ESSEC, option économique - Épreuve de mathématiques du 11 mai 2018

Corrigé proposé par Romain Meurant pour l'APHEC. Toute suggestion permettant de l'améliorer est la bienvenue : romain.meurant@lycee-descartes.ma

1. *Question classique !*

   (a) En écrivant, pour tout $x \in \mathbb{R}$:

   $$(Y_n \leq x) = \bigcap_{i=1}^{n} (X_i \leq x)$$

   et par indépendance des variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$, de même loi que X :

   $$G_n(x) = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}(X_i \leq x) = \big(F(x)\big)^n.$$

   (b) La fonction F étant continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf peut-être en 0 et α, il en est de même de la fonction G_n (la fonction « puissance n » est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$), ce qui prouve que la variable aléatoire Y_n est à densité.
   Une densité de Y_n est par exemple la fonction g_n définie par :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = nf(x)\big(F(x)\big)^{n-1}.$$

   (c) La variable aléatoire Y_n étant bornée (à valeurs dans $]0, \alpha[$), elle admet une espérance.

2. (a) « Le deuxième plus grand des nombres $X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega)$ est inférieur ou égal à x » signifie exactement que tous ces nombres, sauf peut-être un (le plus grand : $Y_n(\omega)$), sont inférieurs ou égaux à x.
   On pourrait écrire :

   $$(Z_n \leq x) = \bigcup_{i=1}^{n} \left(\bigcap_{j\in\{1,\ldots,n\}, j\neq i} (X_j \leq x) \right)$$

   mais les n événements dont on prend l'union ici ne sont pas incompatibles ; on s'en sort en distinguant le cas où les n nombres sont inférieurs ou égaux à x :

   $$(Z_n \leq x) = \underbrace{\left[\bigcap_{i\in\{1,\ldots,n\}} (X_i \leq x) \right]}_{=(Y_n \leq x)} \cup \left[\bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}} \left((X_i > x) \cap \left(\bigcap_{j\neq i} (X_j \leq x) \right) \right) \right]$$

   Les $(n+1)$ événements colorés ci-dessus sont deux-à-deux incompatibles :

   $$H_n(x) = \mathrm{P}(Y_n \leq x) + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{P}\left((X_i > x) \cap \left(\bigcap_{j\neq i} (X_j \leq x) \right) \right).$$

   Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, les n événements $(X_i > x)$ et $(X_j \leq x)$ ($j \in \{1, \ldots, n\}$, $j \neq i$) étant indépendants :

   $$H_n(x) = \big(F(x)\big)^n + \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{P}(X_i > x) \prod_{j\neq i} \mathrm{P}(X_j \leq x) \right)$$

   Et enfin, puisque les variables $X_1, \ldots, X_n$ suivent la même loi que X :

   $$\forall x \in \mathbb{R},\ H_n(x) = \big(F(x)\big)^n + n\big(1 - F(x)\big)\big(F(x)\big)^{n-1}.$$

   (b) Comme en 1.(b), la fonction H_n est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sauf peut-être en 0 et α, donc la variable aléatoire Z_n est à densité, et une densité est par exemple la fonction h_n définie par :

   $$\begin{aligned}\forall x \in \mathbb{R},\ h_n(x) &= nf(x)\big(F(x)\big)^{n-1} + n(n-1)f(x)\big(F(x)\big)^{n-2} - n^2 f(x)\big(F(x)\big)^{n-1} \\ &= nf(x)\big(F(x)\big)^{n-2}\left[F(x) + (n-1) - nF(x)\right] \\ &= nf(x)\big(F(x)\big)^{n-2}(n-1)\big(1 - F(x)\big)\end{aligned}$$

3. L'idée du programme est :

   — regarder, parmi les deux premières valeurs (`X(1)` et `X(2)`), quelles sont la plus grande et la deuxième plus grande (c'est-à-dire la plus petite !)

