Corrigé de Mathématique éco HEC

EXERCICE

Hypothèses.

$\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ est l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
$\forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:
$s_1(A) = \sum_{j=1}^{3} A_{1,j}$, $s_2(A) = \sum_{j=1}^{3} A_{2,j}$, $s_3(A) = \sum_{j=1}^{3} A_{3,j}$ (somme des coefficients des lignes)
$s_4(A) = \sum_{i=1}^{3} A_{i,1}$, $s_5(A) = \sum_{i=1}^{3} A_{i,2}$, $s_6(A) = \sum_{i=1}^{3} A_{i,3}$ (somme des coefficients des colonnes)
$s_7(A) = \sum_{i=1}^{3} A_{i,i}$, $s_8(A) = \sum_{i=1}^{3} A_{i,4-i}$, (somme des coefficients des diagonales)
$(k;l) \in [\![1,3]\!]^2$, $E_{k,l}$ est la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls excepté celui situé à l'intersection de la k^{e} ligne et de la l^{e} colonne qui vaut 1.
$\mathscr{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3})$, $\mathscr{B}$est une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

1. $\boxed{\mathscr{E} = \{A \,|A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ s_7(A) = 0\}}$.

   (a) Soient $A \in \mathscr{E}$, $B \in \mathscr{E}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$ on a $s_7(A+\lambda B) = s_7(A) = \sum_{i=1}^{3} (A+\lambda B)_{i,i} = \sum_{i=1}^{3} (A_{i,i} + \lambda B_{i,i})$
   $s_7(A+\lambda B) = \sum_{i=1}^{3} A_{i,i} + \lambda \sum_{i=1}^{3} B_{i,i} = s_7(A) + \lambda s_7(B)$ donc s_7 est une application linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$. Comme $E = \ker(s_7)$ que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

   $s_7(E_{1;1}) = 1$ donc $\dim(\text{im}(s_7)) = 1$, $\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R})) = 9$, du théorème du rang on déduit que $\dim(\text{im}(s_7)) + \dim(\ker(s_7)) = 9$ et donc $\boxed{dim(\mathscr{E}) = 8}$.

   f est l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^8$ qui à toute matrice A fait correspondre le vecteur
   $f(A) = (s_1(A), s_2(A), s_3(A), s_4(A), s_5(A), s_6(A), s_7(A), s_8(A))$ de $\mathbb{R}^8$

2. (a) $\forall (i;j) \in [\![1;3]\!]^2$, $A \mapsto A_{i,j}$ est une application linéaire de linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$, or une combinaison d'applications linéaire de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$ est linéaire donc , $(s_k)_{k\in[\![1;8]\!]}$ est une famille d'applications linéaires de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
   Une application d'un espace vectoriel dans $\mathbb{R}^8$ dont toutes les composantes sont linéaire est linéaire donc
   $\boxed{f \text{ est une application linéaire de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \text{ dans } \mathbb{R}^8}$.

   (b) $\boxed{\mathscr{C} = (e_1; e_2; e_3; e_4; e_5; e_6; e_7; e_8) \text{ est la base canonique de } \mathbb{R}^8 \text{ , } F = \underset{\mathscr{C}\leftarrow\mathscr{B}}{\text{mat}}(f)}$.

   $$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

3. $\boxed{\mathscr{G} = \{A \,|A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}),\ \forall k \in [\![2;8]\!]\ \ s_k(A) = s_1(A)\}}$

   (a) L'application $h : \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^7$ telle que $\forall A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, $\forall k \in [\![1;7]\!]$, $(h(A))_k = s_{k+1}(A) - s_1(A)$ est linéaire. $\mathscr{G} = \ker(h)$ donc
   $\boxed{\mathscr{G} \text{ est un sous-espace vectoriel de } \mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$.

   (b) Pour $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ on a $\ll A \in \mathscr{G} \bigcap \mathscr{E} \gg \iff \ll h(A) = \mathbf{0}; s_7(A) = 0 \gg \iff$
   $\ll \forall k \in [\![1;7]\!]\ \ s_{k+1}(A) = s_1(A)\,; s_7(A) = 0 \gg \iff \ll \forall k \in [\![1;8]\!]\ \ s_k(A) = 0 \gg \iff \ll f(A) = \mathbf{0} \gg$.
   Conclusion, $\boxed{\ker(f) = \mathscr{G} \bigcap \mathscr{E}}$.

(c) $J=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$. On a $\boxed{\forall k\in[\![1;8]\!]\ ,\ s_k(J)=3}$. Pour $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, on a

$\ll A\in\mathscr{G}\gg\iff\ll A\in\ker(h)\gg\iff\ll\forall k\in[\![1;7]\!]\ \ s_{k+1}(A)=s_1(A)\gg\iff$

$\ll\forall k\in[\![1;7]\!]\ \ s_{k+1}(A)-s_{k+1}\left(\frac{1}{3}s_1(A)\,J\right)=s_1(A)-s_1\left(\frac{1}{3}s_1(A)\,J\right)=0\gg\iff$

$\ll\forall k\in[\![1;8]\!]\ \ s_{k+1}\left(A-\frac{1}{3}s_1(A)\,J\right)=0\gg\iff$

$\ll A=B+\lambda J$ avec $B=A-\frac{1}{3}s_1(A)\,J\ ,\ B\in\ker(f)\ ,\ \lambda=\frac{1}{3}s_1(A)\gg$

Note : Si $A=B+\lambda J$ avec $B\in\ker(f)$ et $A\in\mathscr{G}$, alors $f(A)=0+\lambda f(J)$ avec $f(J)=3$ donc $\lambda=\frac{1}{3}f(A)=\frac{1}{3}s_7(A)=\frac{1}{3}s_1(A)$.

