EXERCICE

Soit A la matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Justifier que la matrice A est diagonalisable.

b) Vérifier que 1 est une valeur propre de A et déterminer un vecteur-colonne propre associé.

c) Calculer les valeurs propres de A et déterminer une base de $\mathbb{R}^3$ formée de vecteurs propres de A.

Dans la suite de l'exercice, n est un entier supérieur ou égal à 2. On considère l'ensemble $\mathcal{S}_n$ des matrices $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ qui vérifient les propriétés suivantes :

- pour tout (i, j) de $[\![1, n]\!]^2$, $a_{i,j} \geqslant 0$;
- A admet la valeur propre 1 et $X_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur-colonne propre associé à cette valeur propre.

2. L'ensemble $\mathcal{S}_n$, muni des lois usuelles sur les matrices, est-il un espace vectoriel ?

3. Montrer que le produit de deux matrices de $\mathcal{S}_n$ est une matrice de $\mathcal{S}_n$.

4. Soit A un élément de $\mathcal{S}_n$ et λ une valeur propre de A.

a) Montrer qu'il existe un vecteur-colonne propre $V = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ associé à la valeur propre λ, pour lequel il existe un entier k de $[\![1, n]\!]$, vérifiant $v_k = 1$ et pour tout i de $[\![1, n]\!]$, $|v_i| \leqslant 1$.

b) En déduire que l'on a : $|\lambda| \leqslant 1$ et $|\lambda - a_{k,k}| \leqslant 1 - a_{k,k}$.

5. Montrer que si les éléments diagonaux d'une matrice A de $\mathcal{S}_n$ sont tous strictement supérieurs à $1/2$, la matrice A est inversible.

PROBLÈME

Dans tout le problème :

- le réel x est fixé, α est un réel strictement positif et f est une fonction définie et continue sur $[x-\alpha, x+\alpha]$ à valeurs réelles ;
- pour tout réel h vérifiant $0 < h \leqslant \alpha$, on pose : $S_x(h) = \dfrac{1}{2h}\displaystyle\int_{-h}^{h} f(x+t)dt$ et $G_x(h) = \dfrac{3}{2h^3}\displaystyle\int_{-h}^{h} tf(x+t)dt$;
- sous réserve d'existence, on pose : $s(x) = \lim\limits_{h\to 0^+} S_x(h)$ et $g(x) = \lim\limits_{h\to 0^+} G_x(h)$.

L'objet du problème est l'étude d'une généralisation de la notion de dérivée d'une fonction à partir de fonctions définies par des intégrales.

La partie III est indépendante de la partie II, et la partie II est largement indépendante de la partie I.

Partie I. Quelques exemples. Premières propriétés

1. a) Calculer $\displaystyle\int_{-h}^{h} dt$, $\displaystyle\int_{-h}^{h} (x+t)dt$, $\displaystyle\int_{-h}^{h} t(x+t)dt$ et $\displaystyle\int_{-h}^{h} (x+t)^2dt$.

b) Montrer que $\displaystyle\int_{-h}^{h} t(x+t)^2dt = \frac{4h^3x}{3}$.

c) Établir les deux formules : $S_x(h) = \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x+ht)dt$ et $G_x(h) = \dfrac{3}{2h}\displaystyle\int_{-1}^{1} tf(x+ht)dt$.

2. *Dans cette question uniquement*, soit n un entier naturel donné et f la fonction définie par $f(t) = t^n$.

a) Soit k un entier naturel. Calculer suivant la parité de k, la valeur de $h^k(1-(-1)^k)$.

b) Calculer $S_x(h)$ et $G_x(h)$ lorsque $x = 0$.

c) À l'aide de la formule du binôme, montrer que : $S_x(h) = x^n + h^2A_x(h)$ et $G_x(h) = nx^{n-1} + h^2B_x(h)$, où A_x et B_x sont deux fonctions polynomiales en h (dont les coefficients dépendent de x).
En déduire l'existence et l'expression de $s(x)$ et $g(x)$.

3. *Dans cette question uniquement*, la fonction f est définie par $f(t) = |t|$ et on choisit $x = 0$.

a) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

b) Calculer $S_x(h)$ et $G_x(h)$ pour $x = 0$. En déduire l'existence et la valeur de $s(0)$ et $g(0)$.

Dans les questions 4 à 6, on revient au cas général.

4. a) Exprimer $S_x(h)$ à l'aide d'une primitive F de f.

b) Établir l'existence de $s(x)$ et montrer que $s(x) = f(x)$.

