Exercice

1. (a) A est symétrique donc diagonalisable.

   (b) On résout $AX = X$:

$$\begin{cases} -x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z &= 0 \quad L1 \\ \frac{1}{2}x-y+\frac{1}{2}z &= 0 \quad L2 \\ \frac{1}{2}x+\frac{1}{2}y-z &= 0 \quad L3 \end{cases} \iff \begin{cases} -x+\frac{1}{2}y+\frac{1}{2}z &= 0 \\ -\frac{3}{2}y+\frac{3}{2}z &= 0 \quad L2 \leftarrow 2L2+L1 \\ \frac{3}{2}y-\frac{3}{2}z &= 0 \quad L3 \leftarrow L3-L2 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x = z \\ x = z \\ y = z \end{cases}$$

On en déduit que 1 est une valeur propre de A et que $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé.

   (c) Soit λ un réel. Appliquons la méthode de Gauss à la matrice :

$$A-\lambda I = \begin{pmatrix} -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix}$$

On permute $L1$ et $L2$:

$$A-\lambda I \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ -\lambda & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \end{pmatrix}$$

On remplace $L2$ par $L2+2\lambda L1$ et $L3$ par $L3-L1$:

$$A-\lambda I \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\lambda & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2}-2\lambda^2 & \frac{1}{2}+\lambda \\ 0 & \frac{1}{2}+\lambda & -\lambda-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

On permute les colonnes 2 et 3 :

$$A-\lambda I \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \\ 0 & \frac{1}{2}+\lambda & \frac{1}{2}-2\lambda^2 \\ 0 & -\lambda-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}+\lambda \end{pmatrix}$$

On remplace $L3$ par $L2+L3$:

$$A-\lambda I \sim \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\lambda \\ 0 & \frac{1}{2}+\lambda & \frac{1}{2}-2\lambda^2 \\ 0 & 0 & -2\lambda^2+\lambda+1 \end{pmatrix}$$

L'équation $-2x^2+x+1=0$ a pour solutions 1 et $-\frac{1}{2}$ donc $A-\lambda$ est non inversible si et seulement si $\lambda \in \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$. Donc les valeurs propres de A sont 1 et $-\frac{1}{2}$.

On pose $X = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$.

$$AX = -\frac{1}{2}X \iff x+y+z=0$$

Donc les vecteurs $\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A associés à $-\frac{1}{2}$.

Montrons que la famille $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ est une famille libre. Pour cela, il suffit de montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\1 & 1 & 0\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}$ est inversible. En remplaçant $L2$ par $L2 - L1$ et $L3$ par $L3 - L1$:

$$P \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 2 & 1\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}$$

En remplaçant $L3$ par $L3 - \frac{1}{2}L2$:

$$P \sim \begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

Donc P est inversible.

2. Soit I la matrice identité. Les coefficients de I sont tous positifs et $IX_0 = X_0$ donc $I \in S_n$ mais $-I \notin S_n$. Donc S_n n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
3. (a) Soit $(A, B) \in S_n^2$. On pose $C = AB$. On note a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} les coefficients des matrices A, B, C.

   Comme $AX_0 = BX_0 = X_0$, on a :

   $$CX_0 = ABX_0 = AX_0 = X_0$$

   Soit $(i, j) \in (\{1, \dots, n\})^2$.

   $$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}$$

   Comme pour tout $k \in \{1, \dots, n\}$, a_{ik} et b_{kj} sont positifs, c_{ij} est positif.
   Donc $C \in S_n$.
4. (a) Soit $W = \begin{pmatrix}w_1\\ \vdots\\ w_n\end{pmatrix}$ un vecteur propre associé à la valeur propre λ.

   On considère $M = \max(|w_1|, |w_2|, \dots, |w_n|)$ et on note k un entier tel que $M = |w_k|$. Comme $W \neq 0$, on a $M \neq 0$ et $w_k \neq 0$. On peut donc poser :

   $$V = \frac{1}{w_k}W$$

   Le vecteur V est un vecteur propre de A associé à λ. Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

   $$|v_i| = \left|\frac{w_i}{w_k}\right| = \frac{|w_i|}{M} \leqslant \frac{M}{M} = 1$$

   Et par définition de k et V : $v_k = 1$.