   — parcourir les valeurs suivantes une à une, et pour chacune (`X(k)` pour $k \geq 3$) :

   — si on trouve une valeur plus grande que la plus grande de toutes les précédentes, elle devient la nouvelle plus grande et la nouvelle deuxième plus grande est alors l'ancienne plus grande (mais les deux affectations de la ligne 10 sont faites dans l'ordre inverse de cette phrase pour ne pas perdre la valeur de `y`)

   — sinon, mais si on trouve quand même une valeur plus grande que la deuxième plus grande de toutes les précédentes, cette valeur trouvée devient la nouvelle deuxième plus grande (et la plus grande est toujours la même).

```
function [y,z] = DeuxPlusGrands(n)
    X = simulX(n)
    if X(1) > X(2)
        y = X(1); z = X(2)
    else
        z = X(1); y = X(2)
    end
    for k=3:n
        if X(k) > y
            z = y; y = X(k)
```

```
        else
            if X(k) > z
                z = X(k)
            end
        end
    end
endfunction
```

4. (a) Avec les contraintes de l'énoncé sur f, il n'y a qu'un seul choix :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} & \text{si } x \in]0, \alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et la fonction de répartition de X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \dfrac{x}{\alpha} & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}.$$

On en déduit, avec les question 1.(b) et 2.(b) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ g_n(x) = \begin{cases} n\dfrac{x^{n-1}}{\alpha^n} & \text{si } x \in]0, \alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\forall x \in \mathbb{R},\ h_n(x) = \begin{cases} n(n-1)\dfrac{(\alpha - x)x^{n-2}}{\alpha^n} & \text{si } x \in]0, \alpha[\\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

(b)
$$\mathrm{E}(Y_n) = \int_0^\alpha x g_n(x) dx = \frac{n}{\alpha^n} \int_0^\alpha x^n dx = \frac{n}{\alpha^n} \times \frac{\alpha^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1}\alpha.$$

$$\mathrm{E}(Z_n) = \int_0^\alpha x h_n(x) dx = \frac{n(n-1)}{\alpha^n}\left(\alpha\frac{\alpha^n}{n} - \frac{\alpha^{n+1}}{n+1}\right) = n(n-1)\alpha\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{n-1}{n+1}\alpha.$$

5. (a) La fonction f est positive et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{0, \alpha\}$; elle vérifie de plus :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = \frac{\lambda}{\alpha^\lambda}\int_0^\alpha x^{\lambda-1}dx = \frac{\lambda}{\alpha^\lambda} \times \frac{\alpha^\lambda}{\lambda} = 1.$$

Ainsi, f est bien une densité de probabilité.

Puisque f est nulle en dehors de $]0, \alpha[$, la fonction de répartition de X est nulle sur $]-\infty, 0]$ et vaut 1 sur $[\alpha, +\infty[$.
Pour $x \in [0, \alpha]$:

$$F(x) = \int_0^x f(t)dt = \frac{\lambda}{\alpha^\lambda} \times \frac{x^\lambda}{\lambda} = \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\lambda.$$

En résumé :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^\lambda & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}.$$

$$\mathrm{E}(X) = \int_0^\alpha \lambda\frac{x^\lambda}{\alpha^\lambda}dx = \frac{\lambda}{\alpha^\lambda} \times \frac{\alpha^{\lambda+1}}{\lambda+1} = \frac{\lambda}{\lambda+1}\alpha.$$

(C'est exactement le même calcul qu'en 4.(b).)

(b) On obtient alors la fonction de répartition de Y_n avec la question 1.(a) :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ G_n(x) = \big(F(x)\big)^n = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0 \\ \left(\dfrac{x}{\alpha}\right)^{n\lambda} & \text{si } 0 \leq x \leq \alpha \\ 1 & \text{si } x \geq \alpha \end{cases}.$$

ce qui correspond, d'après 5.(a)ii., à la fonction de répartition d'une variable aléatoire suivant la loi puissance de paramètres α et $n\lambda$: Y_n suit donc cette loi.