5. *On suppose dans cette question que f est dérivable en x de dérivée $f'(x)$.*

a) Montrer l'existence d'une fonction v_x définie et continue sur $\mathbb{R}$, vérifiant $v_x(0) = 0$ et telle que pour tout réel t on ait : $f(x+t) = f(x) + tf'(x) + tv_x(t)$.

b) En déduire l'égalité : $G_x(h) = f'(x) + \dfrac{3}{2h^3}\displaystyle\int_{-h}^{h} t^2v_x(t)dt$.

c) Soit ε un réel strictement positif. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que si $h \in]0, \delta]$, on a : $\left|\dfrac{3}{2h^3}\displaystyle\int_{-h}^{h} t^2v_x(t)dt\right| \leqslant \varepsilon$.

d) En déduire l'expression de $g(x)$ en fonction de $f'(x)$.

6. Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : pour tout couple (a, b) de $\mathbb{R}^2$, $\varphi(a,b) = \displaystyle\int_{-h}^{h} (f(x+t) - (b+at))^2\, dt$.

a) Établir la relation : $\varphi(a,b) = \displaystyle\int_{-h}^{h} (f(x+t))^2dt - 2a\int_{-h}^{h} tf(x+t)dt - 2b\int_{-h}^{h} f(x+t)dt + \frac{2h^3}{3}a^2 + 2hb^2$.

b) Montrer que φ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ et qu'elle admet un unique point critique $(a^\star, b^\star)$ que l'on exprimera en fonction de $S_x(h)$ et $G_x(h)$.

Partie II. Probabilités

Les notations sont celles de la partie I.
Les variables aléatoires qui interviennent dans cette partie sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.
On note E, V et Cov respectivement, l'espérance, la variance et la covariance.
On suppose la fonction f dérivable en x, de dérivée $f'(x)$.

Si X est une variable aléatoire définie sur $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, on s'intéresse au coefficient de corrélation linéaire $r_x(h)$ entre les variables aléatoires hX et $f(hX+x)$ dans quelques cas particuliers.

7. *Dans cette question uniquement, la variable aléatoire X suit la loi de Bernoulli de paramètre* $1/2$.

a) Rappeler la valeur de $E(X)$ et de $V(X)$. En déduire la valeur de $E(hX)$ et $V(hX)$.

b) Montrer que $E(f(hX+x)) = \dfrac{1}{2}\,(f(x+h)+f(x))$. Calculer $V(f(hX+x))$ et $\operatorname{Cov}(hX, f(hX+x))$.

c) On suppose que $f(x+h) \neq f(x)$. Calculer $r_x(h)$. En déduire l'existence d'une relation affine entre $f(hX+x)$ et hX. Expliciter cette relation en fonction de $f(x)$ et $f(x+h)$.

d) Vérifier la validité de la relation précédente lorsque $f(x+h) = f(x)$.

Dans les questions 8 à 11, la variable aléatoire X suit la loi uniforme sur l'intervalle $[-1,1]$.

On admet que la définition et les propriétés de la covariance et du coefficient de corrélation linéaire de deux variables aléatoires discrètes s'appliquent au cas de deux variables aléatoires à densité.

8. a) Rappeler les expressions d'une densité, de la fonction de répartition, de l'espérance et de la variance de X.

b) Établir les égalités suivantes : $E(f(hX+x)) = S_x(h)$,

$$V(f(hX+x)) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} (f(x+t))^2 dt - (S_x(h))^2 \text{ et } \operatorname{Cov}(hX, f(hX+x)) = \frac{h^2}{3} G_x(h)$$

9. *On suppose dans cette question que* $x = 0$.

a) Si f est une fonction paire, calculer $f'(0)$ et $r_0(h)$.

b) Soit n un entier naturel impair et f la fonction définie par $f(t) = t^n$. Calculer $f'(0)$, $r_0(h)$ et $\lim\limits_{h\to 0^+} r_0(h)$.

10. *On suppose dans cette question que $f'(x) \neq 0$ et* $f(x) = 0$.

a) Montrer que $\operatorname{Cov}(hX, f(hX+x))$ est équivalent à $\dfrac{h^2}{3} f'(x)$, lorsque h tend vers 0^+.

b) On pose : $w_x(t) = v_x^2(t) + 2f'(x)v_x(t)$, où la fonction v_x a été définie dans la question 5.a).
Établir les deux relations suivantes :

$$E(f(hX+x)) = \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} t v_x(t)dt \quad \text{et} \quad E((f(hX+x))^2) = \frac{h^2}{3}(f'(x))^2 + \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} t^2 w_x(t)dt$$

c) Montrer que $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1}{h^2}\displaystyle\int_{-h}^{h} t v_x(t)dt = 0$ et $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{1}{h^3}\displaystyle\int_{-h}^{h} t^2 w_x(t)dt = 0$.

d) En déduire un équivalent de $V(f(hX+x))$ lorsque h tend vers 0^+.

e) Calculer $\lim\limits_{h\to 0^+} r_x(h)$.

11. *On suppose dans cette question que $f'(x) \neq 0$ et* $f(x) \neq 0$. Que peut-on dire de $\lim\limits_{h\to 0^+} r_x(h)$?