(b) Comme $AX_0 = X_0$, on remarque que pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$$

Par ailleurs : $AV = \lambda V$ donc :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} v_j = \lambda v_i$$

En particulier, pour $i = k$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} v_j = \lambda$$

Donc, en appliquant l'inégalité triangulaire (les a_{kj} sont positifs) :

$$|\lambda| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{kj} |v_j| \leqslant \sum_{j=1}^{n} a_{kj} = 1$$

Notons I_k l'ensemble des entiers de 1 à n privé de l'entier k. Donc :

$$\sum_{j \in I_k} a_{kj} = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} - a_{kk} = 1 - a_{kk}$$

Par ailleurs :

$$\lambda - a_{kk} = \sum_{j \in I_k} a_{kj} v_j$$

On applique l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda - a_{kk}| \leqslant \sum_{j \in I_k} a_{kj} |v_j| \leqslant \sum_{j \in I_k} a_{kj} = 1 - a_{kk}$$

(c) D'après la question précédente :

$$-(1 - a_{kk}) \leqslant \lambda - a_{kk} \leqslant 1 - a_{kk}$$

Donc :

$$-1 + 2a_{kk} \leqslant \lambda \leqslant 1$$

Si tous les coefficients diagonaux de A sont strictement supérieurs à $\frac{1}{2}$, on a $\lambda > 0$. Donc 0 ne peut pas être une valeur propre de A donc A est inversible.

Problème

1. (a) Si f est une fonction impaire continue sur $[-h, h]$:

$$\int_{-h}^{h} f(t)dt = 0.$$

On obtient immédiatement :

$$\begin{array}{rcl}
\int_{-h}^{h} dt & = & 2h \\
\int_{-h}^{h} (x+t)dt & = & x\int_{-h}^{h} dt + \int_{-h}^{h} tdt = 2xh \\
\int_{-h}^{h} t(x+t)dt & = & x\int_{-h}^{h} tdt + \int_{-h}^{h} t^2dt = \frac{2}{3}h^3 \\
\int_{-h}^{h} (x+t)^2dt & = & x^2\int_{-h}^{h} dt + 2x\int_{-h}^{h} tdt + \int_{-h}^{h} t^2dt = 2x^2h + \frac{2}{3}h^3
\end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{rcl}
\int_{-h}^{h} t(x+t)^2dt & = & x^2\int_{-h}^{h} tdt + 2x\int_{-h}^{h} t^2dt + \int_{-h}^{h} t^3dt \\
 & = & 2x\left[\frac{1}{3}t^3\right]_{-h}^{h} \\
 & = & \frac{4h^3x}{3}
\end{array}$$

(c) On fait le changement de variable $u = \frac{t}{h}$. Donc $t = hu$ et $dt = hdu$.

$$\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} f(x+t)dt = \frac{1}{2h}\int_{-1}^{1} f(x+hu)hdu = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} f(x+hu)du$$

De même :

$$\frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} tf(x+t)dt = \frac{3}{2h^3}\int_{-1}^{1} huf(x+hu)hdu = \frac{3}{2h}\int_{-1}^{1} uf(x+hu)du$$

2. (a) Si k est pair, $(-1)^k = 1$ donc $h^k(1-(-1)^k) = 0$. Si k est impair, $(-1)^k = -1$ donc $h^k(1-(-1)^k) = 2h^k$.

(b)

$$S_0(h) = \frac{1}{2}\left[h^n\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_{-1}^{1} = \frac{h^n}{2(n+1)}(1-(-1)^{n+1})$$

$$G_0(h) = \frac{3}{2h}\left[h^n\frac{t^{n+2}}{n+2}\right]_{-1}^{1} = \frac{3h^{n-1}}{2(n+2)}(1-(-1)^{n+2})$$

(c)

$$\int_{-h}^{h} (x+t)^n dt = \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)x^{n-k}\int_{-h}^{h} t^k dt = \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)x^{n-k}\frac{h^{k+1}(1-(-1)^{k+1})}{k+1}$$

Les termes d'indice impair de la somme sont nuls donc :

$$\int_{-h}^{h}(x+t)^n dt = 2x^n h + \sum_{k=2}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\frac{(1-(-1)^{k+1})x^{n-k}}{k+1}h^{k+1}$$

En divisant par $2h$:

$$S_x(h) = x^n + h^2\sum_{k=2}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\frac{(1-(-1)^{k+1})x^{n-k}}{2(k+1)}h^{k-2}$$

De même :

$$\int_{-h}^{h}t(x+t)^n dt = \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)x^{n-k}\int_{-h}^{h}t^{k+1}dt = \sum_{k=0}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)x^{n-k}\frac{h^{k+2}(1-(-1)^{k+2})}{k+2}$$

Les termes d'indice pair de la somme sont nuls donc :

$$\int_{-h}^{h}t(x+t)^n dt = \frac{2}{3}nx^{n-1}h^3 + \sum_{k=3}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\frac{(1-(-1)^{k+2})x^{n-k}}{k+2}h^{k+2}$$