D'après 5.(a)iii. :

$$\mathrm{E}(Y_n) = \frac{n\lambda}{n\lambda+1}\alpha.$$

(On a repris l'expression de $\mathrm{E}(X)$ *en remplaçant* λ *par* λn*.)*

(c) Utilisons la question 2.(b) donnant une densité de Z_n pour calculer $\mathrm{E}(Z_n)$:

$$\mathrm{E}(Z_n) = n(n-1)\lambda\int_0^\alpha \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\lambda \left[1 - \left(\frac{x}{\alpha}\right)^\lambda\right]\left(\frac{x}{\alpha}\right)^{(n-2)\lambda} dx.$$

On peut alléger légèrement le calcul avec le changement de variable $u = \dfrac{x}{\alpha}$:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Z_n) &= n(n-1)\lambda\alpha\int_0^1 u^\lambda\left(1 - u^\lambda\right)u^{(n-2)\lambda}du \\ &= n(n-1)\lambda\alpha\left(\int_0^1 u^{(n-1)\lambda}du - \int_0^1 u^{n\lambda}du\right) \end{aligned}$$

$$= n(n-1)\lambda\alpha\left(\frac{1}{1+(n-1)\lambda} - \frac{1}{1+n\lambda}\right)$$
$$= n(n-1)\lambda\alpha\frac{1+n\lambda-1-(n-1)\lambda}{(1+(n-1)\lambda)(1+n\lambda)} = \frac{n(n-1)\lambda^2\alpha}{(1+(n-1)\lambda)(1+n\lambda)}$$

Pour les calculs d'espérance en questions 4. et 5., l'énoncé ne donnant aucune réponse, on pourra faire quelques « tests de vérification » au brouillon ; par exemple :

— *Puisque X est à valeurs dans $]0,\alpha[$, il en est de même de Y_n et Z_n. On a aussi l'inégalité $Z_n \leq Y_n$ (par définition du « deuxième plus grand »). Donc, par croissance de l'espérance :*
$$0 \leq \mathrm{E}(Z_n) \leq \mathrm{E}(Y_n) \leq \alpha$$
ce qui est clair pour la question 4., et que l'on peut vérifier pour la question 5. en remarquant que :
$$\mathrm{E}(Z_n) = \alpha\underbrace{\frac{n\lambda}{n\lambda+1}}_{=\mathrm{E}(Y_n)} \times \underbrace{\frac{(n-1)\lambda}{1+(n-1)\lambda}}_{\leq 1}$$

— *On peut aussi vérifier que $\mathrm{E}(Y_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$ et $\mathrm{E}(Z_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha$. (Nous ne l'avons pas démontré mais ceci est assez intuitif : plus le nombre n de valeurs est grand, plus la plus grande et la deuxième plus grande de ces n valeurs sont proches de α.)*
Ces deux limites sont claires en 4. et en 5., en raisonnant avec des équivalents.

— *Pour $n = 2$, on a $Y_2 + Z_2 = X_1 + X_2$ donc $\mathrm{E}(Y_2) + \mathrm{E}(Z_2) = 2\mathrm{E}(X)$. Et en effet :*
  — *pour la question 4. :*
$$\mathrm{E}(Y_2) + \mathrm{E}(Z_2) = \frac{2}{3}\alpha + \frac{1}{3}\alpha = \alpha = 2\mathrm{E}(X) \ ;$$
  — *pour la question 5. :*
$$\mathrm{E}(Y_2) + \mathrm{E}(Z_2) = \left(\frac{2\lambda}{2\lambda+1} + \frac{2\lambda^2}{(1+2\lambda)(1+\lambda)}\right)\alpha = \frac{2\lambda}{1+\lambda}\alpha = 2\mathrm{E}(X).$$

— *On peut aussi remarquer que les résultats obtenus en 5. lorsque $\lambda = 1$ correspondent aux résultats obtenus en 4. (en effet, la loi puissance de paramètres α et 1 est la loi uniforme sur $]0,\alpha[$).*

6. (a) Puisque σ est dérivable et de dérivée ne s'annulant pas, sa réciproque σ^{-1} est dérivable avec :
$$\forall y \in]0,\beta[,\ \left(\sigma^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{\sigma'\left(\sigma^{-1}(y)\right)}.$$

(b) Pour tout $(x,y) \in]0,\alpha[\times]0,\beta[$:
$$\partial_2(\gamma)(x,y) = -G_{n-1}\left(\sigma^{-1}(y)\right) + (x-y)\left(\sigma^{-1}\right)'(y)G_{n-1}{}'\left(\sigma^{-1}(y)\right)$$
$$= -G_{n-1}\left(\sigma^{-1}(y)\right) + \frac{x-y}{\sigma'\left(\sigma^{-1}(y)\right)}g_{n-1}\left(\sigma^{-1}(y)\right)$$

