HEC, option économique - Épreuve de mathématiques du 26 avril 2017

Corrigé proposé par Romain Meurant pour l'APHEC. Toute suggestion permettant de l'améliorer est la bienvenue : romain.meurant@lycee-descartes.ma

Exercice

1. (a) On a : $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$.

   (b) Par conséquent, le polynôme $X^2 - 1 \in \mathbb{R}[X]$ annule la matrice A.
   Par le cours, le spectre de A est inclus dans l'ensemble des racines de ce polynôme :
   $$\mathrm{Sp}(A) \subset \{1, -1\}.$$
   On vérifie facilement que chacun de ces deux réels est valeur propre ; en effet, pour $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R})$:
   $$AX = X \iff x = y \quad \text{et} \quad AX = -X \iff x = -y.$$
   En conclusion :
   $$\mathrm{Sp}(A) = \{1, -1\}.$$

   (c) La matrice A est diagonalisable puisqu'elle est d'ordre 2 et admet deux valeurs propres.

2. (a) Le code et la sortie `Scilab` montrent que, en posant $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, la matrice P est inversible (sinon, on aurait une erreur en retour !) et vérifie :
   $$P^{-1}BP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
   Par conséquent, B est diagonalisable et $\mathrm{Sp}(B) = \{1, -1\}$.

   (b) On obtient une base de chacun des sous-espaces propres de B en lisant les colonnes de P *(attention à l'ordre des valeurs propres dans le retour* `Scilab`*)* :
   $$\mathrm{E}_B(1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \quad ; \quad \mathrm{E}_B(1) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right).$$

3. (a) Le nombre de coefficients d'une matrice de $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$ est n^2, chacun pouvant prendre deux valeurs. Il y a donc 2^{n^2} matrices dans $\mathcal{B}_n(\mathbb{R})$.

   (b) Les matrices souhaitées sont exactement celles où chaque ligne est l'une des n lignes suivantes :
   $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad \dots, \quad \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
   (un « 1 » sur chaque ligne et des « 0 » ailleurs)
   avec les lignes deux-à-deux distinctes (de sorte que chaque colonne comporte exactement un « 1 »).
   En raisonnant ligne par ligne :
   - pour la première ligne de la matrice, on choisit l'une des n lignes ci-dessus ;
   - pour la deuxième ligne de la matrice, on choisit l'une des n lignes ci-dessus sauf celle choisie pour la première ligne ($n-1$ possibilités) ;
   - pour la troisième ligne de la matrice, on choisit l'une des n lignes ci-dessus sauf les deux lignes déjà choisies précédemment ($n-2$ possibilités) ;
   - etc.
   - il ne reste qu'une possibilité pour la dernière ligne.

   Les matrices souhaitées sont donc au nombre de $n \times (n-1) \times (n-2) \times \cdots \times 1 = n!$.

   Formellement, en notant $L_1, \dots, L_n$ les lignes ci-dessus, il s'agit des matrices de la forme $\begin{pmatrix} L_{\sigma(1)} \\ \vdots \\ L_{\sigma(n)} \end{pmatrix}$ où $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ (permutations de $[\![1, n]\!]$).

4. (a) Montrons l'inclusion $\mathrm{Im}(u - id) \subset \mathrm{Ker}(u + id)$.
   Soit $y \in \mathrm{Im}(u - id)$, c'est-à-dire :
   $$\exists x \in E, \ (u - id)(x) = u(x) - x = y.$$
   On a alors :
   $$\begin{array}{rcll} (u+id)(y) & = & u(y) + y & \\ & = & u\big(u(x) - x\big) + u(x) - x & \\ & = & u\big(u(x)\big) - u(x) + u(x) - x & \text{(linéarité de } u) \\ & = & x - x & (u \circ u = id) \\ & = & 0_E & \end{array}$$
   c'est-à-dire $y \in \mathrm{Ker}(u + id)$.
   On a ainsi prouvé l'inclusion demandée.