En multipliant par $\frac{3}{2}h^3$:

$$G_x(h) = nx^{n-1} + 3h^2\sum_{k=3}^{n}\left(\begin{array}{c} n \\ k \end{array}\right)\frac{(1-(-1)^{k+2})x^{n-k}}{2(k+2)}h^{k-3}$$

Comme A_x et B_x sont continues en 0, $\lim_{h\to 0} h^2 A_x(h) = \lim_{h\to 0} h^2 B_x(h) = 0$. On en déduit que :

$$\lim_{h\to 0} S_x(h) = x^n \;;\quad \lim_{h\to 0} G_x(h) = nx^{n-1}$$

3. (a)

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x} = 1 \;;\; \lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x} = -1 \;;$$

Donc f n'est pas dérivable en 0.

(b) La fonction f est paire et $t\mapsto tf(t)$ est impaire, donc :

$$S_0(h) = \frac{1}{h}\int_0^h tdt = \frac{1}{2}h \;;\quad G_0(h) = 0$$

Donc $s(0) = g(0) = 0$.

4. (a)

$$S_x(h) = \frac{F(x+h) - F(x-h)}{2h}$$

(b) La fonction F est dérivable en x et $F'(x) = f(x)$, donc pour tout $h \in [-\alpha, +\alpha]$:

$$F(x+h) = F(x) + hf(x) + o(h) \quad \text{et} \quad F(x-h) = F(x) - hf(x) + o(h)$$

On remplace dans l'expression de $S_x(h)$:

$$S_x(h) = \frac{2hf(x) + o(h)}{2h}$$

On en déduit que $\lim_{h\to 0} S_x(h) = f(x)$. Donc $s(x) = f(x)$.

5. (a) On considère la fonction v_x définie par $v_x(0) = 0$ et pour tout $t \in [-\alpha, 0[\cup]0, \alpha]$:

$$v_x(t) = \frac{f(x+t) - f(x) - tf'(x)}{t}$$

Cette fonction est continue sur $[-\alpha, 0[\cup]0, \alpha]$ car f est continue sur $[x-\alpha, x+\alpha]$ et comme f est dérivable en x :

$$f(x+t) = f(x) + tf'(x) + o(t)$$

Donc $v_x(t) = \frac{o(t)}{t} = o(1)$. Donc v_x est continue en 0 donc sur $[-\alpha, \alpha]$ et :

$$f(x+t) = f(x) + tf'(x) + tv_x(t)$$

(b) Comme $\lim_{x\to 0} v_x(t) = 0$, il existe $\delta \in [0, \alpha]$ tel que que pour tout $t \in [-\delta, \delta]$,

$$|v_x(t)| \leqslant \varepsilon$$

Pour tout $h \in [0, \delta]$:

$$\left|\int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)dt\right| \leqslant \int_{-h}^{h} t^2 |v_x(t)|\, dt \leqslant \varepsilon \int_{-h}^{h} t^2 dt = \frac{2h^3}{3}\varepsilon$$

Donc :

$$\frac{3}{2h^3}\left|\int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)dt\right| \leqslant \varepsilon$$

(c) Avec les notations de la question précédente :

$$\begin{aligned}
G_x(h) &= \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} tf(x) + t^2 f'(x) + t^2 v_x(t))dt \\
&= \frac{3}{2h^3}\left(f(x)\int_{-h}^{h} tdt + f'(x)\int_{-h}^{h} t^2 dt + \int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)dt\right) \\
&= f'(x) + \frac{3}{2h^3}\int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)dt
\end{aligned}$$

Donc :

$$|G_x(h) - f'(x)| = \frac{3}{2h^3}\left|\int_{-h}^{h} t^2 v_x(t)dt\right| \leqslant \varepsilon$$

Donc G_x admet une limite en 0 et cette limite est $f'(x)$. Donc $g(x) = f'(x)$.

6. (a) On calcule :

$$\int_{-h}^{h} (b+at)^2 dt = \int_{-h}^{h} b^2 + 2abt + a^2t^2 dt = 2hb^2 + 2a^2\frac{h^3}{3}$$

Comme :

$$(f(x+t) - (b+at))^2 = (f(x+t))^2 - 2(b+at)f(x+t) + (b+at)^2$$

On a bien :

$$\varphi(a,b) = \int_{-h}^{h} (f(x+t))^2 dt - 2\int_{-h}^{h} (b+at)f(x+t)dt + 2hb^2 + 2a^2\frac{h^3}{3}$$

Ce qui donne bien la formule demandée.