(c) Pour tout $x \in]0,\alpha[$, la fonction $y \mapsto \gamma(x,y)$ admet un maximum en $\sigma(x)$ donc sa dérivée s'y annule, c'est-à-dire :
$$\forall x \in]0,\alpha[,\ \partial_2(\gamma)(x,\sigma(x)) = 0.$$
On en déduit avec le calcul fait en (b) et en remarquant que $\sigma^{-1}(\sigma(x)) = x$:
$$-G_{n-1}(x) + \frac{x-\sigma(x)}{\sigma'(x)}g_{n-1}(x) = 0$$
soit encore :
$$\sigma'(x)G_{n-1}(x) + \sigma(x)g_{n-1}(x) = xg_{n-1}(x).$$

(d) En reconnaissant dans le membre de gauche ci-dessus une expression de la forme $u'v + uv'$ (avec $u = \sigma$ et $v = G_{n-1}$), on a :
$$\forall x \in]0,\alpha[,\ \left(\sigma(x)G_{n-1}(x)\right)'(x) = xg_{n-1}(x)$$
Puisque σG_{n-1} s'annule en 0 :
$$\forall x \in]0,\alpha[,\ \sigma(x)G_{n-1}(x) = \int_0^x tg_{n-1}(t)dt$$
et on en déduit :
$$\forall x \in]0,\alpha[,\ \sigma(x) = \frac{1}{G_{n-1}(x)}\int_0^x tg_{n-1}(t)dt.$$
(Notons que G_{n-1} ne s'annule pas sur $]0,\alpha[$ car g_{n-1} y est strictement positive.)

(e) Les fonctions $u : t \mapsto t$ et $v : t \mapsto G_{n-1}(t)$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0,\alpha[$ (g_{n-1} est continue sur $]0,\alpha[$). Il convient donc de se placer sur un segment $[A,x]$ avec $0 < A < x < \alpha$ pour effectuer une intégration par parties :

(G_{n-1} n'est peut-être pas de classe $\mathcal{C}^1$ en 0)
$$\int_A^x tg_{n-1}(t)dt = \left[tG_{n-1}(t)\right]_A^x - \int_A^x G_{n-1}(t)dt$$
En passant à la limite quand $A \to 0$ (en notant que G_{n-1} étant bornée, $tG_{n-1}(t) \underset{A\to 0}{\longrightarrow} 0$) :
$$\forall x \in]0,\alpha[,\ \sigma(x) = x - \int_0^x \frac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(x)}dt.$$

(On ne pouvait pas s'arrêter à la question (d) pour affirmer l'unicité de σ car il n'y a pas unicité d'une densité g_{n-1} de Y_{n-1}.)

7. (a) La fonction $t \mapsto tg_{n-1}(t)$ étant continue et strictement positive sur $]0,x]$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^x tg_{n-1}(t)dt$ est strictement positive

(cette fonction admet sur le segment $\left[\frac{x}{2}, x\right]$ un minimum $m > 0$ donc
$$\int_0^x tg_{n-1}(t)dt \geq \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{x}{2} m dt = \frac{mx^2}{4} > 0).$$

On en déduit avec $(*)$ que σ est strictement positive sur $]0, \alpha[$.

La même justification s'applique pour obtenir la stricte positivité de l'intégrale $\displaystyle\int_0^x \frac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(x)} dt$ et la relation $(**)$ donne la deuxième inégalité stricte souhaitée.