   (b) L'inclusion prouvée ci-dessus donne l'inégalité entre les dimensions :
   $$\dim \mathrm{Im}(u - id) \leq p.$$
   Le théorème du rang appliqué à l'endomorphisme $u - id$ donne par ailleurs :
   $$q + \dim \mathrm{Im}(u - id) = n.$$
   On en déduit l'inégalité :
   $$n \leq p + q.$$

(c) Comme p et q sont non nuls, 1 et -1 sont valeurs propres de u (de sous-espaces propres respectifs F et G).
Par ailleurs, on a (toujours vrai) :

$$\sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(u)} \mathrm{E}_u(\lambda) \leq n \quad (\star).$$

Avec l'inégalité de la question précédente, $(\star)$ est donc une égalité, ce qui prouve que u est diagonalisable et n'admet pas d'autre valeur propre que 1 et -1.

La famille $(f_1, \ldots, f_p, g_1, \ldots, g_q)$ contenant $p + q = n$ $(= \dim E)$ vecteurs, il suffit d'en justifier la liberté ce qui est un résultat du cours : la concaténation de familles libres de sous-espaces propres associés à des valeurs propres deux-à-deux distinctes donne une famille libre.

(d) Puisque $g_1 \in \mathrm{E}_u(1)$ et $f_1 \in \mathrm{E}_u(-1)$:

$$u(g_1 - f_1) = u(g_1) - u(f_1) = g_1 - (-f_1) = g_1 + f_1.$$

Et aussi (même calcul ou en se souvenant que $u \circ u = id$) :

$$u(g_1 + f_1) = g_1 - f_1.$$

(e) Ce qui est fait en (d) reste en fait valable en remplaçant les indices « 1 » par un entier de $[\![1, p]\!]$:

$$\forall i \in [\![1, p]\!], \quad u(g_i - f_i) = g_i + f_i \quad \text{et} \quad u(g_i + f_i) = g_i - f_i.$$

Considérons la famille :

$$\mathcal{B} = (g_1 - f_1,\ g_1 + f_1,\ g_2 - f_2,\ g_2 + f_2,\ \ldots, g_p - f_p,\ g_p + f_p,\ g_{p+1},\ g_{p+2},\ \ldots,\ g_q).$$

Elle contient $2p + (q - p) = p + q = n$ vecteurs.
Montrons qu'elle est libre ; si $\alpha_1, \alpha_1', \ldots, \alpha_p, \alpha_p', \beta_{p+1}, \ldots, \beta_q$ sont n réels tels que :

$$\alpha_1(g_1 - f_1) + \alpha_1'(g_1 + f_1) + \cdots + \alpha_p(g_p - f_p) + \alpha_p'(g_p + f_p) + \beta_{p+1} g_{p+1} + \cdots + \beta_q g_p = 0_E$$

ce que l'on peut réordonner ainsi :

$$(\alpha_1 + \alpha_1')g_1 + \cdots + (\alpha_p + \alpha_p')g_p + \beta_{p+1} g_{p+1} + \cdots + \beta_q g_p = (\alpha_1 - \alpha_1')f_1 + \cdots + (\alpha_p - \alpha_p')f_p.$$

Dans cette dernière égalité, le membre de gauche est un vecteur de $\mathrm{E}_u(1)$ (combinaison linéaire des $g_1, \ldots, g_q$) et le membre de droite un vecteur de $\mathrm{E}_u(-1)$ (combinaison linéaire des $f_1, \ldots, f_p$). Puisque deux sous-espaces propres associés à des valeurs propres distinctes sont toujours d'intersection nulle, on a d'abord :

$$(\alpha_1 - \alpha_1')f_1 + \cdots + (\alpha_p - \alpha_p')f_p = 0_E$$

ce qui prouve, comme la famille $(f_1, \ldots, f_p)$ est libre, que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ \alpha_i = \alpha_i'$$

et donc ensuite :

$$2\alpha_1 g_1 + \ldots 2\alpha_p g_p + \beta_{p+1} g_{p+1} + \cdots + \beta_q g_q = 0_E$$

ce qui prouve, comme la famille $(g_1, \ldots, g_q)$ est libre, que :

$$\forall i \in [\![1, p]\!],\ \alpha_i (= \alpha_i') = 0 \quad \text{et} \quad \forall j \in [\![p + 1, q]\!],\ \beta_j = 0.$$

On en déduit que la famille $\mathcal{B}$ de E est libre et en est donc une base (n vecteurs).