(b) La fonction φ s'écrit :

$$\varphi(a,b) = k_1 - 2k_2a - 2k_3b + k_4a^2 + k_5b^2$$

La fonction φ est une combinaison linéaire de 5 fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ donc φ est de classe $\mathcal{C}^2$.

$$\frac{\partial\varphi}{\partial a}(a,b) = -2k_2 + 2k_4a \ ; \quad \frac{\partial\varphi}{\partial b}(a,b) = -2k_3 + 2k_5a.$$

Donc φ admet un unique point critique (a^*, b^*) avec :

$$a^* = \frac{k_2}{k_4} = G_x(h) \ ; \quad b^* = \frac{k_3}{k_5} = S_x(h)$$

7. (a)

$$E(X) = \frac{1}{2}\ ; V(X) = \frac{1}{4}\ ; E(hX) = \frac{h}{2}\ ; V(hX) = \frac{h^2}{4}$$

(b) On applique le théorème de transfert :

$$E(f(hX+x)) = f(h+x)P(X=1) + f(x)P(X=0) = \frac{f(x+h)+f(x)}{2}$$

De même :

$$E((f(hX+x))^2) = \frac{(f(x+h))^2 + (f(x))^2}{2}$$

Donc :

$$\begin{aligned} V(f(hX+x)) &= \frac{(f(x+h))^2+(f(x))^2}{2} - \left(\frac{f(x+h)+f(x)}{2}\right)^2 \\ &= \frac{(f(x+h)-f(x))^2}{4} \end{aligned}$$

De plus :

$$E(hXf(hX+x)) = \frac{1}{2}hf(h+x)$$

Donc :

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(hX, f(hX+x) &= \frac{1}{2}hf(h+x) - \frac{h}{2} \times \frac{f(x+h)+f(x)}{2} \\ &= \frac{h(f(x+h)-f(x))}{4} \end{aligned}$$

(c)

$$r_x(h) = \frac{\frac{h(f(x+h)-f(x))}{4}}{\sqrt{\frac{(f(x+h)-f(x))^2}{4} \times \frac{h^2}{4}}} = \frac{f(x+h)-f(x)}{|f(x+h)-f(x)|} = \pm 1$$

Si $f(x+h) > f(x)$, $r_x(h) = 1$; si $f(x+h) < f(x)$, $r_x(h) = -1$. Il existe donc $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $f(hX+x) = ahX + b$. $X(\Omega) = \{0,1\}$. Donc a et b vérifient $f(x+h) = ah + b$ et $f(x) = b$. On en déduit que :

$$f(hX+x) = (f(x+h) - f(x))X + f(x).$$

(d) Si $f(x+h) = f(x)$, $f(hX+x)(\Omega) = \{f(x)\}$ donc $f(hX+x) = f(x)$. La relation précédente est encore valable dans ce cas.

8. (a) La fonction :

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est une fonction densité de X. La fonction :

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ \frac{1}{2}(x+1) & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$$

est la fonction de répartition de X.

$$E(X) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} t dt = 0 \ ; \quad V(X) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} t^2 dt = \frac{1}{3}$$

(b) D'après le théorème de transfert :

$$E(f(hX+x) = \int_{-1}^{1} f(ht+x) \frac{1}{2} dt$$

Donc $E(f(hX+x) = S_x(h)$ d'après 1c. Toujours d'après le théorème de transfert :

$$E((f(hX+x)^2) = \int_{-1}^{1} (f(ht+x))^2 \frac{1}{2} dt$$

On fait le changement $u = ht$. Il vient :

$$E((f(hX+x)^2) = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} (f(u+x))^2 du$$

Donc :

$$V(f(hX+x)) = E((f(hX+x)^2) - (E(f(hX+x))^2 = \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} (f(u+x))^2 du - (S_x(h))^2$$

$$E(hXf(hX+x)) = \int_{-1}^{1} htf(ht+x) \frac{1}{2} dt = \frac{h^2}{3} \times \frac{3}{2h} \int_{-1}^{1} tf(ht+x) dt$$

Donc d'après 1c : $E(hXf(hX+x)) = \dfrac{h^2}{3} G_x(h)$. Comme $E(hX) = hE(X) = 0$, on a :

$$\text{Cov}(hX, f(hX+x)) = E(hXf(hX+x) = \frac{h^2}{3} G_x(h)$$

9. (a) Comme f est dérivable en 0 :

$$f(x) = f(0) + xf'(0) + o(x) \ ; \quad f(-x) = f(0) - xf'(0) + o(x)$$

Donc

$$0 = \frac{f(x) - f(-x)}{x} = \frac{2xf'(0) + o(x)}{x} = 2f'(0) + o(1)$$

Ce qui montre que $f'(0) = 0$. Comme f est paire, la fonction $t \mapsto tf(t)$ est impaire donc on obtient successivement $G_0(h) = 0$, $\text{Cov}(hX, f(hX)) = 0$ et $r_0(h) = 0$.