Conclusion, $\boxed{\begin{array}{l}\text{Tout élément de }\mathscr{G}\text{ s'écrit de manière unique comme la}\\\text{somme d'une matrice de }\ker(f)\text{ et d'une matrice de Vect}(J).\end{array}}$

on en déduit que $\boxed{\dim(\mathscr{G})=\dim(\ker(f))+1}$

(d) Soit $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&x\\y&z&t\end{pmatrix}$. On a les équivalences

$$\ll f(A)=O_3\gg\iff\ll\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{rl}a+b+c&=0\\\underline{d}+e+x&=0\\y+z-t&=0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{rl}a+\boldsymbol{d}+y&=0\\b+e+z&=0\\c+x+t&=0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{rl}a+e+t&=0\\c+e+y&=0\end{array}\right.\end{array}\right.\gg\underset{L_4\leftarrow -L_2+L_4}{\iff}\ll\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{rl}a+\underline{b}+c&=0\\L_2&\\y+z-t&=0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{rl}a-e-x+y&=0\\\boldsymbol{b}+e+z&=0\\c+x+t&=0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{rl}a+e+t&=0\\c+e+y&=0\end{array}\right.\end{array}\right.\gg\underset{L_5\leftarrow L_1-L_5}{\iff}$$

$$\ll\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}L_1\\L_2\\y+\underline{z}-t\ \ =0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{rl}a-e-x+y&=0\\a+c-e-\boldsymbol{z}&=0\\c+x+t&=0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{rl}a+e+t&=0\\c+e+y&=0\end{array}\right.\end{array}\right.\gg\underset{L_5\leftarrow L_5+L_3}{\iff}\ll\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}L_1\\L_2\\L_3\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{rl}a-e-\boldsymbol{x}+y&=0\\a+c-e+y-t&=0\\c+\underline{x}+t&=0\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{rl}a+e+t&=0\\c+e+y&=0\end{array}\right.\end{array}\right.\gg\underset{L_4\leftarrow L_4+L_6}{\iff}$$

$$\ll\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}L_1\\L_2\\L_3\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{rl}\underline{a}+c-e+y+t&=0\\\boldsymbol{a}+c-e+y-t&=0\\L_6&\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{rl}\boldsymbol{a}+e+t&=0\\c+e+y&=0\end{array}\right.\end{array}\right.\gg\underset{\substack{L_5\leftarrow L_4-L_5\\L_7\leftarrow L_4-L_7}}{\iff}\ll\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}L_1\\L_2\\L_3\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}L_4\\2\underline{t}\ \ =0\\L_6\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{rl}c-2e+y-2\boldsymbol{t}&=0\\c+e+y&=0\end{array}\right.\end{array}\right.\gg\underset{L_7\leftarrow L_5+L_7}{\iff}$$

$$\ll\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}L_1\\L_2\\L_3\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}L_4\\L_4\\L_6\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{rl}\boldsymbol{c}-2e+y&=0\\\underline{c}+e+y&=0\end{array}\right.\end{array}\right.\gg\underset{L_7\leftarrow L_7-L_8}{\iff}\ll\left\{\begin{array}{l}\left\{\begin{array}{l}L_1\\L_2\\L_3\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{l}L_4\\L_4\\L_6\end{array}\right.\\\left\{\begin{array}{rl}-3\underline{e}&=0\\L_8&\end{array}\right.\end{array}\right.\gg\text{ donc}$$

$\ll A\in\ker(f)\gg\iff\ll A=\begin{pmatrix}0&y&-y\\-y&0&y\\y&-y&0\end{pmatrix}=y\begin{pmatrix}0&1&-1\\-1&0&1\\1&-1&0\end{pmatrix}$ on a donc

$\dim(\ker(f))=1$ et du théorème du rang

$\dim(\text{im}(f))=\dim(\mathcal{M}_3(\mathbb{R}))-\dim(\ker(f))=9-1=8$ c'est à dire que

$\boxed{\text{le rang de l'application } f \text{ est } 8}$.

(e) $\dim(\ker(f)) = 1$ et $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\ker(f)$

Note, $\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathscr{G}$, l'espace vectoriel des matrices magiques d'ordre 3.

PROBLEME

$$\boxed{\Phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{t^2}{2}} dt \end{array}, \Phi(0) = \frac{1}{2}}.$$

Première partie

Un équivalent d'une intégrale

1. Hypothèse, $\boxed{N : \begin{array}{ccc} [0;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x) \end{array}}$

(a) $\begin{array}{ccc} [0;1[& \to &]0;1] \\ x & \mapsto & 1-x \end{array}$ est de classe C^∞ , ln est de classe C^∞ sur $]0;+\infty[$, la composée

$\begin{array}{ccc} [0;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln(1-x) \end{array}$ est de classe C^∞ , la fonction polynôme $x \mapsto -2(1-x)$ est de classe C^∞

le produit $\begin{array}{ccc} [0;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2(1-x)\ln(1-x) \end{array}$ est de classe C^∞ , $x \mapsto x^2 - 2x$ est de classe C^∞ , la différence N est de classe C^∞ donc de classe C^1 sur $[0;1[$.