(b) Comme primitive d'une fonction continue sur le segment $[0, \alpha]$, la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^x G_{n-1}(t)dt$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, \alpha]$. Or d'après $(**)$:

$$\forall x \in]0, \alpha[, \; \sigma(x) = x - \frac{1}{G_{n-1}(x)} \int_0^x G_{n-1}(t)dt$$

La fonction $\dfrac{1}{G_{n-1}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \alpha[$ (inverse d'une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ (g_n est continue sur $]0, \alpha[$) sur un intervalle où elle ne s'annule pas).
On en déduit que σ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, \alpha[$ avec (utilisons l'expression $(*)$ pour dériver) :

$$\begin{aligned}
\forall x \in]0, \alpha[, \; \sigma'(x) &= \left(\frac{1}{G_{n-1}(x)}\right)' \int_0^x tg_{n-1}(t)dt - \frac{1}{G_{n-1}(x)} x g_{n-1}(x) \\
&= -\frac{g_{n-1}(x)}{\big(G_{n-1}(x)\big)^2} \int_0^x tg_{n-1}(t)dt - \frac{x g_{n-1}(x)}{G_{n-1}(x)} \\
&= -\frac{g_{n-1}(x)}{G_{n-1}(x)} (\sigma(x) - x) = \underbrace{\frac{g_{n-1}(x)}{G_{n-1}(x)}}_{>0} (x - \sigma(x))
\end{aligned}$$

On en déduit avec la deuxième inégalité de (a) que σ' est strictement positive.

(c) La fonction σ est strictement croissante (dérivée strictement positive) et continue (car de classe $\mathcal{C}^1$) sur $]0, \alpha[$.
Elle réalise donc une bijection de $]0, \alpha[$ dans l'intervalle $\left]\lim\limits_{0^+} \sigma, \lim\limits_{\alpha^-} \sigma\right[$.
La question 7.(a) et le théorème d'encadrement donnent : $\lim\limits_{0^+} \sigma = 0$.
Comme Y_{n-1} est à valeurs dans $]0, \alpha[$, on a $G_{n-1}(\alpha) = 1$. Avec la relation $(*)$:

$$\lim_{\alpha^-} \sigma = \int_0^\alpha tg_{n-1}(t)dt = \mathrm{E}(Y_{n-1}).$$

(d) i.

$$\gamma(x, y) = (x - y)G_{n-1}\left(\sigma^{-1}(y)\right) = (x - \sigma(z))G_{n-1}(z)$$

$$= (x - z)G_{n-1}(z) + \underbrace{(z - \sigma(z))\, G_{n-1}(z)}_{= \int_0^z \frac{G_{n-1}(t)}{G_{n-1}(z)} dt \text{ d'après } (**)} = (x - z)G_{n-1}(z) + \int_0^z G_{n-1}(t)dt$$

ii. Avec $y = \sigma(x)$ dans l'égalité i. (et donc $z = x$), on a :

$$\gamma(x, \sigma(x)) = \int_0^x G_{n-1}(t)dt$$

Et en reprenant l'égalité générale i. (avec y quelconque) puis avec la relation de Chasles :

$$\begin{aligned}
\gamma(x, \sigma(x)) - \gamma(x, y) &= \int_0^x G_{n-1}(t)dt - (x - z)G_{n-1}(z) - \int_0^z G_{n-1}(t)dt \\
&= (z - x)G_{n-1}(z) - \int_x^z G_{n-1}(t)dt.
\end{aligned}$$

iii. Donc : $\gamma(x, \sigma(x)) - \gamma(x, y) = \displaystyle\int_x^z \big(G_{n-1}(z) - G_{n-1}(t)\big)dt.$

La fonction G_{n-1} étant croissante (comme toute fonction de répartition) :

— Si $x \leq z$ alors :

$$\forall t \in [x, z], \; G_{n-1}(z) - G_{n-1}(t) \geq 0$$

et par positivité de l'intégrale :

$$\gamma(x, \sigma(x)) - \gamma(x, y) \geq 0.$$

— De même, si $x \geq z$ alors :

$$\forall t \in [z, x], \; G_{n-1}(z) - G_{n-1}(t) \leq 0$$

mais les bornes de l'intégrale étant ici dans « l'ordre décroissant » :

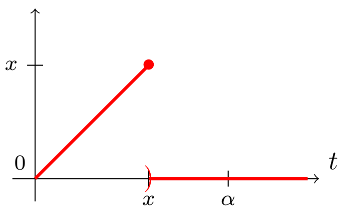
$$\gamma(x, \sigma(x)) - \gamma(x, y) \geq 0.$$

En résumé, on a dans tous les cas :

$$\forall x \in]0, \alpha[, \; \forall y \in]0, \beta[, \; \gamma(x, y) \leq \gamma(x, \sigma(x))$$

ce qui signifie que, pour tout $x \in]0, \alpha[$ fixé, l'application $y \in]0, \beta[\mapsto \gamma(x, y)$ admet un maximum en $\sigma(x)$.