Pour chaque entier i de $[\![1, p]\!]$, la restriction de u au sous-espace vectoriel de E engendré par $g_i - f_i$ et $g_i + f_i$ (stable par u) s'écrit, dans la base $(g_i - f_i,\ g_i + f_i)$:

$$\begin{array}{cc} \begin{array}{cc} u(g_i - f_i) & u(g_i + f_i) \end{array} & \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} g_i - f_i \\ g_i + f_i \end{array} \end{array}$$

Par ailleurs, les vecteurs g_j $(j \in [\![p + 1, q]\!])$ étant vecteurs propres associés à la valeur propre 1 de u, la matrice de u dans la base $\mathcal{B}$ s'écrit :

$$\left(\begin{array}{cccc} \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boxed{\begin{matrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{matrix}} \\ & & & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{matrix}} \end{array}\right)$$

(les blocs bleus sont au nombre de p ; le bloc rouge est la matrice identité I_{q-p} ; il n'y a que des « 0 » en dehors des blocs).

On retrouve la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *de l'exemple 2 avec* $p = 1$ *et* $q = 2$.

Problème

1. (a) La fonction $G_{a,b}$ est continue et strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+$ (elle y est en effet dérivable avec ${G_{a,b}}'(x) = -(a+b)\exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) < 0$) donc réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ dans $]\lim_{+\infty} G_{a,b}, G_{a,b}(0)] =]0,1]$.

   (b) L'équation $ax + \frac{b}{2}x^2 = y$, soit $\frac{b}{2}x^2 + ax - y = 0$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}$ est polynomiale de degré 2 ($b \neq 0$) et de discriminant :

$$\Delta = a^2 - 4\frac{b}{2}(-y) = a^2 + 2by.$$

   Pour $y > 0$, ce discriminant est strictement positif et l'équation admet donc exactement deux solutions réelles :

$$x_1 = \frac{-a + \sqrt{a^2 + 2by}}{b} \quad ; \quad x_2 = \frac{-a - \sqrt{a^2 + 2by}}{b}.$$

   (c) Soit $u \in [0,1[$. Posons $x = {G_{a,b}}^{-1}(1-u) \in \mathbb{R}_+$, c'est-à-dire :

$$\exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right) = 1 - u \iff ax + \frac{b}{2}x^2 = -\ln(1-u).$$

   La question précédente appliquée à $y = -\ln(1-u)$ (> 0 car $1 - u < 1$), en ayant remarqué que $x_1 > 0$ et $x_2 < 0$ (on choisit donc x_1), donne :

$$x = \frac{-a + \sqrt{a^2 - 2b\ln(1-u)}}{b}.$$

2. (a) La fonction $G_{a,b}$:
   - est intégrable sur le segment $[0,1]$ car y est continue ;
   - est intégrable sur $[1,+\infty[$ car y est continue, positive et $G_{a,b}(x) = \underset{+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right)$ (comparaison avec l'intégrale de Riemann convergente $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}dx$).

   Donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} G_{a,b}(d)dx$ converge.

   (b) On peut réécrire l'expression de f ainsi :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\frac{1}{b}}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x - \left(-\frac{a}{b}\right)}{\sqrt{\frac{1}{b}}}\right)^2\right)$$

   On reconnaît alors la densité continue d'une variable de loi normale $\mathcal{N}\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)$.