(b) Soit $d : \begin{array}{ccc} [0;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & x + \ln(1-x) \end{array}$ on a $\forall x \in]0;1[, d'(x) = 1 - \dfrac{1}{1-x} = \dfrac{-x}{1-x} < 0$ donc d est strictement décroissante continue en 0, et comme $d(0) = 0$ on déduit que $\boxed{\forall x \in]0;1[, \ln(1-x) + x < 0}$ et $\boxed{\forall x \in [0;1[, \ln(1-x) \leqslant -x}$.

(c) $\forall x \in]0;1[, N'(x) = 2x - 2 + 2\ln(1-x) - 2(1-x)\dfrac{-1}{1-x} = 2(x + \ln(1-x)) < 0$.

$\boxed{\forall x \in]0;1[, N'(x) < 0}$.

(d) Du cours $\lim\limits_{t \to 0^+} t\ln(t) = 0$, pour $t = 1-x$, $\lim\limits_{x \to 1^-} (1-x)\ln(1-x) = 0$ donc $\lim\limits_{x \to 1^-} N(x) = 1 - 2 = -1$, or $\lim\limits_{x \to 0^+} N(x) = 0$ et de la décroissance de N on déduit que $\boxed{\forall x \in]0;1[, -1 < N(x) < 0}$.

2. Hypothèse, $\boxed{f : \begin{array}{ccc}]0;1[& \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & -2\dfrac{x + \ln(1-x)}{x^2} \end{array}}$

(a) Pour $x \in [0;1[$, $\ln(1-x) = -x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x)$ avec $\lim\limits_{x \to 0} \varepsilon(x) = 0$.

(b) Pour $x \in [0;1[$, $x + \ln(1-x) = x - x - \dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) = -\dfrac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \underset{x \to 0^+}{\sim} -\dfrac{x^2}{2}$ donc

$f(x) = -2\dfrac{x + \ln(1-x)}{x^2} \underset{x \to 0^+}{\sim} \dfrac{-2}{x^2}\left(-\dfrac{x^2}{2}\right) = 1$ donc $\boxed{\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1}$, donc

$\boxed{\begin{array}{rccl} f: & [0;1[& \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} -2\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2} & \text{si} \quad x>0 \\ 1 & \text{si} \quad x=0 \end{cases} \end{array}}$ est le prolongement par continuité de f en 0.

(c) Pour $x \in]0;1[$, on a :

$f'(x) = -2\dfrac{1}{x^3}\left(\left(1+\dfrac{-1}{1-x}\right)x - 2(x+\ln(1-x))\right) = -2\dfrac{1}{x^3}\left(\dfrac{-x^2}{1-x} - 2(x+\ln(1-x))\right) - 2.$

$f'(x) = -2\dfrac{1}{x^3}\left(\dfrac{-x^2-2(1-x)(x+\ln(1-x))}{1-x}\right) = \dfrac{-2}{x^3(1-x)}\left(x^2-2x-2(1-x)\ln(1-x)\right)$

Conclusion, $\boxed{\forall x \in]0;1[\ ,\ f'(x) = -2\dfrac{N(x)}{x^3(1-x)} > 0}$, voir 1.(d).

(d)

x	0		1
$f(x)$	1	↗	$+\infty$

On a pour $x \in]0;1[$, $\lim\limits_{x\to 1^-} \ln(1-x) = -\infty$ donc $x+\ln(1-x) \underset{x\to 1^-}{\sim} \ln(1-x)$ donc $f(x) = -2\dfrac{x+\ln(1-x)}{x^2} \underset{x\to 1^-}{\sim} -2\dfrac{\ln(1-x)}{x^2} \underset{x\to 1^-}{\sim} -2\ln(1-x)$ c'est à dire que $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $[0;1[$, $f(0)=1$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = +\infty$ du théorème de la bijection $\boxed{\begin{array}{ccc} [0;1[& \to & [1;+\infty[\\ x & \mapsto & f(x) \end{array} \text{ est bijective}}$.

3. Hypothèse, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*\ ,\ \forall x \in [0;1[\ ,\ g_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2}f(x)\right)}$

(a) Le produit des fonctions continues $x \mapsto -\dfrac{nx^2}{2}$ et f est continu sur $[0;1[$, la composée avec exp est continue donc g_n est continue, et comme $\forall x \in [0;1[\ ,\ f(x) \geqslant 1$ pour $x \in [0;1[$, $\frac{nx^2}{2}f(x) \geqslant 0$ donc $-\frac{nx^2}{2}f(x) \leqslant 0$ d'où $\forall x \in [0;1[\ 0 < g_n(x) \leqslant 1$. Comme $x \mapsto 1$ est intégrable sur $[0;1[$ on déduit que g_n est intégrable sur $[0;1[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\,dx$ existe dans $\mathbb{R}$.

Hypothèse $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ I_n = \displaystyle\int_0^1 g_n(x)\,dx}$.