8. (a)



Cette fonction permet de réduire la borne supérieure de l'intégrale

$$\mathrm{E}(Y_{n-1}) = \int_0^\alpha t g_{n-1}(t)dt.$$

En effet, le théorème de transfert donne :

$$\mathrm{E}(\varphi_x(Y_{n-1})) = \int_0^\alpha \varphi_x(t) g_{n-1}(t)dt = \int_0^x t g_{n-1}(t)dt.$$

Par ailleurs, $\mathrm{P}(Y_{n-1} \leq x) = G_{n-1}(x)$; donc avec la relation $(*)$:

$$\sigma(x) = \frac{\mathrm{E}(\varphi_x(Y_{n-1}))}{\mathrm{P}(Y_{n-1} \leq x)}.$$

(b) À partir d'un échantillon de taille 10000 (par exemple) de la loi de Y_{n-1} placé dans un vecteur `Y`, on obtient une simulation de $\mathrm{E}(\varphi(Y_{n-1}))$ en faisant la moyenne des valeurs du vecteur $\varphi_x(Y_{n-1})$ (somme des coordonnées de `Y` inférieures ou égales à `x`, divisée par la taille de `Y`) et une simulation de $\mathrm{P}(Y_{n-1} \leq x)$ en comptant la proportion de valeurs de `Y` inférieures ou égales à x.

```
function s=sigma(x,n)
    N = 10000
    Y = zeros(N)
    for k=1:N
        X = simulX(n-1)
        Y(k) = max(X)
    end
    E = sum(Y(Y<=x))/N
    P = sum(Y<=x)/N
    s = E/P
endfunction
```

9. Le (a) est un cas particulier du (b) ; faisons le calcul général lorsque X suit la loi puissance de paramètres α et λ, en utilisant la relation $(**)$ et la fonction de répartition de Y_{n-1} déterminée en 5.(b) :

$$\forall x \in]0,\alpha[,\ \sigma(x) = x - \left(\frac{\alpha}{x}\right)^{(n-1)\lambda} \int_0^x \left(\frac{t}{\alpha}\right)^{(n-1)\lambda} dt = x - \frac{x}{(n-1)\lambda+1} = \frac{(n-1)\lambda}{(n-1)\lambda+1}x.$$

(On pourra notamment vérifier — en reprenant la valeur de l'espérance de Y_{n-1} calculée en 5.(b)ii. — que, comme établi en question 7.(c), $\sigma(x) \underset{x\to\alpha}{\longrightarrow} \beta = \mathrm{E}(Y_{n-1})$.)

Et donc pour la loi uniforme sur $]0,\alpha[$ (loi puissance de paramètres α et 1) :

$$\forall x \in]0,\alpha[,\ \sigma(x) = \frac{n-1}{n}x.$$

Pour la loi puissance de paramètres $\alpha = 50$ et $\lambda = 0,2$, avec $n = 6$:

$$\forall x \in]0,50[,\ \sigma(x) = \frac{x}{2} \qquad ((n-1)\lambda = 1)$$

ce qui correspond bien au dessin obtenu.

10. À cause du cas où la plus grande mise a été faite à la fois par A_n et par un (ou plusieurs) autre(s) acheteur(s) (auquel cas le gagnant est tiré au sort), on ne peut pas exprimer l'évènement E_n en utilisant uniquement les notations de l'énoncé. Mais :

— si A_n a fait une mise *strictement supérieure* à celles des autres acheteurs, alors A_n remporte l'enchère ;

— si A_n a remporté l'enchère, cela implique que sa mise était *supérieure ou égale* à celles des autres acheteurs.