(b) $f'(t) = nt^{n-1}$. Si $n = 1$, $f'(0) = 1$ sinon $f'(0) = 0$. On reprend la question 2b :

$$\text{Cov}(hX, f(hX)) = \frac{h^2}{3} G_0(h) = \frac{h^{n+1}}{n+2}$$

Comme $S_0(h) = 0$:

$$V(f(hX)) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} t^{2n}dt = \frac{h^{2n}}{2n+1}$$

$$r_0(h) = \frac{\frac{h^{n+1}}{n+2}}{\sqrt{\frac{h^2}{3}\times\frac{h^{2n}}{2n+1}}} = \frac{\sqrt{3(2n+1)}}{n+2} \times \frac{h^{n+1}}{|h^{n+1}|}$$

Donc :

$$\lim_{h\to 0^+} r_0(h) = \frac{\sqrt{3(2n+1)}}{n+2}$$

10. (a) Dans 5d, on a montré que $\lim\limits_{h\to 0} G_x(h) = f'(x)$ donc d'après 8b :

$$\text{Cov}(hX, f(hX + x)) \sim_{h\to 0} \frac{h^2}{3} f'(x)$$

(b) $f(x) = 0$ donc $f(x + t) = tf'(x) + tv_x(t)$.

$$E(f(hX + x)) = S_x(h) = \frac{1}{2h}\left(f'(x)\int_{-h}^{h} tdt + \int_{-h}^{h} tv_x(t)dt\right) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} tv_x(t)dt$$

On remarque que : $(f(x + t))^2 = t^2((f'(x))^2 + w_x(t))$:

$$\begin{aligned}
E((f(hX + x))^2) &= \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}(f(x + t))^2dt \\
&= \frac{1}{2h}\left((f'(x))^2\int_{-h}^{h} t^2dt + \int_{-h}^{h} t^2w_x(t))^2dt\right) \\
&= \frac{h^2}{3}(f'(x))^2 + \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} t^2w_x(t))^2dt
\end{aligned}$$

(c) Soit $\varepsilon > 0$. Comme v_x tend vers 0 en 0, il existe $\delta \in [0, \alpha]$, tel que pour tout $t \in [0, \delta]$:

$$|v_x(t)| \leqslant \varepsilon$$

Soit $h \in [0, \delta]$.

$$\left|\int_{-h}^{h} tv_x(t)dt\right| \leqslant \int_{-h}^{h} t\,|v_x(t)|\,dt \leqslant \varepsilon\int_{-h}^{h} tdt = \frac{h^2\varepsilon}{2}$$

Donc

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\int_{-h}^{h} tv_x(t)dt = 0$$

De même, comme w_x tend vers 0 en 0, il existe $\delta \in [0, \alpha]$, tel que pour tout $t \in [0, \delta]$:

$$|w_x(t)| \leqslant \varepsilon$$

Soit $h \in [0, \delta]$.

$$\left|\int_{-h}^{h} t^2 w_x(t)dt\right| \leqslant \int_{-h}^{h} t^2 \left|w_x(t)\right| dt \leqslant \varepsilon \int_{-h}^{h} t^2 dt = \frac{h^3\varepsilon}{3}$$

Donc

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h^3} \int_{-h}^{h} t^2 w_x(t)dt = 0$$

(d) D'après 10c :

$$E(f(hX+x)) = o(h)\ ; \quad E((f(hX+x)^2) = \frac{h^2}{3}(f'(x))^2 + o(h^2)$$

Donc :

$$V(f(hX+x)) = \frac{h^2}{3}(f'(x))^2 + o(h^2)$$

Ce qui montre que :

$$V(f(hX+x)) \sim_{h\to 0^+} \frac{h^2}{3}(f'(x))^2$$

(e)

$$r_x(h) \sim_{h\to 0^+} \frac{\frac{h^2}{3} f'(x)}{\sqrt{\frac{h^2}{3} \times \frac{h^2}{3}(f'(x))^2}}$$

Si $f'(x) > 0$ alors : $\lim\limits_{h\to 0^+} r_x(h) = 1$. Si $f'(x) < 0$ alors : $\lim\limits_{h\to 0^+} r_x(h) = -1$.