   (c) Pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sqrt{\frac{b}{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}b\left(x^2 + 2\frac{a}{b}x + \frac{a^2}{b^2}\right)\right) \\ &= \sqrt{\frac{b}{2\pi}}\exp\left(-\frac{b}{2}x^2 - ax - \frac{a^2}{2b}\right) \\ &= \sqrt{\frac{b}{2\pi}}\exp\left(-\frac{a^2}{2b}\right)G_{a,b}(x) \end{aligned}$$

   On a donc :

$$\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}}\exp\left(\frac{a^2}{2b}\right)\int_0^{+\infty} f(x)dx \quad (\star).$$

   Soit X une variable aléatoire de loi $\mathcal{N}\left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right)$; la question précédente donne :

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \mathrm{P}(X \geq 0).$$

   Par transformation affine, on se ramène à la variable centrée réduite $X^\star = \sqrt{b}\left(X + \frac{a}{b}\right)$:

$$\mathrm{P}(X \geq 0) = \mathrm{P}\left(X^\star \geq \frac{a}{\sqrt{b}}\right) = 1 - \mathrm{P}\left(X^\star < \frac{a}{\sqrt{b}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{a}{\sqrt{b}}\right) = \Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right)$$

   En reportant dans $(\star)$:

$$\int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)dx = \sqrt{\frac{2\pi}{b}}\exp\left(\frac{a^2}{2b}\right)\Phi\left(-\frac{a}{\sqrt{b}}\right).$$

3. (a) La fonction $f_{a,b}$ est clairement continue (sauf en 0) et positive. De plus :

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f_{a,b}(x)dx &= \int_0^{+\infty}(a+bx)\exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right)dx \\ &= -\lim_{A\to+\infty}\left[\exp\left(-ax - \frac{b}{2}x^2\right)\right]_0^A \\ &= 1 + \lim_{A\to+\infty}\exp\left(-aA - \frac{b}{2}A^2\right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

   Ainsi, $f_{a,b}$ est bien une densité de probabilité.

(b) Sous réserve de convergence de l'intégrale :

$$\mathrm{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{a,b}(x)dx = \int_0^{+\infty} -x(-a-bx)\exp\left(-ax-\frac{b}{2}x^2\right)dx$$

Les fonctions $u : x \mapsto -x$ et $v : x \mapsto \exp\left(-ax-\frac{b}{2}x^2\right) = G_{a,b}(x)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[0, A]$ où A est un réel positif ; par intégration par parties :

$$\begin{aligned}\int_0^A -x\underbrace{(-a-bx)\exp\left(-ax-\frac{b}{2}x^2\right)}_{=v'(x)}dx &= \Big[-xG_{a,b}(x)\Big]_0^A - \int_0^A -G_{a,b}(x)dx \\ &= -AG_{a,b}(A) + \int_0^A G_{a,b}(x)dx\end{aligned}$$

Par croissances comparées, $AG_{a,b}(A) \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
On en déduit que X admet une espérance et que celle-ci vaut :

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^{+\infty} G_{a,b}(x)dx.$$

4. (a) Soit $\omega \in \Omega$ et $y = Y(\omega)$ (> 0 car Y suit une loi exponentielle).
La question 1.(b) nous donne le signe de $ax + \frac{b}{2}x^2 - y$ en fonction de $x \in \mathbb{R}_+$:

x	0		$\frac{-a+\sqrt{a^2+2by}}{b}$		$+\infty$
$ax+\frac{b}{2}x^2-y$		$-$	0	$+$	

(l'expression est négative entre les racines (l'autre racine est négative))

On en déduit, pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$X(\omega) \geq x \iff \frac{-a+\sqrt{a^2+2by}}{b} \geq x \iff ax+\frac{b}{2}x^2-y \leq 0 \iff Y(\omega) \geq ax+\frac{b}{2}x^2.$$

Par conséquent :

$$\mathrm{P}(X \geq x) = \mathrm{P}\left(Y \geq ax+\frac{b}{2}x^2\right) = 1 - F_Y\left(ax+\frac{b}{2}x^2\right)$$

où F_Y est la fonction de répartition de $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(1)$:

$$\forall t \in \mathbb{R},\ F_Y(t) = \begin{cases} 1-\exp(-t) & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{si } t \leq 0 \end{cases}.$$