Autrement dit :

$$\Big(\max\big(\sigma(X_1),\dots,\sigma(X_{n-1})\big) < y_n\Big) \subset E_n \subset \Big(\max\big(\sigma(X_1),\dots,\sigma(X_{n-1})\big) \leq y_n\Big)$$

Or, pour toute fonction croissante f sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, on a :

$$\forall a,b \in I,\ \max\big(f(a),f(b)\big) = f\big(\max(a,b)\big).$$

(En effet, l'inégalité « $\geq$ » est vraie pour n'importe quelle fonction ; pour une fonction croissante, on vérifie l'inégalité « $\leq$ » en distinguant les deux cas $a \leq b$ et $a \geq b$.)
Comme σ est une fonction croissante :

$$\max\big(\sigma(X_1),\dots,\sigma(X_{n-1})\big) = \sigma\big(\max(X_1),\dots,\max(X_{n-1})\big) = \sigma(Y_{n-1}).$$

En reprenant l'encadrement de E_n ci-dessus et en utilisant la *stricte* croissance de σ :

$$\big(Y_{n-1} < \sigma^{-1}(y_n)\big) \subset E_n \subset \big(Y_{n-1} \leq \sigma^{-1}(y_n)\big).$$

Enfin, l'évènement $\big(Y_{n-1} = \sigma^{-1}(y_n)\big)$ est de probabilité nulle car la variable aléatoire Y_{n-1} est à densité. Les deux évènements encadrant E_n dans la ligne ci-dessus sont donc de même probabilité ; en conclusion :

$$\mathrm{P}(E_n) = \mathrm{P}\big(Y_{n-1} < \sigma^{-1}(y_n)\big).$$

L'énoncé aurait du rappeler la définition d'une fonction indicatrice (hors-programme) :

$$\textit{pour tout évènement } A \in \mathcal{A},\quad \mathbb{1}_A : \left\{ \begin{array}{ccl} \Omega & \to & \mathbb{R} \\ \omega & \mapsto & \left\{ \begin{array}{ll} 1 & \textit{si } \omega \in A \\ 0 & \textit{sinon} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

Par définition du résultat net de l'enchère pour A_n :

$$\forall \omega \in \Omega,\ R_n(\omega) = \left\{ \begin{array}{cl} x_n - y_n & \text{si } E_n \text{ est réalisé} \\ 0 & \text{sinon} \end{array} \right\} = (x_n - y_n)\mathbb{1}_{E_n}(\omega).$$

Par linéarité de l'espérance :

$$\mathrm{E}(R_n) = (x_n - y_n)\mathrm{E}(\mathbb{1}_{E_n}).$$

En remarquant que $\mathbb{1}_{E_n}$ est une variable aléatoire suivant la loi de Bernoulli de paramètre $\mathrm{P}(E_n)$ (donc d'espérance $\mathrm{P}(E_n)$) :

$$\mathrm{E}(R_n) = (x_n - y_n)\mathrm{P}(E_n) = (x_n - y_n)\mathrm{P}\big(Y_{n-1} < \sigma^{-1}(y_n)\big) = (x_n - y_n)G_{n-1}\big(\sigma^{-1}(y_n)\big).$$

11. On a donc :

$$\mathrm{E}(R_n) = \gamma(x_n, y_n).$$

Or, d'après la partie II : pour tout $x \in]0, \alpha[$, la fonction $y \in]0, \beta[\mapsto \gamma(x, y)$ admet un maximum en $y = \sigma(x)$.
L'espérance de R_n est donc maximale lorsque $y_n = \sigma(x_n)$, c'est-à-dire lorsque l'acheteur A_n applique la stratégie σ.

12. (a) Supposons que $m \geq x_n$.
  - Si A_n ne remporte pas l'enchère, alors $r_n = 0$.
  - Si A_n remporte l'enchère, alors il paye le prix m, donc : $r_n = x_n - m \leq 0$.

  Dans les deux cas : $r_n \leq 0$.
  Si $y_n = x_n (\leq m)$, alors l'acheteur A_n ne peut remporter l'enchère que lorsque $y_n = m$; et dans ce cas : $r_n = x_n - m = y_n - m = 0$ (et on a aussi $r_n = 0$ dans le cas où A_n ne remporte pas l'enchère).

