ESSEC II 2023

On s'intéresse dans ce problème aux processus de Markov finis homogènes à temps continu et on étudie deux exemples de modélisation en lien avec les crédits bancaires.

Le problème comporte quatre parties. Les parties 2 et 3 sont indépendantes de la partie 4.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geqslant 2$. On considère, dans la suite du problème, une famille de variables aléatoires X_t, pour $t \in \mathbb{R}^+$, sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, vérifiant les propriétés suivantes :

(H_1) Pour tout $t \geqslant 0$, $X_t(\Omega) = \{1, \dots, n\}$.

(H_2) Pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et $t_1 < t_2 < \cdots < t_r$ des réels positifs, $i_1, \dots, i_{r+1}$ des éléments de $\{1, \dots, n\}$ et s un réel positif, si $\mathbb{P}([X_{t_1} = i_1] \cap \cdots \cap [X_{t_r} = i_r]) \neq 0$,

$$\mathbb{P}_{[X_{t_1}=i_1]\cap\cdots\cap[X_{t_r}=i_r]}([X_{t_r+s} = i_{r+1}]) = \mathbb{P}_{[X_{t_r}=i_r]}([X_{t_r+s} = i_{r+1}])$$

(H_3) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, la fonction $f_i : t \mapsto \mathbb{P}([X_t = i])$ est définie, dérivable sur $\mathbb{R}^+$ et n'est pas la fonction nulle. On note S_i l'ensemble des réels positifs t tels que $f_i(t) \neq 0$.

(H_4) Pour tout $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$, $i \neq j$ et $h \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = j])$ est constante sur son ensemble de définition S_i et il existe un réel positif que l'on note $\alpha_{i,j}$, tel que, si $t \in S_i$ et $h \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = j]) = \alpha_{i,j}h + \underset{h\to 0}{o}(h)$$

(H_5) Pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$ et $h \geqslant 0$, la fonction $t \mapsto \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = i])$ est constante sur son ensemble de définition S_i et il existe un réel négatif que l'on note $\alpha_{i,i}$, tel que, si $t \in S_i$ et $h \in \mathbb{R}^+$,

$$\mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = i]) = 1 + \alpha_{i,i}h + \underset{h\to 0}{o}(h)$$

Commentaire

Le processus de Markov fini homogène à temps continu présenté ci-dessus est un analogue *continu* des chaînes de Markov homogènes étudiées en cours (qui sont des processus *discrets*).
La propriété (H_1) veut simplement dire que le processus est fini à n états (on a étudié en cours des chaînes de Markov finies à r états).
La propriété (H_2) est l'analogue de la « propriété de Markov », que l'on retrouve en prenant $t_k = k$.
Le fait que les fonctions $t \mapsto \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = j])$ et $t \mapsto \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = i])$ soient constantes dans les propriétés (H_4) et (H_5) est un analogue de la propriété d'homogénéité, que l'on retrouve avec $h = 1$ et t un entier.

Partie 1 - Matrice génératrice et système différentiel associés

On note L_t la matrice ligne d'ordre n, $\big(\mathbb{P}([X_t = 1]) \ldots\ldots \mathbb{P}([X_t = n])\big) = \big(f_1(t) \ldots\ldots f_n(t)\big)$ et on note G la matrice carrée d'ordre n dont les coefficients sont les $\alpha_{i,j}$, appelée **matrice génératrice du processus**.

On note aussi pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $L'_t = \big(f'_1(t) \ldots\ldots f'_n(t)\big)$.

L'objectif des trois premières questions est d'établir que pour tout $t \geqslant 0$, $L'_t = L_t G$.

1. Montrer que, pour tous $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $(t, h) \in (\mathbb{R}^+)^2$,

$$\mathbb{P}([X_{t+h} = j]) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i])$$

Démonstration. Soient $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $(t, h) \in (\mathbb{R}^+)^2$. D'après (H_1), $X_t(\Omega) = \{1, \ldots, n\}$ donc la famille $([X_t = i])_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements. D'après la formule des probabilités totales :

$$\boxed{\mathbb{P}([X_{t+h} = j]) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i]).}$$

□

2. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, $t \in S_i$ et $h \in \mathbb{R}^+$, justifier que $\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = j]) = 1$. En déduire que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ et $h \in \mathbb{R}^+$, on a l'égalité :

$$1 = 1 + \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\right) h + \underset{h \to 0}{o}(h)$$

En conclure que $\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} = 0$.

