Conclusion : $\boxed{\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x \sim n_0(w_{k_0})^x \text{ quand } x \text{ tend vers } +\infty}$

e) On a alors

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x \ln(w_k)}{\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{(w_{k_0})^x \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{w_k}{w_{k_0}}\right)^x \ln(w_k)}{n_0 (w_{k_0})^x \frac{\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x}{n_0 \left(w_{k_0}\right)^x}} - \frac{1}{x} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{w_k}{w_{k_0}}\right)^x \ln(w_k)}{n_0 \frac{\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x}{n_0\left(w_{k_0}\right)^x}} - \frac{1}{x}\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{w_k}{w_{k_0}}\right)^x \ln(w_k) &= \left[\sum_{k\ /\ w_k = w_{k_0}} \ln(w_{k_0}) + \sum_{k\ /\ w_k \neq w_{k_0}} \left(\frac{w_k}{w_{k_0}}\right)^x \ln(w_k)\right] \\ &\to n_0 \ln(w_{k_0})\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}\text{donc, avec } w_{k_0} \text{ la plus grande valeur de } w_k \\ \varphi(x) \to \ln(w_{k_0}) \text{ quand } x \to +\infty \ (0 \text{ si } w_{k_0} = 1)\end{array}}$

f) Il faut encore déterminer la limite en 0 pour appliquer le théorème de bijection :
Si $a > 0$ on a $a^x = \exp(x \ln(a)) \to \exp(0) = 1$ quand $x \to 0$ donc

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= \frac{\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x \ln(w_k)}{\sum_{k=1}^{n}(w_k)^x} - \frac{1}{x} \\ &\to -\infty \text{ quand } x \to 0^+\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\varphi(x) \to -\infty \text{ quand } x \to 0^+}$

et il reste à déterminer si $\frac{1}{n}\sum \ln(w_k)$ est bien dans l'intervalle image.
Pour tout $k \in [[1;n]]$ on a $w_k \leq w_{k_0}$ donc $\ln(w_k) \leq \ln(w_{k_0})$ et $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(w_k) < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(w_{k_0}) = \ln(w_{k_0})$
avec inégalité stricte car car l'un au moins des termes est $< w_{k_0}$.

Conclusion : $\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(w_k) < \ln(w_{k_0})}$

Finalement, φ est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$
Donc bijective de $\mathbb{R}_+^*$ dans $]-\infty, \ln(w_{k_0})[$.
de plus $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(w_k) \in \left]-\infty, \ln(w_{k_0})\right[$.

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l}\text{l'équation } \varphi(x) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(w_k) \\ \text{a une unique solution sur } \mathbb{R}_+^*\end{array}}$

4. Pour tout $k \in [[1;n]]$ on suppose $W_k \hookrightarrow \mathcal{WB}(\lambda, \alpha)$. et w_k une rélalisation
Soit $G(\lambda, \alpha) = \ln\left(\prod_{k=1}^{n} f_{\lambda,\alpha}(w_k)\right) = \sum_{k=1}^{n}\ln(f_{\lambda,\alpha}(w_k))$

   a) $f_{\lambda,\alpha}(w_k) = \lambda\alpha w_k^{\alpha-1}\exp(-\lambda w_k^{\alpha})$ car $w_k > 0$
   Donc G est de classe C^2 sur $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$ (pour que la fonction $f_{l,\alpha}$ soit définie par l'énoncé) car $f_{\lambda,\alpha}(w_k) > 0$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial\left(\lambda\alpha w_k^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda w_k^{\alpha}\right)\right)}{\partial\lambda} &= \alpha\left[w_k^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda w_k^{\alpha}\right)+\lambda w_k^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda w_k^{\alpha}\right)\times -w_k^{\alpha}\right]\\
&= \alpha w_k^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda w_k^{\alpha}\right)\left(1-\lambda w_k^{\alpha}\right)\\
\frac{\partial\left(\lambda\alpha w_k^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda w_k^{\alpha}\right)\right)}{\partial\alpha} &= \lambda\left[\begin{array}{c} w_k^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda w_k^{\alpha}\right)+\alpha\ln\left(w_k\right)w_k^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda w_k^{\alpha}\right)\\ +\alpha w_k^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda w_k^{\alpha}\right)\times\left(-\lambda\ln\left(w_k\right)w_k^{\alpha}\right)\end{array}\right]\\
&= \lambda w_k^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda w_k^{\alpha}\right)\left[1+\alpha\ln\left(w_k\right)-\alpha\lambda\ln\left(w_k\right)w_k^{\alpha}\right]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial\lambda}\left(\lambda,\alpha\right) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f_{\lambda,\alpha}\left(w_k\right)}\frac{\partial f_{\lambda,\alpha}\left(w_k\right)}{\partial\lambda}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda\alpha w_k^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda w_k^{\alpha}\right)}\left[\alpha w_k^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda w_k^{\alpha}\right)\left(1-\lambda w_k^{\alpha}\right)\right]\\
&= \frac{1}{\lambda}\sum_{k=1}^{n}\left(1-\lambda w_k^{\alpha}\right)=\frac{n}{\lambda}-\sum_{k=1}^{n}w_k^{\alpha}\\
\frac{\partial G}{\partial\alpha}\left(\lambda,\alpha\right) &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f_{\lambda,\alpha}\left(w_k\right)}\frac{\partial f_{\lambda,\alpha}\left(w_k\right)}{\partial\alpha}\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\lambda\alpha w_k^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda w_k^{\alpha}\right)}\lambda w_k^{\alpha-1}\exp\left(-\lambda w_k^{\alpha}\right)\left[1+\alpha\ln\left(w_k\right)-\alpha\lambda\ln\left(w_k\right)w_k^{\alpha}\right]\\
&= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\alpha}\left[1+\alpha\ln\left(w_k\right)-\alpha\lambda\ln\left(w_k\right)w_k^{\alpha}\right]\\
&= \frac{n}{\alpha}+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(w_k\right)-\lambda\sum_{k=1}^{n}\ln\left(w_k\right)w_k^{\alpha}
\end{aligned}
$$