Comme a et b sont strictement positifs, $ax + \frac{b}{2}x^2$ aussi et donc :

$$\mathrm{P}(X \geq x) = 1 - \left(1-\exp\left(-ax+\frac{b}{2}x^2\right)\right) = \exp\left(-ax+\frac{b}{2}x^2\right) = G_{a,b}(x).$$

(b) La question précédente nous donne immédiatement la fonction de répartition F_X de X (en ayant noté que X est à valeurs positives au vu de sa définition) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 1-G_{a,b}(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}.$$

La fonction $G_{a,b}$ étant de classe $\mathcal{C}^1$ (sur $\mathbb{R}_+$) et valant 1 en 0, la fonction de répartition F_X de X est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$; par conséquent, X est une variable aléatoire à densité et, puisque :

$$\forall x \in \mathbb{R}^*,\ F_X{}'(x) = \left\{\begin{matrix} -G_{a,b}{}'(x) & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{matrix}\right\} = f_{a,b}(x)$$

la fonction $f_{a,b}$ est une densité de X.
On en déduit que : $X \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(a,b)$.

(c) Notons V la variable aléatoire $G_{a,b}{}^{-1}(1-U)$ et déterminons-en la fonction de répartition F_V (nulle sur $\mathbb{R}_-$ puisque V est positive) ; pour tout $x \in \mathbb{R}_+$:

$$F_V(x) = \underbrace{\mathrm{P}(G_{a,b}{}^{-1}(1-U) \leq x) = \mathrm{P}(1-U \geq G_{a,b}(x))}_{G_{a,b} \text{ est une bijection strictement décroissante de } \mathbb{R}_+ \text{ dans }]0,1]} = F_U(1-G_{a,b}(x))$$

Comme $1 - G_{a,b}(x) \in [0, 1[$ et que, pour tout $t \in [0, 1]$, $F_U(t) = t$:

$$F_V(x) = 1 - G_{a,b}(x).$$

Les variables X et V ont même fonction de répartition donc même loi :

$$G_{a,b}{}^{-1}(1-U) \hookrightarrow \mathcal{E}_\ell(a,b).$$

5. (a) La ligne (2) du code génère un échantillon de taille n suivant la loi uniforme sur $[0, 1[$.

(b) On complète la ligne (3) grâce à la question 1.(c) :

```
function x=grandlinexp(a,b,n)
    u = rand(n,1)
    y = -log(1-u)
    x = (-a+sqrt(a^2+2*b*y))/b
endfunction
```

6. Le code proposé ici va nous fournir des valeurs de plus en plus proches de l'espérance d'une variable aléatoire X de loi exponentielle linéaire de paramètres[1] $a=0$ et $b=1$ (méthode de Monte-Carlo). D'après 3.(c) et 2.(c) :

$$\mathrm{E}(X)=\int_0^{+\infty} G_{0,1}(x)dx=\sqrt{2\pi}\ \exp(0)\ \Phi(0)=\sqrt{2\pi}\times\frac{1}{2}=\sqrt{\frac{\pi}{2}}.$$

7. En écrivant, pour tout $x\in\mathbb{R}_+$:

$$(M_n\geq x)=(X_1\geq x)\cap(X_2\geq x)\cap\cdots\cap(X_n\geq x).$$

Les variables $X_1,\dots,X_n$ étant indépendantes et de même loi :

$$\mathrm{P}(M_n\geq x)=\mathrm{P}(X_1\geq x)\times\cdots\times\mathrm{P}(X_n\geq x)=\big(\mathrm{P}(X_1\geq x)\big)^n.$$

Donc :

$$\mathrm{P}(M_n\geq x)=\big(G_{a,b}(x)\big)^n=\exp\left(-(an)x-\frac{bn}{2}x^2\right)=G_{an,bn}(x).$$

La variable M_n suit donc la loi exponentielle linéaire de paramètres an et bn.