Démonstration. Soient $i \in \{1, \ldots, n\}$, $t \in S_i$ et $h \in \mathbb{R}^+$. De même qu'à la question précédente, la famille $([X_{t+h} = j])_{1 \leqslant j \leqslant n}$ est un système complet d'événements. De plus, $\mathbb{P}_{[X_t=i]}$ est une application probabilité car $t \in S_i$ donc $\mathbb{P}([X_t = i]) \neq 0$. On en déduit que

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = j]) = 1.}$$

On a alors

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = j]) \\
&= \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = i]) + \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \mathbb{P}_{[X_t=i]}([X_{t+h} = j]) \\
&= 1 + \alpha_{i,i} h + \underset{h \to 0}{o}(h) + \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} (\alpha_{i,j} h + \underset{h \to 0}{o}(h)) && \textit{(d'après } (H_4) \textit{ et } (H_5)\textit{)} \\
&= 1 + \alpha_{i,i} h + \underset{h \to 0}{o}(h) + \sum_{\substack{1 \leqslant j \leqslant n \\ j \neq i}} \alpha_{i,j} h + (n-1) \underset{h \to 0}{o}(h) \\
&= 1 + \sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} h + n \underset{h \to 0}{o}(h) \\
&= 1 + \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\right) h + \underset{h \to 0}{o}(h) && \textit{(car } n \textit{ est une constante)}
\end{aligned}$$

De l'égalité précédente, il vient :

$$1 + ah + \underset{h \to 0}{o}(h) = 1 + \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j}\right) h + \underset{h \to 0}{o}(h)$$

avec $a = 0$ (on a simplement écrit le développement limité en 0 à l'ordre 1 de la fonction constante égale à 1). Par unicité du développement limité d'ordre 1, on en déduit que :

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} = a = 0.}$$

□

3. a) Montrer que, pour tous $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $(t, h) \in (\mathbb{R}^+)^2$, on a alors :

$$\mathbb{P}([X_{t+h} = j]) = \mathbb{P}([X_t = j]) + \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{i,j} h + \underset{h \to 0}{o}(h)\right) \mathbb{P}([X_t = i])$$

Démonstration. Soient $j \in \{1, \ldots, n\}$ et $(t, h) \in (\mathbb{R}^+)^2$.

- On commence par remarquer que, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$,

$$\mathbb{P}([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i]) = \begin{cases} \mathbb{P}([X_t = j])(1 + \alpha_{j,j} h + \underset{h \to 0}{o}(h)) & \text{si } i = j \\ \mathbb{P}([X_t = i])(\alpha_{i,j} h + \underset{h \to 0}{o}(h)) & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

  et ce, indépendamment du fait que $t \in S_i$ ou non.
  Démontrons la formule dans le cas $i \neq j$ (c'est analogue dans l'autre cas).
  × Premier cas : $t \in S_i$. Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i]) &= \mathbb{P}([X_t = i]) \mathbb{P}_{[X_t = i]}([X_{t+h} = j]) \\ &= \mathbb{P}([X_t = i])(\alpha_{i,j} h + \underset{h \to 0}{o}(h)) \qquad \textit{(d'après } (H_4)\textit{)} \end{aligned}$$

  × Deuxième cas : $t \notin S_i$.
  Alors, d'une part, $\mathbb{P}([X_t = i]) = 0$ donc $\mathbb{P}([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i]) = 0$ par croissance de $\mathbb{P}$ ($[X_{t+h} = j] \cap [X_t = i] \subset [X_t = i]$).
  D'autre part, $\mathbb{P}([X_t = i]) = 0$ donc $\mathbb{P}([X_t = i])(\alpha_{i,j} h + \underset{h \to 0}{o}(h)) = 0$.