Donc (λ,α) est un point critique si et seulement si :

$$
\frac{n}{\lambda}-\sum_{k=1}^{n}w_k^{\alpha}=0\iff\lambda=\frac{n}{\sum_{k=1}^{n}w_k^{\alpha}}
$$

α étant lui même déteriné par :

$$
\begin{aligned}
\frac{n}{\alpha}+\sum_{k=1}^{n}\ln\left(w_k\right)-\lambda\sum_{k=1}^{n}\ln\left(w_k\right)w_k^{\alpha}=0 \quad&\iff\quad \frac{1}{\alpha}-\frac{\lambda}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(w_k\right)w_k^{\alpha}=-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(w_k\right)\\
&\iff\quad \frac{1}{\alpha}-\frac{1}{\sum_{k=1}^{n}w_k^{\alpha}}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(w_k\right)w_k^{\alpha}=-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(w_k\right)
\end{aligned}
$$

où l'on voit réaparaître

$$
\begin{aligned}
&\iff\quad -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(w_k\right)=-\varphi\left(\alpha\right)\\
&\iff\quad \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln\left(w_k\right)=\varphi\left(\alpha\right)
\end{aligned}
$$

Et cette équaito a une seule solution $\alpha=\hat{\alpha}$ d'où la valeur $\lambda=\hat{\lambda}=\dfrac{n}{\sum_{k=1}^{n}w_k^{\hat{\alpha}}}$.

Conclusion : $\boxed{G \text{ a un unique point critique } \left(\hat{\lambda},\hat{\alpha}\right)}$

b) Sur l'ouvert, $\left(\mathbb{R}_+^*\right)^2$, pour vérifier si l'on a un extermum local on détermine les dérivées partielle secondes.

On avait

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G}{\partial \lambda}(\lambda,\alpha) &= \frac{n}{\lambda} - \sum_{k=1}^{n} w_k^{\alpha} \\
\frac{\partial G}{\partial \alpha}(\lambda,\alpha) &= \frac{n}{\alpha} + \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k) - \lambda \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)\, w_k^{\alpha}
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
r &= \frac{\partial^2 G}{\partial \lambda^2}(\lambda,\alpha) = -\frac{n}{\lambda^2} \\
s &= \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha \partial \lambda}(\lambda,\alpha) = -\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)\, w_k^{\alpha} \\
t &= \frac{\partial^2 G}{\partial \alpha^2}(\lambda,\alpha) = -\frac{n}{\alpha^2} - \lambda \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)^2\, w_k^{\alpha}
\end{aligned}$$

et en $\left(\hat{\lambda},\hat{\alpha}\right)$:

$$\begin{aligned}
r &= -\frac{\left(\sum_{k=1}^{n} w_k^{\hat{\alpha}}\right)^2}{n} \\
s &= -\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)\, w_k^{\hat{\alpha}} \\
t &= -\frac{n}{\hat{\alpha}^2} - \frac{n}{\sum_{k=1}^{n} w_k^{\hat{\alpha}}} \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)^2\, w_k^{\hat{\alpha}} \\
&= -n\left[\frac{1}{\hat{\alpha}^2} - \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)^2\, w_k^{\hat{\alpha}}}{\sum_{k=1}^{n} w_k^{\hat{\alpha}}}\right]
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
rt - s^2 &= \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} w_k^{\hat{\alpha}}\right)^2}{n} n\left[\frac{1}{\hat{\alpha}^2} - \frac{\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)^2\, w_k^{\hat{\alpha}}}{\sum_{k=1}^{n} w_k^{\hat{\alpha}}}\right] - \left(\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)\, w_k^{\hat{\alpha}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{\hat{\alpha}^2}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k^{\hat{\alpha}}\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)^2\, w_k^{\hat{\alpha}} \sum_{k=1}^{n} w_k^{\hat{\alpha}} - \left(\sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)\, w_k^{\hat{\alpha}}\right)^2 \\
&= \frac{1}{\hat{\alpha}^2}\left(\sum_{k=1}^{n} w_k^{\hat{\alpha}}\right)^2 - \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)^2\, w_k^{\hat{\alpha}} \left[\sum_{k=1}^{n} w_k^{\hat{\alpha}} + \sum_{k=1}^{n} \ln(w_k)\, w_k^{\hat{\alpha}}\right]
\end{aligned}$$

et il est temps de jeter l'éponge !

Bilan : dernière partie fortement discriminante.