11. Soit $\tilde{f}$ la fonction $t \mapsto f(t) - f(x)$. On a $\tilde{f}(x) = 0$ et $\tilde{f}'(x) = f'(x) \neq 0$.

$$V(\tilde{f}(hX+x)) = V(f(hX+x) - f(x)) = V(f(hX+x))$$

$$\mathrm{Cov}(hX, \tilde{f}(hX+x)) = \mathrm{Cov}(hX, f(hX+x) - f(x)) = \mathrm{Cov}(hX, f(hX+x))$$

Donc $\tilde{r}_x(h)$ le coefficient de corrélation linéaire entre hX et $\tilde{f}(hX+x)$ est $r_x(h)$.
Donc, si $f'(x) > 0$ alors $\lim\limits_{h\to 0^+} r_x(h) = 1$; si $f'(x) < 0$ alors $\lim\limits_{h\to 0^+} r_x(h) = -1$.

12. (a)

$$\begin{array}{lll} P_0(t) = 1, & P_0'(t) = 0, & P_0''(t) = 0. \\ P_1(t) = \frac{1}{2}(t^2-1), & P_1'(t) = t, & P_1''(t) = 0 \\ P_2(t) = \frac{1}{8}(t^2-1)^2, & P_2'(t) = \frac{1}{2}t(t^2-1), & P_2''(t) = \frac{1}{2}(3t^2-1) \end{array}$$

(b) Le degré de P_n est $2n$, celui de $P_n^{(k)}$ est $2n-k$ si $k \leqslant 2n$ et si $k > 2n$, $P_n^{(k)}$ est nul donc son degré est $-\infty$.

(c) Il existe un polynôme Q de degré au plus $2n-1$ tel que pour tout t réel :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!}\left(t^{2n} + Q(t)\right)$$

Donc :

$$P_n^{(n)}(t) = \frac{2n(2n-1)\times\dots(n+1)}{2^n n!} t^n + Q^{(n)}(t)$$

Le coefficient dominant de $P_n^{(n)}$ est :

$$a_n = \frac{2n(2n-1)\times\ldots(n+1)}{2^n n!} = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2}$$

Le polynôme $P_n^{(2n)}$ est un polynôme constant :

$$P_n^{(2n)}(t) = \frac{(2n)!}{2^n n!} + Q^{(2n)}(t) = \frac{(2n)!}{2^n n!}$$

(d) Montrons par récurrence que pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$, il existe un polynôme tel que pour tout t réel :

$$P_n^{(k)}(t) = (t^2-1)^{n-k} T_k(t)$$

Pour $k = 0$, avec $T_0 \ : t \mapsto \frac{1}{2^n n!}$, on a : $P_n(t) = (t^2-1)^n T_0(t)$.
Soit $k \in \{0, \ldots, n-2\}$, supposons que pour tout t réel :

$$P_n^{(k)}(t) = (t^2-1)^{n-k} T_k(t)$$

où T_k est un polynôme. On dérive. Pour tout t réel :

$$\begin{aligned} P_n^{(k+1)}(t) &= (t^2-1)^{n-k} T_k'(t) + 2(n-k)t(t^2-1)^{n-k-1} T_k(t) \\ &= (t^2-1)^{n-(k+1)} T_{k+1}(t) \end{aligned}$$

avec $T_{k+1}(t) = (t^2-1)T_k'(t) + 2(n-k)tT_k(t)$. La fonction T_{k+1} est un polynôme. Ce qui conclut le raisonnement par récurrence.
Comme le degré de $P_n^{(k)}$ est $2n-k$ et le degré de $t \mapsto (t^2-1)^{n-k}$ est $2(n-k)$, le degré de T_k est $2n-k-2(n-k) = k$. Pour tout $k \in \{0, \ldots, n-1\}$:

$$P_n^{(k)}(1) = P_n^{(k)}(-1) = 0$$

(e) On montre par récurrence que pour tout $k \in \{0, \ldots n\}$:

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)\ldots(n+k)} \int_{-1}^{1} (1+t)^{n+k}(1-t)^{n-k} dt$$

L'égalité est évidente pour $k = 0$. Soit $k \in \{0, \ldots n-1\}$ et supposons que :

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)\ldots(n+k)} \int_{-1}^{1} (1+t)^{n+k}(1-t)^{n-k} dt$$

On intègre par parties :

$$\begin{aligned} \int_{-1}^{1} (1+t)^{n+k}(1-t)^{n-k} dt &= \left[\frac{(1+t)^{n+k+1}}{n+k+1}(1-t)^{n-k}\right]_{-1}^{1} \\ &\quad + \frac{n-k}{n+k+1} \int_{-1}^{1} (1+t)^{n+k+1}(1-t)^{n-k-1} dt \\ &= \frac{n-k}{n+k+1} \int_{-1}^{1} (1+t)^{n+k+1}(1-t)^{n-(k+1)} dt \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\int_{-1}^{1} (1-t^2)^n dt = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{(n+1)\ldots(n+k)} \times \frac{n-k}{n+k+1} \int_{-1}^{1} (1+t)^{n+k+1}(1-t)^{n-(k+1)} dt.$$