- D'après la question ***1.***,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}([X_{t+h} = j]) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i]) \\ &= \mathbb{P}([X_{t+h} = j] \cap [X_t = j]) + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq j}} \mathbb{P}([X_{t+h} = j] \cap [X_t = i]) \\ &= \mathbb{P}([X_t = j])(1 + \alpha_{j,j} h + \underset{h \to 0}{o}(h)) + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq j}} \mathbb{P}([X_t = i])(\alpha_{i,j} h + \underset{h \to 0}{o}(h)) \\ &= \mathbb{P}([X_t = j]) + \mathbb{P}([X_t = j])(\alpha_{j,j} h + \underset{h \to 0}{o}(h)) + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq j}} \mathbb{P}([X_t = i])(\alpha_{i,j} h + \underset{h \to 0}{o}(h)) \\ &= \mathbb{P}([X_t = j]) + \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{i,j} h + \underset{h \to 0}{o}(h)\right) \mathbb{P}([X_t = i]) \end{aligned}$$

□

b) En déduire que pour tous $j \in \{1, \ldots, n\}$, $t \geqslant 0$ et $h > 0$:

$$\frac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h} = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \alpha_{i,j} + \underset{h \to 0}{o}(1)$$

En conclure que $f'_j(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \alpha_{i,j}$.

Démonstration. Soient $j \in \{1, \dots, n\}$, $t \geqslant 0$ et $h > 0$.
D'après la question précédente :

$$\mathbb{P}([X_{t+h} = j]) = \mathbb{P}([X_t = j]) + \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{i,j} h + \underset{h \to 0}{o}(h)\right) \mathbb{P}([X_t = i])$$

ce qui se réécrit

$$f_j(t+h) = f_j(t) + \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{i,j} h + \underset{h \to 0}{o}(h)\right) f_i(t)$$

donc

$$\begin{aligned}
\frac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h} &= \frac{1}{h} \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{i,j} h + \underset{h \to 0}{o}(h)\right) f_i(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(\alpha_{i,j} + \underset{h \to 0}{o}(1)\right) f_i(t) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left(f_i(t) \alpha_{i,j} + \underset{h \to 0}{o}(1)\right) && \textit{(car $f_i(t)$ ne dépend pas de h)} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \alpha_{i,j} + n \underset{h \to 0}{o}(1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \alpha_{i,j} + \underset{h \to 0}{o}(1) && \textit{(car n ne dépend pas de h)}
\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
f_j'(t) &= \lim_{h \to 0} \frac{f_j(t+h) - f_j(t)}{h} && \textit{(f_j est dérivable par (H_3))} \\
&= \lim_{h \to 0} \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \alpha_{i,j} + \underset{h \to 0}{o}(1) \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \alpha_{i,j}
\end{aligned}$$

□

c) Vérifier $L_t' = L_t G$.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}^+$.
D'une part, d'après ***3.b)***,

$$\begin{aligned}
L_t' &= \begin{pmatrix} f_1'(t) \ \dots\dots \ f_n'(t) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \alpha_{i,1} \ \dots\dots \ \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \alpha_{i,n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
L_t G &= \begin{pmatrix} f_1(t) \ \dots\dots \ f_n(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_{1,1} & \cdots\cdots & \alpha_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{n,1} & \cdots\cdots & \alpha_{n,n} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \alpha_{i,1} \ \dots\dots \ \sum_{i=1}^{n} f_i(t) \alpha_{i,n} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{L_t' = L_t G.}$$

$\square$

4. *Probabilité moyenne d'être dans un état*

Soit $T > 0$ et U_T une variable aléatoire à valeurs dans $[0, T]$ qui suit la loi uniforme sur cet intervalle. On pose $Z_{i,T} = f_i(U_T)$.

Montrer que $\mathbb{E}(Z_{i,T})$ existe et vaut $\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f_i(t)\ dt$. On note $e_i(T)$ cette espérance.