8. (a) Bien entendu, U_n étant positive, sa fonction de répartition est nulle sur $\mathbb{R}_-$. Pour $x\in\mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(U_n>x) &= \mathrm{P}\left(H_n>\frac{x}{n}\right)\\ &= \mathrm{P}\left(\min(h,X_1,\dots,X_n)>\frac{x}{n}\right)\\ &= \begin{cases}0 & \text{si } h\leq\dfrac{x}{n}\\ \mathrm{P}\left(\min(X_1,\dots,X_n)>\dfrac{x}{n}\right) & \text{sinon}\end{cases}\\ &= \begin{cases}0 & \text{si } x\geq hn\\ \mathrm{P}\left(M_n>\dfrac{x}{n}\right) & \text{sinon}\end{cases}\end{aligned}$$

Puisque M_n est à densité, $\mathrm{P}\left(M_n>\frac{x}{n}\right)=\mathrm{P}\left(M_n\geq\frac{x}{n}\right)$, donc pour $0\leq x<hn$:

$$\begin{aligned}F_{U_n}(x) &= 1-\mathrm{P}(U_n>x) = 1-G_{an,bn}\left(\frac{x}{n}\right)\\ &= 1-\exp\left(-(an)\left(\frac{x}{n}\right)-\frac{bn}{2}\left(\frac{x}{n}\right)^2\right)\\ &= 1-\exp\left(-ax-\frac{b}{2n}x^2\right)\end{aligned}$$

En résumé :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_{U_n}(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0\\ 1-\exp\left(-ax-\dfrac{b}{2n}x^2\right) & \text{si } 0\leq x<nh\\ 1 & \text{si } x\geq nh\end{cases}.$$

(b) La fonction F_{U_n} n'est pas continue en nh car :

$$1-\exp\left(-ax-\frac{b}{2n}x^2\right)\underset{x\to nh^-}{\longrightarrow}1-\exp\Bigg(\underbrace{-anh-\frac{b}{2}nh^2}_{<0}\Bigg)<1=F_{U_n}(nh).$$

Elle est clairement continue en tout autre point, 0 compris.

(c) La variable aléatoire U_n n'admet pas de densité car sa fonction de répartition n'est pas continue sur $\mathbb{R}$.

(d) Pour $x<0$:

$$F_{U_n}(x)=0\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}0.$$

Pour $x\geq 0$, pour n assez grand, on a $x<nh$, donc :

$$F_{U_n}(x)=1-\exp\left(-ax-\frac{b}{2n}x^2\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1-\exp(-ax).$$

Par conséquent, la suite de variables aléatoires (U_n) converge en loi vers une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre a.

9. (a) La fonction de répartition F_Y de Y est donnée par :

$$\forall x\in\mathbb{R},\ F_Y(x)=\begin{cases}1-\mathrm{e}^{-x} & \text{si } x\geq 0\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}.$$

Les conditions souhaitées sur c et d s'écrivent :

$$\begin{cases}F_Y(d)-F_Y(c) = 1-\alpha\\ F_Y(c) = \dfrac{\alpha}{2}\end{cases}\quad\text{c'est-à-dire}\quad\begin{cases}\mathrm{e}^{-c}-\mathrm{e}^{-d} = 1-\alpha\\ 1-\mathrm{e}^{-c} = \dfrac{\alpha}{2}\end{cases}.$$

On obtient un unique couple solution :

$$c=-\ln\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)\quad\text{et}\quad d=-\ln\left(\frac{\alpha}{2}\right).$$

(b) Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre a. La convergence en loi prouvée en 8.(d) donne :

$$\mathrm{P}\left(\frac{c}{U_n}\leq a\leq\frac{d}{U_n}\right)=\mathrm{P}\left(\frac{c}{a}\leq U_n\leq\frac{d}{a}\right)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}\mathrm{P}\left(\frac{c}{a}\leq X\leq\frac{d}{a}\right).$$

1. L'introduction du problème précisait que a est strictement positif... mais toutes les questions précédentes semblent valables avec $a=0$ également.