  (b) Supposons que $m < x_n$.
  - Si $y_n < m$, alors A_n ne remporte pas l'enchère et $r_n = 0$.
  - Si $y_n \geq m$, alors :
    - A_n ne remporte pas l'enchère si $y_n = m$ et qu'il n'est pas tiré au sort parmi les ex aequo : $r_n = 0$;
    - sinon : $r_n = x_n - m$ (> 0).

  (c) Si le joueur A_n choisit de miser le montant correspondant exactement à sa valeur privée $(x_n = y_n)$, alors :
  - dans le cas (a), son résultat net est égal à 0, qui est la plus grande valeur possible $(r_n \leq 0)$;
  - dans le cas (b), il remporte l'enchère (car alors $m < y_n$) et son résultat prend la plus grande valeur possible, $x_n - m$, strictement positive.

13. (a) Chaque acheteur A_i adoptant la stratégie σ, sa mise y_i est égale à $\sigma(X_i)$.
  Puisqu'il s'agit dans cette question d'une enchère au premier prix, l'acheteur paye le prix correspondant à la plus grosse mise (la sienne d'ailleurs) :

$$B_n = \max(y_1, \dots, y_n) = \underbrace{\max\big(\sigma(X_1), \dots, \sigma(X_n)\big) = \sigma\big(\max(X_1, \dots, X_n)\big)}_{\text{par croissance de } \sigma \text{ (voir question 10.)}} = \sigma(Y_n).$$

  (b) Avec le théorème de transfert et en reprenant les résultats des questions 1.(b) et 1.(a) :

$$\mathrm{E}(B_n) = \int_0^\alpha \sigma(x) g_n(x)dx = \int_0^\alpha \sigma(x) n f(x)\big(F(x)\big)^n dx = n\int_0^\alpha \sigma(x) G_{n-1}(x) f(x)dx$$

  Par ailleurs la relation $(*)$ donne :

$$\sigma(x)G_{n-1}(x) = \int_0^x t g_{n-1}(t)dt$$

  et donc :

$$\mathrm{E}(B_n) = n\int_0^\alpha \left(\int_0^x t g_{n-1}(t)dt\right) f(x)dx.$$

  (c) Les fonctions $u : x \mapsto \displaystyle\int_0^x t g_{n-1}(t)dt$ et $v = F$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[A, B]$ avec $0 < A < B < \alpha$.
  La formule d'intégration par parties donne :

$$\int_A^B \left(\int_0^x t g_{n-1}(t)dt\right) f(x)dx = \left[\left(\int_0^x t g_{n-1}(t)\right) F(x)\right]_A^B - \int_A^B x g_{n-1}(x)F(x)dx$$

  Par ailleurs :

$$F(A) \underset{A \to 0^+}{\longrightarrow} 0 \quad \text{et} \quad F(B) \underset{B \to \alpha^-}{\longrightarrow} 1$$

  et donc :

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(B_n) &= n\int_0^\alpha \left(\int_0^x t g_{n-1}(t)dt\right) f(x)dx = n\int_0^\alpha t g_{n-1}(t) - \int_0^\alpha x g_{n-1}(x)F(x)dx \\ &= n\int_0^\alpha x g_{n-1}(x)\big(1 - F(x)\big)dx.\end{aligned}$$

14. Les variables aléatoires B'_n et Z_n ont la même espérance puisqu'elles sont égales (!). En effet, le revenu du vendeur est égal à la deuxième plus grande mise ; les mises étant ici égales aux valeurs privées : $B'_n = Z_n$.

15. Utilisons la question 2.(b) donnant une densité h_n de Z_n :

$$\mathrm{E}(Z_n) = \int_0^\alpha x\ h_n(x)dx = \int_0^\alpha x\ \underbrace{n f(x)\big(F(x)\big)^{n-2}(n-1)}_{= g_{n-1}(x) \text{ d'après 1.(b)}}\big(1 - F(x)\big)dx$$

  On a donc, avec la question 13.(c) :

$$\mathrm{E}(Z_n) = n\int_0^\alpha x\ g_{n-1}(x)\big(1 - F(x)\big)dx = \mathrm{E}(B_n)$$

  Et en conclusion, avec la question 14. :

$$\mathrm{E}(B_n) = \mathrm{E}(B'_n).$$