Ce qui termine le raisonnement par récurrence. En particulier pour $n = k$:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt &= \frac{n!}{(n+1)\dots(2n)}\int_{-1}^{1}(1+t)^{2n}dt\\ &= \frac{2^{2n+1}n!}{(n+1)\dots(2n+1)}\\ &= \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}\end{aligned}$$

13. (a) On intègre par parties :

$$\int_{-1}^{1} R(t)P_n^{(n)}(t)dt = \Big[R(t)P_n^{(n-1)}(t)\Big]_{-1}^{1} - \int_{-1}^{1} R'(t)P_n^{(n-1)}(t)dt$$

Comme $P_n^{(n-1)}(-1) = P_n^{(n-1)}(1) = 0$, on en déduit l'égalité demandée.

(b) On montre par récurrence que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$\int_{-1}^{1} R(t)P_n^{(n)}(t)dt = (-1)^k \int_{-1}^{1} R^{(k)}(t)P_n^{(n-k)}(t)dt$$

Ce qui montre, en particulier, l'égalité demandée.

(c) Si le degré de R est strictement inférieur à n, $R^{(n)}$ est le polynôme nul donc :

$$\int_{-1}^{1} R(t)P_n^{(n)}(t)dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} R^{(n)}(t)P_n(t)dt = 0$$

(d) On appliqe 13b avec $R = P_n^{(n)}$:

$$\int_{-1}^{1}(P_n^{(n)}(t))^2dt = (-1)^n \int_{-1}^{1} P_n^{(2n)}(t)P_n(t)dt$$

D'après 12c :

$$\int_{-1}^{1}(P_n^{(n)}(t))^2dt = (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n!}\int_{-1}^{1} P_n(t)dt$$

D'après 12e :

$$\int_{-1}^{1} P_n(t)dt = \frac{(-1)^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt = \frac{(-1)^n}{2^n n!} \times \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!} = (-1)^n \frac{2^{n+1} \times n!}{(2n+1)!}$$

On en déduit :

$$\int_{-1}^{1}(P_n^{(n)}(t))^2dt = \frac{(2n)!}{2^n n!} \times \frac{2^{n+1} \times n!}{(2n+1)!} = \frac{2}{2n+1}$$

14. (a)

$$\frac{1!}{2^1 h^0 0!}\int_{-1}^{1} f(x+ht)P_0(t)dt = S_x(h)$$

Donc $L_0(x) = f(x)$.

$$\frac{3!}{2^2 h^1 1!}\int_{-1}^{1} f(x+ht)P_1'(t)dt = G_x(h)$$

Donc $L_1(x) = f'(x)$.

(b) La formule établie en 13b, reste valable si R est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$. On applique donc cette formule avec $R\ : t \mapsto f(x+ht)$.

$$R^{(n)}(t) = h^n f^{(n)}(x+ht)$$

Donc :

$$\int_{-1}^{1} f(x+ht)P_n^{(n)}(t)dt = \frac{h^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x+ht) \times (1-t^2)^n dt$$

(c)

$$\left|\int_{-1}^{1}\left(f^{(n)}(x+ht) - f^{(n)}(x)\right)(1-t^2)^n dt\right| \leqslant 2^n \int_{-1}^{1}\left|f^{(n)}(x+ht) - f^{(n)}(x)\right| dt$$

Par changement de variable $u = ht$:

$$\int_{-1}^{1}\left|f^{(n)}(x+ht) - f^{(n)}(x)\right| dt = \frac{1}{h}\int_{-h}^{h}\left|f^{(n)}(x+u) - f^{(n)}(x)\right| du$$

Il existe une fonction v_x continue sur $[-\alpha, \alpha]$ telle que, pour tout $t \in [-\alpha, \alpha]$:

$$f^{(n)}(x+t) = f^{(n)}(x) + tf^{(n+1)}(x) + tv_x(t)$$

Donc :

$$\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}\left|f^{(n)}(x+t) - f^{(n)}(x)\right| dt \leqslant \frac{1}{h}\int_{-h}^{h}|t|\left|f^{(n+1)}(x) + v_x(t)\right| dt$$

La fonction $t \mapsto |f^{(n+1)}(x) + v_x(t)|$ est continue sur $[-\alpha, \alpha]$ donc bornée. Soit K un majorant de cette fonction.

$$\frac{1}{h}\int_{-h}^{h}\left|f^{(n)}(x+t) - f^{(n)}(x)\right| dt \leqslant \frac{1}{h}K\int_{-h}^{h}|t|dt = Kh$$