(b) Pour $x \in [0,1[$, $f(x) \geqslant 1$ donc $-\frac{nx^2}{2}f(x) \leqslant -\frac{nx^2}{2}$, comme exp est strictement croissante sur on a $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)$.

(c) En intégrant l'inégalité sur $[0;1[$ on obtient,

$0 \leqslant I_n \leqslant \displaystyle\int_0^1 \exp\left(-\frac{nx^2}{2}\right)dx \underset{t=\sqrt{n}x}{=} \int_0^{\sqrt{n}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)\frac{dt}{\sqrt{n}} = \left[\sqrt{\frac{2\pi}{n}}\Phi(t)\right]_0^{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(\Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2}\right)$

donc $\boxed{0 \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(\Phi(\sqrt{n}) - \frac{1}{2}\right)}$

(d) La fonction Φ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$ donc Φ est majorée par 1 d'où $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(1-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$

4. Hypothèse, $\boxed{(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*} \text{ vérifie } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ v_n = \frac{1}{\ln(n+2)}}$

(a) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $1 < e < 3 \leqslant n+2$ et de la croissance de ln , $1 = \ln(e) < \ln(n+2)$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ étant strictement décroissante sur $]0;+\infty[$ on déduit que $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ 0 < v_n < 1}$.

(b) Hypothèse, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ w_n = f(v_n)}$. De $\lim\limits_{n\to+\infty} \ln(n+2) = +\infty$, $v_n = \frac{1}{\ln(n+2)}$ on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$ or $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 1$ et $w_n = f(v_n)$ la limite de la composée est donc $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = f(0) = 1$. Conclusion, $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1}$.

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$ on a établit que $g_n > 0$ et g_n est intégrable sur $[0;1[$, $0 < v_n < 1$ donc $I_n = \int\limits_0^1 g_n(x)\,dx \geqslant \int\limits_0^{v_n} g_n(x)\,dx$, or f est positive strictement croissante sur $[0;1[$, donc pour $x \in [0;v_n[$,
$\frac{nx^2}{2} f(x) \leqslant \frac{nx^2}{2} f(v_n) = \frac{nx^2}{2} w_n$ donc $g_n(x) = \exp\left(-\frac{nx^2}{2} f(x)\right) \geqslant \exp\left(-\frac{nx^2}{2} w_n\right)$ d'où
$\int\limits_0^{v_n} g_n(x)\,dx \geqslant \int\limits_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} w_n\right) dx \underset{u=x\sqrt{nw_n}}{=} \int\limits_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) \frac{du}{\sqrt{nw_n}}$ donc

$\boxed{\begin{array}{l} \forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ I_n \geqslant \frac{1}{\sqrt{nw_n}} \int\limits_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du = \sqrt{\frac{2\pi}{nw_n}} \int\limits_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\ I_n \geqslant = \sqrt{\frac{2\pi}{nw_n}} \left(\Phi\left(v_n\sqrt{nw_n}\right) - \frac{1}{2}\right) \end{array}}$

(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$,
de 3.(d) $I_n \leqslant \sqrt{\frac{2\pi}{n}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2n}}$ soit encore $I_n\sqrt{\frac{2n}{\pi}} \leqslant 1$
de 4.(c) on a , $\sqrt{\frac{2\pi}{nw_n}} \left(\Phi\left(v_n\sqrt{nw_n}\right) - \frac{1}{2}\right) \leqslant I_n$ soit $\frac{2}{\sqrt{w_n}}\left(\Phi\left(v_n\sqrt{nw_n}\right) - \frac{1}{2}\right) \leqslant I_n\sqrt{\frac{2n}{\pi}}$
donc, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^* \ , \ \frac{2}{\sqrt{w_n}}\left(\Phi\left(v_n\sqrt{nw_n}\right) - \frac{1}{2}\right) \leqslant I_n\sqrt{\frac{2n}{\pi}} \leqslant 1}$

(e) De 4.(b) $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 1$, $v_n\sqrt{nw_n} = \frac{\sqrt{n}}{\ln(2+n)}\sqrt{w_n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{\sqrt{n}}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ or $\lim\limits_{x\to+\infty} \Phi(x) = 1$
donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \Phi\left(v_n\sqrt{nw_n}\right) = 1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2}{\sqrt{w_n}}\left(\Phi\left(v_n\sqrt{nw_n}\right) - \frac{1}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{1}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1$
et de l'encadrement précédent on déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n\sqrt{\frac{2n}{\pi}} = 1$, $\boxed{I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{\pi}{2n}}}$

Deuxième partie

Quelques propriétés asymptotiques de la loi de Poisson

On utilise les notations de la Partie I.

1. Hypothèse, $\boxed{\forall x > 0 \ , \ \forall n \in \mathbb{N} \ , \ J_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_0^x t^n e^{-t} dt}$ Note : $J_0(x) = 1 - e^{-x}$.

(a) Pour $x > 0$, $J_1(x) = \int\limits_0^x te^{-t}dt = \left[t\left(-e^{-t}\right)\right]_0^x - \int\limits_0^x 1\left(-e^{-t}\right)dt = \left[t\left(-e^{-t}\right) - e^{-t}\right]_0^x$, donc
$\boxed{\forall x > 0 \ , \ J_1(x) = 1 - (x+1)e^{-x}}$

(b) Pour $x > 0$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $J_n(x) = \frac{1}{n!}\int\limits_0^x t^n e^{-t}dt = \frac{1}{n!}\left(\left[t^n\left(-e^{-t}\right)\right]_0^x - \int\limits_0^x nt^{n-1}\left(-e^{-t}\right)dt\right)$
$J_n(x) = \frac{1}{n!}\left(-x^n e^{-x} + n\int\limits_0^x t^{n-1}e^{-t}dt\right)$.