Étant donnée la fonction de répartition de X :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F_X(x) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-ax} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

on a :

$$\mathrm{P}\left(\frac{c}{a} \leq X \leq \frac{d}{a}\right) = F_X\left(\frac{d}{a}\right) - F_X\left(\frac{c}{a}\right) = \exp(-c) - \exp(-d) = 1 - \alpha.$$

En conclusion :

$$\mathrm{P}\left(\frac{c}{U_n} \leq a \leq \frac{d}{U_n}\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 1 - \alpha$$

ce qui prouve que $\left[\frac{c}{U_n}, \frac{d}{U_n}\right]$ est un intervalle de confiance asymptotique de a au niveau de confiance $1 - \alpha$.

10. (a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$:

$$\mathrm{E}(S_i) = 1 \times \mathrm{P}(X_i \geq h) + 0 \times \mathrm{P}(X_i < h) = \underbrace{\mathrm{P}(X_i \geq h) = G_{a,b}(h)}_{\text{d'après 4.(a)}}.$$

Par ailleurs :

$$S_i D_i = 1 \iff S_i = 1 \text{ et } D_i = 1 \iff h \leq X_i \leq 1$$

ce qui ne se produit jamais car $h \geq 2$. La variable $S_i D_i$ est donc nulle, d'où :

$$\mathrm{E}(S_i D_i) = 0.$$

(b) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, les variables S_i et D_i ne sont pas indépendantes car :

$$\overbrace{\mathrm{E}(S_i D_i)}^{=0} \neq \overbrace{\mathrm{E}(S_i)}^{\neq 0} \times \overbrace{\mathrm{E}(D_i)}^{\neq 0}.$$

Pour $i, j \in [\![1, n]\!]$ avec $i \neq j$, les variables S_i et D_j sont indépendantes car fonctions respectivement de X_i et X_j elles-mêmes indépendantes.

(c) Par bilinéarité de la covariance et avec la question précédente (la covariance de deux variables indépendantes étant nulle) :

$$\mathrm{Cov}(\bar{S_n}, \bar{D_n}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i,j \in [\![1,n]\!]} \underbrace{\mathrm{Cov}(S_i, D_j)}_{=0 \text{ pour } i \neq j} = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Cov}(S_i, D_i).$$

La formule de Köenig-Huygens et la question (a) donnent :

$$\mathrm{Cov}(S_i, D_i) = \underbrace{\mathrm{E}(S_i D_i)}_{=0} - \mathrm{E}(S_i)\mathrm{E}(D_i) = -G_{a,b}(h) \overbrace{\big(1 - G_{a,b}(1)\big)}^{\text{même calcul qu'en (a)}}$$

En conclusion :

$$\mathrm{Cov}(\bar{S_n}, \bar{D_n}) = -\frac{G_{a,b}(h)\big(1 - G_{a,b}(1)\big)}{n}.$$

Comme $G_{a,b}$ est à valeurs dans $]0, 1]$ et ne vaut 1 qu'en 0, le numérateur de cette fraction est strictement positif, donc la covariance de $\bar{S_n}$ et $\bar{D_n}$ est strictement négative.
La variable $\bar{S_n}$ représente la proportion de survivants après h années ; la variable $\bar{D_n}$ représente la proportion de personnes décédées lors de la première année d'études. Le signe négatif de la covariance de ces deux variables était prévisible car, plus l'une de ces variables est grande, plus l'autre a de chance d'être petite.

11. (a) *(C'est une question très classique !)*
La variable $\bar{S_n}$ est un estimateur sans biais de $G_{a,b}(h)$ car :

$$\mathrm{E}(\bar{S_n}) = \mathrm{E}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}(S_i) = \mathrm{E}(S_1) = G_{a,b}(h)$$

(linéarité de l'espérance).

Son risque quadratique est donc égale à sa variance :

$$r_{G_{a,b}(h)}(\bar{S_n}) = \mathrm{V}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i\right) = \frac{1}{n^2}\mathrm{V}\left(\sum_{i=1}^{n} S_i\right) = \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} \mathrm{V}(S_i) = \frac{1}{n}\mathrm{V}(S_1)$$

(propriété de V, les variables $S_1, \dots, S_n$ étant indépendantes).

