EXERCICE

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre 3 à coefficients réels.
On pose pour toute matrice $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant 3} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$s_1(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{1,j}\ , \quad s_2(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{2,j}\ , \quad s_3(A) = \sum_{j=1}^{3} a_{3,j} \qquad \text{(somme des coefficients des lignes)}$$

$$s_4(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,1}\ , \quad s_5(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,2}\ , \quad s_6(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,3} \qquad \text{(somme des coefficients des colonnes)}$$

$$s_7(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,i}\ , \quad s_8(A) = \sum_{i=1}^{3} a_{i,4-i} \qquad \text{(somme des coefficients des diagonales)}$$

Pour tout couple $(k,\ell) \in [\![1,3]\!]^2$, on note $E_{k,\ell}$ la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont nuls, excepté celui situé à l'intersection de la k-ième ligne et de la ℓ-ième colonne qui vaut 1.

On rappelle que la famille $\big(E_{1,1}, E_{1,2}, E_{1,3}, E_{2,1}, E_{2,2}, E_{2,3}, E_{3,1}, E_{3,2}, E_{3,3}\big)$ est une base de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$; on note $\mathcal{B}$ cette base.

1. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que $s_7(A) = 0$.
   a) Montrer que $\mathcal{E}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   b) Quelle est la dimension de $\mathcal{E}$?

Soit f l'application de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}^8$ qui, à toute matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, fait correspondre le vecteur $f(A) = \big(s_1(A), s_2(A), s_3(A), s_4(A), s_5(A), s_6(A), s_7(A), s_8(A)\big)$ de $\mathbb{R}^8$.

2.a) Montrer que f est une application linéaire.
   b) On note $\mathcal{C}$ la base canonique de $\mathbb{R}^8$. Écrire la matrice F de f dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$.

3. On note $\mathcal{G}$ l'ensemble des matrices $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que :

$$s_1(A) = s_2(A) = s_3(A) = s_4(A) = s_5(A) = s_6(A) = s_7(A) = s_8(A)\,.$$

a) Montrer que $\mathcal{G}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.

b) On note $\mathrm{Ker} f$ le noyau de l'application linéaire f. Montrer que $\mathcal{G} \cap \mathcal{E} = \mathrm{Ker} f$.

c) On note J la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Montrer que toute matrice de $\mathcal{G}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une matrice de $\mathrm{Ker} f$ et d'une matrice de $\mathrm{Vect}(J)$.

d) Quel est le rang de l'application f ?

e) Déterminer la dimension de $\mathrm{Ker} f$ ainsi qu'une base de $\mathrm{Ker} f$.

PROBLÈME

- *La fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est notée* Φ.
- *La notation* exp *désigne la fonction exponentielle.*
- *Les trois parties du problème sont très largement indépendantes.*

Partie I. Un équivalent d'une intégrale

1. Soit N la fonction définie sur l'intervalle $[0,1[$, à valeurs réelles, telle que : $N(x) = x^2 - 2x - 2(1-x)\ln(1-x)$.

a) Montrer que la fonction N est de classe C^1 sur $[0,1[$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $\ln(1-x) \leqslant -x$.

c) On note N' la fonction dérivée de la fonction N. Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $N'(x) \leqslant 0$.

d) En déduire pour tout $x \in [0,1[$, un encadrement de $N(x)$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0,1[$, à valeurs réelles, telle que : $f(x) = -2\,\dfrac{x + \ln(1-x)}{x^2}$.

a) Rappeler le développement limité en 0 à l'ordre 2 de $\ln(1-x)$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$. En déduire que la fonction f est prolongeable par continuité en 0.
On note encore f la fonction ainsi prolongée.

c) Sous réserve d'existence, on note f' la fonction dérivée de f.
Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, on a : $f'(x) = -2\,\dfrac{N(x)}{x^3(1-x)}$.

d) Dresser le tableau de variation de la fonction f sur $[0,1[$.
En déduire que f réalise une bijection strictement croissante de $[0,1[$ dans $[1,+\infty[$.

3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [0,1[$: $g_n(x) = \exp\left(-\dfrac{nx^2}{2} f(x)\right)$.

a) Établir la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$. On pose alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $I_n = \displaystyle\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x$.

b) Montrer que pour tout $x \in [0,1[$, on a : $0 \leqslant g_n(x) \leqslant \exp\left(-\dfrac{nx^2}{2}\right)$.

c) En déduire l'encadrement : $0 \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{2\pi}{n}}\left(\Phi(\sqrt{n}) - \dfrac{1}{2}\right)$.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

4. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite réelle définie par : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{1}{\ln(n+2)}$.

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $0 < v_n < 1$.

b) On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $w_n = f(v_n)$. Établir la convergence de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$; déterminer sa limite.

c) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les inégalités suivantes :

$$I_n \geqslant \int_0^{v_n} g_n(x)\mathrm{d}x \geqslant \int_0^{v_n} \exp\left(-\frac{nx^2}{2} w_n\right)\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{\sqrt{nw_n}} \int_0^{v_n\sqrt{nw_n}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right)\mathrm{d}u\,.$$

d) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'encadrement : $\dfrac{2}{\sqrt{w_n}}\left(\Phi\big(v_n\sqrt{nw_n}\big) - \dfrac{1}{2}\right) \leqslant I_n\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}} \leqslant 1$.

e) En déduire un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Partie II. Quelques propriétés asymptotiques de la loi de Poisson

Les notations sont identiques à celles de la Partie I.