Conclusion, $\boxed{\forall x>0\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ J_n(x)=J_{n-1}(x)-\frac{1}{n!}x^ne^{-x}}$.

(c) Pour $x>0$, $n\in\mathbb{N}^*$, $J_n(x)-J_0(x)=\sum_{k=1}^{n}\left(J_k(x)-J_{k-1}(x)\right)=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{1}{k!}x^ke^{-x}\right)$ donc

$J_n(x)=J_0(x)-e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k!}x^k\right)=1-e^{-x}-e^{-x}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}x^k=e^{-x}\left(e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k\right)$.

Conclusion, $\boxed{\forall x>0\ ,\ \forall n\in\mathbb{N}\ ,\ J_n(x)=e^{-x}\left(e^x-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^k\right)=1-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}x^ke^{-x}}$.

(d) Pour $n\in\mathbb{N}$, $x>0$,

$J_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x t^ne^{-t}dt=1-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n!}x^ne^{-x}\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}1$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}x^ne^{-x}=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-x}=0$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty}J_n(x)=1$. D'autre part $t\mapsto t^ne^{-t}$ est continue positive sur $[0;+\infty[$ donc J_n est une fonction croissante sur $[0;+\infty[$ majorée par 1 donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}\ ,\ \int_0^{+\infty}t^ne^{-t}dt=n!}$.

(e) Pour $n\in\mathbb{N}^*$, $I_n=\int_0^1 g_n(x)\,dx=\int_0^1\exp\left(-\frac{nx^2}{2}f(x)\right)dx$ en faisant le changement de variable $t=n(1-x)$, donc $x=1-\frac{t}{n}$, $dx=-\frac{dt}{n}$

$I_n=\int_n^0\exp\left(-\frac{n\left(1-\frac{t}{n}\right)^2}{2}f\left(1-\frac{t}{n}\right)\right)\left(-\frac{dt}{n}\right)=\int_0^n a(t)dt$ avec

or pour $t\in[0;n]$, $a(t)=\frac{1}{n}\exp\left(-\frac{n\left(1-\frac{t}{n}\right)^2}{2}f\left(1-\frac{t}{n}\right)\right)$

$a(t)=\frac{1}{n}\exp\left(-\frac{n\left(1-\frac{t}{n}\right)^2}{2}\left(-2\frac{\left(1-\frac{t}{n}\right)+\ln\left(1-\left(1-\frac{t}{n}\right)\right)}{\left(1-\frac{t}{n}\right)^2}\right)\right)$

$a(t)=\frac{1}{n}\exp\left(n\left(\left(1-\frac{t}{n}\right)+\ln\left(\frac{t}{n}\right)\right)\right)=\frac{1}{n}\exp\left(n-t+n\ln\left(\frac{t}{n}\right)\right)=\frac{1}{n}e^ne^{-t}\left(\frac{t}{n}\right)^n=\frac{e^n}{n^{n+1}}t^ne^{-t}$

donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ I_n=n!\frac{e^n}{n^{n+1}}J_n(n)}$

Hypothèse, $\boxed{\begin{array}{l}\bullet\ (X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}\text{ sont des variables aléatoires indépendantes, sur l'espace probabilisé }(\Omega;\mathcal{A};P)\text{, de loi }\mathscr{P}(1)\\ \bullet\forall n\in\mathbb{N}^*\ ,\ S_n=\sum_{i=1}^{n}X_i.\end{array}}$

2. (a) S_n est la somme de variables aléatoire indépendantes qui suivent une loi de Poisson donc S_n suit la loi de Poisson de paramètre la somme des paramètres, donc $S_n\hookrightarrow\mathscr{P}(n)$, $\forall k\in\mathbb{N}$, $P(S_n=k)=\frac{n^k}{k!}e^{-n}$

(b) $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ P(S_n\leqslant n)=\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}e^{-n}\underset{1.(c)}{=}1-J_n(n)\ ,\ P(S_n\geqslant n)=1-P(S_n\leqslant n-1)=J_{n-1}(n)}$.

3. Hypothèse, $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\ h_n:\ \begin{array}{ccc}\mathbb{R}_+&\to&\mathbb{R}\\ x&\mapsto&x^ne^{-x}\end{array}}$.