Comme la variance $\mathrm{V}(S_1)$ est indépendante de n *(inutile de la calculer)* :

$$r_{G_{a,b}(h)}(\bar{S_n}) = \frac{1}{n}\mathrm{V}(S_1) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

et $\bar{S_n}$ est donc un estimateur convergent de $G_{a,b}(h)$.

(b) On prouve exactement de la même manière qu'en (a) que $\bar{D_n}$ est un estimateur convergent et sans biais de $1 - G_{a,b}(1)$.

12. (a) i. L'inclusion d'événements demandée est une conséquence directe de l'inégalité triangulaire :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ |x + y| \leq |x| + |y|$$

appliquée à $x = \lambda\big(Z_n - z(a, b)\big)$ et $y = \mu\big(r(a, b) - R_n\big)$.

ii. Il suffit ici de remarquer que :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall x, y \in \mathbb{R},\ x + y \geq \varepsilon \implies x \geq \frac{\varepsilon}{2} \text{ ou } y \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

(ce qui est clair en écrivant la contraposée : si $x < \frac{\varepsilon}{2}$ et $y < \frac{\varepsilon}{2}$, alors $x + y < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$).

L'événement

$$A = \Big(\lambda|Z_n - z(a,b)| + \mu|R_n - r(a,b)| \geq \varepsilon\Big)$$

est donc inclus dans l'union

$$\underbrace{\left(|Z_n - z(a,b)| \geq \frac{\varepsilon}{2\lambda}\right)}_{=B} \cup \underbrace{\left(|R_n - r(a,b)| \geq \frac{\varepsilon}{2\mu}\right)}_{=C}.$$

Or, $\mathrm{P}(B \cup C) = \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C) - \mathrm{P}(B \cap C) \leq \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C)$. Donc :

$$\mathrm{P}(A) \leq \mathrm{P}(B) + \mathrm{P}(C).$$

On conclut avec la question précédente.

(b) Nous allons prouver que B_n est un estimateur de b convergent en utilisant la définition :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \mathrm{P}(|B_n - b| \geq \varepsilon) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad (\star).$$

Soit $\varepsilon > 0$. Posons $\lambda = \dfrac{2}{h-1}$ (> 0) et $\mu = \dfrac{2}{h(h-1)}$ (> 0).
On a alors, en reprenant la définition de $G_{a,b}$:

$$\begin{aligned}
\lambda z(a,b) - \mu r(a,b) &= \frac{2}{h-1} \ln\big(G_{a,b}(1)\big) - \frac{2}{h(h-1)} \ln\big(G_{a,b}(h)\big) \\
&= \frac{2}{h-1}\left(-a - \frac{b}{2}\right) - \frac{2}{\cancel{h}(h-1)}\left(-a\cancel{h} - \frac{b}{2}h^{\cancel{2}}\right) \\
&= \frac{2}{h-1}\left(\cancel{-a} - \frac{b}{2}\cancel{+a} + \frac{b}{2}h\right) \\
&= \frac{2}{h-1} \times \frac{b}{2}(h-1) \\
&= b.
\end{aligned}$$

La question 12.(a)(ii) nous donne alors :

$$\mathrm{P}\big(|B_n - b| \geq \varepsilon\big) \leq \underbrace{\mathrm{P}\left(|Z_n - z(a,b)| \geq \frac{\varepsilon}{2\lambda}\right)}_{\substack{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \text{car } Z_n \text{ est un estimateur convergent de } z(a,b)}} + \overbrace{\mathrm{P}\left(|R_n - r(a,b)| \geq \frac{\varepsilon}{2\lambda}\right)}^{\substack{\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0 \\ \text{car } R_n \text{ est un estimateur convergent de } r(a,b)}}$$

On obtient le résultat souhaité $(\star)$ par le théorème d'encadrement.