5. On pose pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $J_0(x) = 1 - \mathrm{e}^{-x}$ et $J_n(x) = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^x t^n\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$.

a) Calculer pour tout réel $x > 0$, $J_1(x)$.

b) Établir pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation : $J_n(x) = J_{n-1}(x) - \dfrac{1}{n!}\,x^n\mathrm{e}^{-x}$.

c) En déduire pour tout réel $x > 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de $J_n(x)$ sous forme de somme.

d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} t^n\,\mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t$ est convergente et calculer sa valeur.

e) À l'aide du changement de variable $t = n(1-x)$, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a : $I_n = n!\dfrac{\mathrm{e}^n}{n^{n+1}}\,J_n(n)$.

Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, définies sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, de même loi de Poisson de paramètre 1. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $S_n = \displaystyle\sum_{i=1}^n X_i$.

6.a) Rappeler, sans démonstration mais en citant le résultat de cours utilisé, la loi de la variable aléatoire S_n.

b) Exprimer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P\big([S_n \leqslant n]\big)$ et $P\big([S_n \geqslant n]\big)$ en fonction de $J_n(n)$ et $J_{n-1}(n)$ respectivement.

7. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note h_n la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$, à valeurs réelles, telle que : $h_n(x) = x^n\mathrm{e}^{-x}$.

a) Étudier les variations de h_n sur $\mathbb{R}_+$.

b) Établir pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la relation :

$$P\big([S_{n+1} \leqslant n+1]\big) - P\big([S_n \leqslant n]\big) = -\frac{1}{(n+1)!}\left(\int_n^{n+1}\big(h_{n+1}(t) - h_{n+1}(n)\big)\mathrm{d}t\right).$$

c) En déduire que la suite $\big(P\big([S_n \leqslant n]\big)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est décroissante.

d) Étudier la monotonie de la suite $\big(P\big([S_n \geqslant n]\big)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

e) Montrer que les deux suites $\big(P\big([S_n \leqslant n]\big)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $\big(P\big([S_n \geqslant n]\big)\big)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont convergentes.

8.a) Énoncer le théorème de la limite centrée et déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\big([S_n \leqslant n]\big)$.

b) En déduire, à l'aide des questions 4 et 5, un équivalent de $n!$ lorsque n tend vers $+\infty$.

c) Donner un équivalent et la limite de $P\big([S_n = n]\big)$ lorsque n tend vers $+\infty$.

d) Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} P\big([S_n \geqslant n]\big)$.

Partie III. Médianes : cas des variables aléatoires discrètes et des variables aléatoires à densité

Soit X une variable aléatoire réelle définie sur un espace probabilisé $\big(\Omega, \mathcal{A}, P\big)$, de fonction de répartition F. On appelle *médiane* de X, tout réel m vérifiant les deux conditions : $P\big([X \leqslant m]\big) \geqslant \dfrac{1}{2}$ et $P\big([X \geqslant m]\big) \geqslant \dfrac{1}{2}$. On admet qu'un tel réel m existe toujours.

9. On suppose que l'on a défini un entier N supérieur ou égal à 1 et un type `type proba = array[1. . N] of real`. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $[\![1, N]\!]$. On suppose que la loi de X est stockée dans une variable `loi` de type `proba`.

   Écrire une fonction Pascal d'en-tête `function mediane (loi :proba) :real ;` qui renvoie une médiane de X.

10. Dans cette question, X est une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbb{N}$ admettant une espérance $E(X)$.

    a) Montrer que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $E\big(|X-r|\big) = E(X) - r + 2\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1}(r-k)P\big([X=k]\big)$.

    b) Montrer que : $\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1} F(k) = \sum_{k=0}^{r-1}(r-k)P\big([X=k]\big)$.

    En déduire que pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, on a : $E\big(|X-r|\big) = E(X) + 2\displaystyle\sum_{k=0}^{r-1}\left(F(k) - \frac{1}{2}\right)$.

    c) Soit m une médiane de X. On suppose que $m \in \mathbb{N}^*$.

    Déterminer, pour tout $r \in \mathbb{N}^*$, le signe de $E\big(|X-r|\big) - E\big(|X-m|\big)$. Conclure.

    d) On suppose que X suit la loi de Poisson de paramètre n ($n \in \mathbb{N}^*$).

    En utilisant les questions 7 et 8, justifier que n est une médiane de X.

    En utilisant les questions 10.a et 8.c, montrer que $E\big(|X-n|\big)$ est équivalent à $\sqrt{\dfrac{2n}{\pi}}$ lorsque n tend vers $+\infty$.

11. Dans cette question, X est une variable aléatoire à densité dont une densité f est continue sur $\mathbb{R}$.

    On suppose que X admet une espérance $E(X)$. Soit M la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $M(x) = E\big(|X-x|\big)$.

    a) Établir pour tout $x \geqslant 0$, l'encadrement : $0 \leqslant x\big(1-F(x)\big) \leqslant \displaystyle\int_x^{+\infty} tf(t)\,\mathrm{d}t$.

    En déduire que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} x\big(1-F(x)\big) = 0$.

    En considérant la variable aléatoire $-X$, montrer que $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xF(x) = 0$.

    b) Établir pour tout x réel, la relation : $M(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} F(t)\,\mathrm{d}t + \int_x^{+\infty} \big(1-F(t)\big)\mathrm{d}t$.

    c) Montrer que pour tout couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a : $M(b) - M(a) = \displaystyle\int_a^b \big(2F(t)-1\big)\mathrm{d}t$.

    d) On note m une médiane de X. Montrer que m est un point en lequel la fonction M atteint son minimum.