(a) h_n est de classe C^∞ . Pour $x\geqslant 0$, $h_n(x)=x^ne^{-x}$, $h_n'(x)=x^{n-1}\left(ne^{-x}-xe^{-x}\right)=(n-x)\,x^{n-1}e^{-x}$, $h_n'(x)$ est du signe de $x(n-x)$ d'où le tableau de variation :

x	0		n		$+\infty$
signe $(h_n'(x))$	0	$+$	0	$-$	
$h_n(x)$		$\nearrow$	$n^n e^{-n}$	$\searrow$	
	0				0

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, en utilisant la définition des J_k on a
$P(S_{n+1} \leqslant n+1) - P(S_n \leqslant n) \underset{2.(b)}{=} (1 - J_{n+1}(n+1)) - (1 - J_n(n)) = J_n(n) - J_{n+1}(n+1)$
$= J_n(n) - J_{n+1}(n) + J_{n+1}(n) - J_{n+1}(n+1) \underset{1.(b)}{=} \dfrac{1}{(n+1)!} n^{n+1} e^{-(n+1)} + J_{n+1}(n) - J_{n+1}(n+1)$
$= \dfrac{1}{(n+1)!} h_{n+1}(n) - \dfrac{1}{(n+1)!} \displaystyle\int_n^{n+1} h_{n+1}(t)\,dt = -\dfrac{1}{(n+1)!} \int_n^{n+1} (h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n))\,dt$

conclusion, $\boxed{\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(S_{n+1} \leqslant n+1) - P(S_n \leqslant n) = -\dfrac{1}{(n+1)!} \displaystyle\int_n^{n+1} (h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n))\,dt}$

(c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, h_{n+1} est croissante sur $[n; n+1]$ donc $\forall t \in [n; n+1]$, $h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n) \geqslant 0$ et de 3.(b) on déduit que $P(S_{n+1} \leqslant n+1) - P(S_n \leqslant n) \leqslant 0$.
Conclusion $\boxed{\text{la suite } (P(S_n \leqslant n))_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$.

(d) Pour $n \in [\![1; +\infty[\![$, $P(S_{n+1} \geqslant n+1) - P(S_n \geqslant n) = J_n(n+1) - J_{n-1}(n)$
$= J_n(n+1) - J_n(n) + J_n(n) - J_{n-1}(n)$
$\underset{1.(b)}{=} \dfrac{1}{n!} \displaystyle\int_n^{n+1} t^n e^{-t} dt - \dfrac{1}{n!} n^n e^{-n} = \dfrac{1}{n!} \int_n^{n+1} (h_n(t) - h_n(n))\,dt \leqslant 0$ car h_n est décroissante sur $[n; n+1]$.
Conclusion. $\boxed{\text{la suite } (P(S_n \geqslant n))_{n \in \mathbb{N}^*} \text{ est décroissante}}$.

(e) Les deux suites $(P(S_n \leqslant n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ et $(P(S_n \geqslant n))_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont décroissantes minorée par 0 donc convergent .

4. (a) Théorème de la limite centrée : Si $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ sont des variables aléatoires indépendantes, de même loi , d'espérance m et d'écart type σ alors

$\boxed{\forall t \in \mathbb{R},\ \lim_{n \to +\infty} P\left(\dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\sum_{k=1}^{n} X_k - nm\right) \leqslant t\right) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \Phi(t)}$

Ici $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $X_n \hookrightarrow \mathscr{P}(1)$, $m = E(X_n) = 1 = \sigma_{X_n} = \sigma$, donc
$\dfrac{1}{\sigma\sqrt{n}} \left(\displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k - nm\right) = \dfrac{1}{\sqrt{n}} (S_n - n)$.
Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n \leqslant n) = P(S_n - n \leqslant 0) = P\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}} (S_n - n) \leqslant 0\right) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} \Phi(0) = \dfrac{1}{2}$.

Conclusion, $\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(S_n \leqslant n) = \dfrac{1}{2}}$

(b) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{\dfrac{\pi}{2n}} \underset{\substack{n \to +\infty \\ \text{P1 4.(e)}}}{\sim} I_n \underset{\text{P2 1.(e)}}{=} n! \frac{e^n}{n^{n+1}} J_n(n) \underset{\text{P2 2.(b)}}{=} n! \frac{e^n}{n^{n+1}} (1 - P(S_n \leqslant n)) \underset{\substack{n \to +\infty \\ \text{P2 4.}}}{\sim} n! \frac{e^n}{n^{n+1}} \frac{1}{2}$

donc $\boxed{n! \underset{n \to +\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}} \dfrac{2n^{n+1}}{e^n} = n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}}$

(c) En utilisant (b) , pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\boxed{P(S_n = n) = \dfrac{n^n}{n!} e^{-n} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{n^n}{n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi}} e^{-n} = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi n}}}$.

(d) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $P(S_n \geqslant n) = 1 - P(S_n \leqslant n-1) = 1 - P(S_n \leqslant n) + P(S_n = n)$
De 4.(a) $\lim_{n \to +\infty} P(S_n \leqslant n) = \dfrac{1}{2}$ et de 4.(b) , $\lim_{n \to +\infty} P(S_n = n) = 0$ donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} P(S_n \geqslant n) = \dfrac{1}{2}}$

Troisième partie

Médianes. Cas des variables aléatoires discrètes et des variables aléatoires à densité

Définition

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, de fonction de répartition F.
On appelle médiane de X , tout réel m vérifiant les deux conditions : $P(X \leqslant m) \geqslant \frac{1}{2}$ et $P(X \geqslant m) \geqslant \frac{1}{2}$.