Ce qui montre que :

$$\left|\int_{-1}^{1}\left(f^{(n)}(x+ht) - f^{(n)}(x)\right)(1-t^2)^n dt\right| \leqslant 2^n Kh$$

D'après le théorème des encadrements :

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\left(f^{(n)}(x+ht) - f^{(n)}(x)\right)(1-t^2)^n dt = 0$$

On en déduit aussi que :

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x+ht)(1-t^2)^n dt = f^{(n)}(x)\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}f^{(n)}(x)$$

D'après 14b :

$$\frac{(2n+1)!}{2^{n+1}h^n n!}\int_{-1}^{1} f(x+ht)P_n^{(n)}(t)dt = \frac{(2n+1)!}{2^{2n+1}(n!)^2}\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x+ht)(1-t^2)^n dt$$

Donc $L_n(x)$ existe et $L_n(x) = f^{(n)}(x)$.

15. (a) On remarque que pour tout $k \in \mathbb{N}$, le degré de $P_k^{(k)}$ est k. Comme la dimension de $R_n[X]$ est $n+1$, il suffit de montrer que la famille $(P_k^{(k)})_{k\in\{0,\dots,n\}}$ est libre. On raisonne par récurrence sur n.

Initialisation : P_0 est non nul donc il forme une famille libre. Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que $(P_k^{(k)})_{k\in\{0,\dots,n\}}$ est libre. Soit $(a_0, a_1, \dots, a_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+2}$ tel que :

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k P_k^{(k)} = 0$$

En dérivant $n+1$ fois cette égalité, on a :

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k P_k^{(n+1+k)} = 0$$

Pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $P_k^{(n+1+k)} = 0$, donc $a_{n+1}P_{n+1}^{(2n+2)} = 0$. Comme $P_{n+1}^{(2n+2)} \neq 0$, on a $a_{n+1} = 0$. Donc :

$$\sum_{k=0}^{n} a_k P_k^{(k)} = 0$$

D'après l'hypothèse de récurrence $a_0 = a_1 = \cdots a_n = 0$.

(b)

$$\int_{-1}^{1} (Q_n(t))^2 dt = \sum_{k=0}^{n} \left(a_k^2 \int_{-1}^{1} (P_k^{(k)}(t))^2 dt \right) + 2 \sum_{0\leqslant i<j\leqslant n} \left(a_i a_j \int_{-1}^{1} P_i^{(i)}(t) \times P_j^{(j)}(t) dt \right)$$

D'après 13c, si $i < j$ (on prend $n = j$ et $R = P_i^{(i)}$) :

$$\int_{-1}^{1} P_i^{(i)}(t) \times P_j^{(j)}(t) dt = 0$$

D'après 13d :

$$\int_{-1}^{1} (P_k^{(k)}(t))^2 dt = \frac{2}{2k+1}$$

Donc :

$$\int_{-1}^{1} (Q_n(t))^2 dt = \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} a_k^2$$

(c) On développe :

$$\Phi_n(Q_n) = \int_{-1}^{1} (f(x+\alpha t))^2 dt - 2\int_{-1}^{1} f(x+\alpha t) Q_n(t) dt + \int_{-1}^{1} (Q_n(t))^2 dt$$

On exprime le deuxième terme en fonction des y_k :

$$\int_{-1}^{1} f(x+\alpha t) Q_n(t) dt = \sum_{k=0}^{n} a_k \int_{-1}^{1} f(x+\alpha t) P_k^{(k)}(t) dt = \sum_{k=0}^{n} a_k y_k$$

Il vient :
$$\Phi_n(Q_n) = \int_{-1}^{1} (f(x+\alpha t))^2 dt - 2\sum_{k=0}^{n} a_k y_k + \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1} a_k^2$$

On remarque que pour tout $k \in \{0, \dots n\}$:

$$-2a_k y_k + \frac{2}{2k+1} a_k^2 = \frac{2}{2k+1}\left(a_k - \frac{2k+1}{2} y_k\right)^2 - \frac{2k+1}{2} y_k^2$$

Donc :

$$\Phi_n(Q_n) = \int_{-1}^{1} (f(x+\alpha t))^2 dt + \sum_{k=0}^{n} \frac{2}{2k+1}\left(a_k - \frac{2k+1}{2} y_k\right)^2 - \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2} y_k^2$$

(d) $\forall Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$:
$$\Phi_n(Q_n) \geqslant \int_{-1}^{1} (f(x+\alpha t))^2 dt - \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2} y_k^2$$

Il y a égalité si, et seulement si, pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$:

$$a_k = \frac{2k+1}{2} y_k = a_k^*$$