Partie III. Généralisation aux dérivées d'ordre supérieur

On suppose dans cette partie que la fonction f est de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$, et on note pour tout entier naturel k, $f^{(k)}$ la dérivée k-ième de f, avec la convention $f^{(0)} = f$.
On confond tout polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ avec la fonction polynomiale associée.

Pour tout entier naturel n, on définit le polynôme P_n par : pour tout t réel, $P_n(t) = \dfrac{1}{2^n n!}(t^2-1)^n$.

12. a) Calculer $P_0(t), P_1(t), P_2(t)$, ainsi que leurs dérivées première et seconde.

b) Déterminer le degré de P_n et, pour tout entier naturel k, celui de sa dérivée k-ième $P_n^{(k)}$.

c) Déterminer le terme de plus haut degré de $P_n^{(n)}(t)$ ainsi que la valeur de $P_n^{(2n)}(t)$.

d) Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$, on peut écrire : $P_n^{(k)}(t) = (t^2-1)^{n-k}T_k(t)$, où T_k est un polynôme de degré k.
En déduire les valeurs de $P_n^{(k)}(1)$ et de $P_n^{(k)}(-1)$, pour tout k de $[\![0, n-1]\!]$.

e) Établir pour tout entier naturel n, la formule : $\displaystyle\int_{-1}^{1}(1-t^2)^n dt = \frac{2^{2n+1}(n!)^2}{(2n+1)!}$.
(on remarquera que $1-t^2 = (1-t)(1+t)$)

13. Soit R un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ et n un entier de $\mathbb{N}^*$.
a) Montrer que $\displaystyle\int_{-1}^{1} R(t)P_n^{(n)}(t)dt = -\int_{-1}^{1} R'(t)P_n^{(n-1)}(t)dt$.

b) En déduire l'égalité : $\displaystyle\int_{-1}^{1} R(t)P_n^{(n)}(t)dt = (-1)^n\int_{-1}^{1} R^{(n)}(t)P_n(t)dt$.

c) On suppose que R est de degré strictement inférieur à n. Calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} R(t)P_n^{(n)}(t)dt$.

d) En choisissant un polynôme R particulier, calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} (P_n^{(n)}(t))^2 dt$.

14. On pose, pour tout entier naturel n et sous réserve d'existence :

$$L_n(x) = \lim_{h\to 0^+} \frac{(2n+1)!}{2^{n+1}h^n n!}\int_{-1}^{1} f(x+ht)P_n^{(n)}(t)dt$$

a) À l'aide des questions 4 et 5, vérifier que $L_0(x) = f(x)$ et $L_1(x) = f'(x)$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a : $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x+ht)P_n^{(n)}(t)dt = \frac{h^n}{2^n n!}\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x+ht)(1-t^2)^n dt$.

c) En appliquant le résultat de la question 5.a) à la fonction $f^{(n)}$, montrer que pour tout entier naturel n, on a :

$$\lim_{h\to 0^+}\int_{-1}^{1}\left(f^{(n)}(x+ht) - f^{(n)}(x)\right)(1-t^2)^n dt = 0$$

En déduire l'existence et l'expression de $L_n(x)$.

15. On rappelle que α est le réel défini dans le préambule du problème. Soit n un entier supérieur ou égal à 1 et Q_n un polynôme de degré inférieur ou égal à n. On pose : $\Phi_n(Q_n) = \displaystyle\int_{-1}^{1}\left(f(x+\alpha t) - Q_n(t)\right)^2 dt$.

a) Montrer que la famille $(P_0, P_1', P_2'', \ldots, P_n^{(n)})$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$, espace vectoriel des polynômes de degré inférieur ou égal à n.

La fonction polynomiale $Q_n(t)$ s'écrit alors dans cette base : $Q_n(t) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k P_k^{(k)}(t)$.

b) En utilisant la question 13, établir l'égalité : $\displaystyle\int_{-1}^{1}(Q_n(t))^2 dt = \sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}a_k^2$.

c) On pose, pour tout k de $[\![0, n]\!]$: $y_k = \displaystyle\int_{-1}^{1} f(x+\alpha t)P_k^{(k)}(t)dt$.

Montrer que $\Phi_n(Q_n) = \displaystyle\int_{-1}^{1}(f(x+\alpha t))^2 dt + \sum_{k=0}^{n}\frac{2}{2k+1}\left(a_k - \frac{2k+1}{2}y_k\right)^2 - \sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{2}y_k^2$.

d) Pour quel polynôme $Q_n^\star$, la quantité $\Phi_n(Q_n)$ est-elle minimale ? On exprimera pour tout k de $[\![0, n]\!]$, le coefficient $a_k^\star$ de $Q_n^\star$ en fonction de k et de y_k.