On admet qu'un tel réel m existe toujours.
Remarque. $d(x) = P(X \leqslant x) - P(X \geqslant x) = 2P(X \leqslant x) - P(X = x) - 1 = 2P(X < x) + P(X = x) - 1$, d est croissante sur $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to -\infty} d(x) = -1$, $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = 1$
pour a_0 tel que $d(a_0) < 0$ et b_0 tel que $d(b_0) > 0$ on construit deux suites adjacentes $(a_n)_n \nearrow$ et $(b_n)_n \searrow$ convergente vers m avec en utilisant la méthode de dichotomie.
$\forall n \in \mathbb{N}$, $d(a_n) \leqslant 0$, $d(b_n) \geqslant 0$. F étant continue à droite $0 \leqslant 2P(X < m) - 1 \lim\limits_{n \to +\infty} d(a_n) \leqslant d(m) \leqslant \lim\limits_{n \to +\infty} d(b_n) \leqslant 2P(X \leqslant m) - 1 \leqslant 0$ d'où $d(m) = 0$, on en déduit l'existence d'une médiane.

1. On a `N` $\in \mathbb{N}^*$ `,type proba=array[1..N] of real`.
   X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[\![1; N]\!]$. On suppose que la loi de X est stockée dans une variable `loi` de type `proba`.
   Fonction qui renvoie une médiane de X

```
function mediane(loi:proba):real;
var k:integer;s:real;
Begin
k:=0;s:=0;while s<1/2 do
begin
k:=k+1;s:=s+loi[k]
end;mediane=k;
```

2. Hypothèse, X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance $E(X)$.

   (a) Pour $r \in \mathbb{N}^*$, $E(|X - r|) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} |n - r| P(X = n) = \sum\limits_{n=0}^{r-1} (r - n) P(X = n) + \sum\limits_{n=r}^{+\infty} (n - r) P(X = n)$
   $E(|X - r|) = 2\sum\limits_{n=0}^{r-1} (r - n) P(X = n) + \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (n - r) P(X = n) = 2\sum\limits_{n=0}^{r-1} (r - n) P(X = n) + E(X) - r$
   Conclusion, $\boxed{E(|X - r|) = E(X) - r + 2\sum\limits_{k=0}^{r-1} (r - k) P(X = k)}$.

   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$,
   $\sum\limits_{k=0}^{r-1} (r - k) P(X = k) = \sum\limits_{k=0}^{r-1} (r - k)(F(k) - F(k-1)) = \sum\limits_{k=0}^{r-1} (r - k) F(k) - \sum\limits_{k=0}^{r-1} (r - k) F(k-1)$
   $= \sum\limits_{k=0}^{r-1} (r - k) F(k) - \sum\limits_{k=1}^{r-1} (r - k) F(k-1) \underset{k'=k-1}{=} \sum\limits_{k=0}^{r-1} (r - k) F(k) - \sum\limits_{k'=0}^{r-2} (r - k' - 1) F(k')$
   $= \sum\limits_{k=0}^{r-1} (r - k) F(k) - \sum\limits_{k=0}^{r-1} (r - k - 1) F(k) = \sum\limits_{k=0}^{r-1} F(k)$
   Conclusion, $\boxed{\forall r \in \mathbb{N}^*, \sum\limits_{k=0}^{r-1} F(k) = \sum\limits_{k=0}^{r-1} (r - k) P(X = k)}$.
   De (a) $E(|X - r|) = E(X) - r + 2\sum\limits_{k=0}^{r-1} (r - k) P(X = k) E(X) - 2\sum\limits_{k=0}^{r-1} \frac{1}{2} + 2\sum\limits_{k=0}^{r-1} F(k)$
   d'où $\boxed{\forall r \in \mathbb{N}^*, E(|X - r|) = E(X) + 2\sum\limits_{k=0}^{r-1} \left(F(k) - \frac{1}{2}\right)}$

(c) Hypothèse, $\boxed{m \text{ est une médiane de } X,\ m \in \mathbb{N}^*}$.

Pour $r \in \mathbb{N}^*$, $E(|X-r|) - E(|X-m|) = E(X) + 2\sum_{k=0}^{r-1}\left(F(k) - \frac{1}{2}\right) - \left(E(X) + 2\sum_{k=0}^{m-1}\left(F(k) - \frac{1}{2}\right)\right)$

$= 2\left(\sum_{k=0}^{r-1}\left(F(k) - \frac{1}{2}\right) - \sum_{k=0}^{m-1}\left(F(k) - \frac{1}{2}\right)\right)$

• Si $r > m$, $E(|X-r|) - E(|X-m|) = 2\sum_{k=m}^{r-1}\left(\underbrace{F(k) - \frac{1}{2}}_{\geqslant 0}\right) \geqslant 0$

• Si $r = m$, $E(|X-r|) - E(|X-m|) = 0$

• Si $r < m$, $E(|X-r|) - E(|X-m|) = -2\sum_{k=r}^{m-1}\left(\underbrace{F(k) - \frac{1}{2}}_{\leqslant 0}\right) \geqslant 0$ donc

$\boxed{\forall r \in \mathbb{N}^*,\ E(|X-r|) - E(|X-m|) \geqslant 0}$.

$\boxed{\text{L'application } \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \to & \mathbb{R} \\ r & \mapsto & E(|X-r|) \end{array} \text{ a un minimum en } m}$.

(d) Hypothèse, $\boxed{n \in \mathbb{N}^*\ ,\ X \hookrightarrow \mathscr{P}(n)\ ,\ X = S_n}$.

• En PII 3.(c)&4(a) $(P(S_n \leqslant n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante vers $\frac{1}{2}$ donc $P(S_n \leqslant n) \geqslant \frac{1}{2}$

•En PII 3.(d)&4(d) $(P(S_n \geqslant n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante vers $\frac{1}{2}$ donc $P(S_n \geqslant n) \geqslant \frac{1}{2}$

Conclusion, $\boxed{n \text{ est une médiane de } X}$.

•De PII 4.c $P(S_n = n) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}}$

• De PIII 2.(a) si $r \in \mathbb{N}^*$, $E(|X-r|) = E(X) - r + 2\sum_{k=0}^{r-1}(r-k)P(X=k)$ donc pour $r = n$

$E(|X-n|) = 2\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)P(X=k) = 2\sum_{k=0}^{n-1}(n-k)\frac{n^k}{k!}e^{-n} = 2e^{-n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n^{k+1}}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1}\frac{n^k}{(k-1)!}\right)$

$E(|X-n|) = 2e^{-n}\frac{n^n}{(n-1)!} = 2ne^{-n}\frac{n^n}{n!} = 2nP(S_n = n) \underset{n\to+\infty}{\sim} 2n\frac{1}{\sqrt{2\pi n}} = \sqrt{\frac{2n}{\pi}}$.

Conclusion, $\boxed{E(|X-n|) \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\frac{2n}{\pi}}}$.

3. Hypothèses,

$\boxed{\begin{array}{l} X \text{ est une variable aléatoire à densité dont une densité } f \text{ est continue sur } \mathbb{R}. \\ F \text{ est la fonction de répartition de } X \\ X \text{ admet une espérance } E(X)\ ,\ M : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & E(|X-x|) \end{array} \end{array}}$

(a) Pour $x \geqslant 0$ soit $u \geqslant x$, $\int_x^u tf(t)\,dt = [t(F(t) - F(x))]_x^u - \int_x^u (F(t) - F(x))\,dt \geqslant [t(F(t) - F(x))]_x^u$

en faisant tendre u vers $+\infty$ l'encadrement on déduit que

$\boxed{0 \leqslant x(1 - F(x)) \leqslant \int_x^{+\infty} tf(t)\,dt = E(X) - \int_{-\infty}^x tf(t)\,dt}$

et comme $\lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^x tf(t)\,dt = E(X)$ on déduit que $\boxed{\lim_{x\to+\infty} x(1 - F(x)) = 0}$.

$P(-X \leqslant x) = P(X > -x) = 1 - P(X \leqslant -x) = 1 - F(-x)$ donc $-X$ est une variable à densité de densité $x \mapsto f(-x)$ et de fonction de répartition $x \mapsto 1 - F(-x)$ donc, en utilisant le résultat précédent à la variable aléatoire $-X$ on a $\lim_{x\to+\infty} x(1 - (1 - F(-x))) = 0$, c'est à dire que $\boxed{\lim_{x\to-\infty} xF(x) = 0}$.

(b) Pour $x \in \mathbb{R}$, $M(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} |t-x| f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} (x-t) f(t)\,dt + \int_{x}^{+\infty} (t-x) f(t)\,dt$

$= [(x-t) F(t)]_{-\infty}^{x} - \int_{-\infty}^{x} (-1)(F(t))\,dt + [(t-x)(F(t)-1)]_{x}^{+\infty} - \int_{x}^{+\infty} (F(t)-1)\,dt$

De $\lim_{x\to-\infty} xF(x) = 0$ on déduit que $[(x-t) F(t)]_{-\infty}^{x} = 0$, et de $\lim_{x\to+\infty} x(1-F(x)) = 0$

on déduit que $[(t-x)(F(t)-1)]_{x}^{+\infty} = 0$ donc $\boxed{M(x) = \int_{-\infty}^{x} F(t)\,dt + \int_{x}^{+\infty} (1-F(t))\,dt}$

(c) Pour $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, $M(b) - M(a) = \int_{-\infty}^{b} F(t)\,dt + \int_{b}^{+\infty} (1-F(t))\,dt - \left(\int_{-\infty}^{a} F(t)\,dt + \int_{a}^{+\infty} (1-F(t))\,dt \right)$

$= \int_{a}^{b} F(t)\,dt + \int_{b}^{a} (1-F(t))\,dt = \int_{a}^{b} (2F(t)-1)\,dt$

Conclusion, $\boxed{\forall (a;b) \in \mathbb{R}^{\ddot{}2},\ M(b) - M(a) = \int_{a}^{b} (2F(t)-1)\,dt}$.

(d) m est une médiane de X.

Pour $t \geqslant m$ $F(t) \geqslant \dfrac{1}{2}$, donc pour $b \geqslant m$, $M(b) - M(m) = \int_{m}^{b} (2F(t)-1)\,dt \geqslant 0$

Pour $t \leqslant m$ $F(t) \leqslant \dfrac{1}{2}$, donc pour $a \leqslant m$, $M(m) - M(a) = \int_{a}^{m} (2F(t)-1)\,dt \leqslant 0$, donc $\forall c \in \mathbb{R}$, $M(c) - M(m) \geqslant 0$

Conclusion, $\boxed{M \text{ atteint son minimum en } m \text{ , où } m \text{ est une médiane de } X}$.