Démonstration. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$.
$U_T \hookrightarrow \mathcal{U}([0, T])$ donc la fonction

$$g_T : t \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \frac{1}{T} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant T \\ 0 & \text{si } t > T \end{cases}$$

est une densité de U_T. Cette densité est nulle en dehors de $]0, T[$. De plus, la fonction f_i est dérivable sur $\mathbb{R}^+$ (cf (H_3)) donc est continue sur $]0, T[$. Il suit par théorème de transfert que $Z_{i,T}$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_0^T f_i(t) g_T(t)\ dt$ converge, et si c'est le cas alors

$$\mathbb{E}(Z_{i,T}) = \int_0^T f_i(t) g_T(t)\ dt$$

Or,

$$\int_0^T f_i(t) g_T(t)\ dt = \int_0^T f_i(t) \frac{1}{T}\ dt$$

et cette intégrale converge puisque ce n'est pas une intégrale impropre (f_i est continue sur $[0, T]$). On en déduit que $\mathbb{E}(Z_{i,T})$ existe et

$$\boxed{\mathbb{E}(Z_{i,T}) = \frac{1}{T}\int_0^T f_i(t)\ dt \text{ (par linéarité de l'intégrale)}}$$

$\square$

5. On suppose dans cette question que $n = 2$ et que $G = \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix}$ où a et b sont deux réels strictement positifs. On pose $p = \frac{b}{a+b}$, $q = 1 - p$, $\alpha = f_1(0)$.

Commentaire

D'après la question ***2.***, la somme des coefficients de la matrice G sur chaque ligne doit être égale à 0. Puisque G est une matrice 2×2, il suit que le choix des coefficients diagonaux détermine entièrement les deux autres coefficients. D'après (H_5) les coefficients diagonaux sont négatifs, le concepteur décide ici de les écrire $\alpha_{1,1} = -a$ et $\alpha_{2,2} = -b$ pour travailler avec des paramètres positifs. Ceci explique la forme spécifique de la matrice G.

a) Montrer que f_1 vérifie l'équation différentielle d'ordre 1 sur $\mathbb{R}^+$, $y' + (a + b)y = b$.

Démonstration. Soit $t \geqslant 0$. D'après la question ***3.c)***,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} f_1'(t) & f_2'(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & a \\ b & -b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -af_1(t) + bf_2(t) & af_1(t) - bf_2(t) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc $f_1'(t) = -af_1(t) + bf_2(t)$.
De plus, $\begin{pmatrix} f_1(t) & f_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbb{P}([X_t = 1]) & \mathbb{P}([X_t = 2]) \end{pmatrix}$ et $([X_t = 1], [X_t = 2])$ est un système complet d'événements donc $f_1(t) + f_2(t) = 1$.
D'où

$$\begin{aligned} f_1'(t) &= -af_1(t) + b(1 - f_1(t)) \\ &= b - (a+b)f_1(t) \end{aligned}$$

$$\boxed{f_1 \text{ est bien solution de l'équation différentielle } y' + (a+b)y = b.}$$

□

b) En conclure que pour tout $t \geqslant 0$,

$$f_1(t) = p + (\alpha - p)\exp(-(a+b)t) \quad \text{et} \quad f_2(t) = q - (\alpha - p)\exp(-(a+b)t)$$

Démonstration.

- D'après le cours, les solutions de l'équation homogène $y' + (a+b)y = 0$, d'ordre 1 à coefficients constants, sont de la forme
$$t \mapsto C\mathrm{e}^{-(a+b)t}, \qquad C \in \mathbb{R}$$
- Le second membre de l'équation différentielle $y' + (a+b)y = b$ étant constant, on en déduit que la fonction constante $t \mapsto \frac{b}{a+b}$ est une solution particulière.
- On en déduit que les solutions de $y' + (a+b)y = b$ sont de la forme
$$t \mapsto p + C\mathrm{e}^{-(a+b)t}, \qquad C \in \mathbb{R}$$
En particulier, il existe une constante $C_1 \in \mathbb{R}$ telle que pour tout $t \geqslant 0$,
$$f_1(t) = p + C_1\mathrm{e}^{-(a+b)t}$$
En évaluant en $t = 0$, on trouve :
$$\alpha = p + C_1$$
Finalement, pour tout $t \geqslant 0$,
$$\boxed{f_1(t) = p + (\alpha - p)\mathrm{e}^{-(a+b)t}.}$$
- Soit $t \geqslant 0$. On sait que $f_1(t) + f_2(t) = 1$ donc $f_2(t) = 1 - f_1(t)$. De plus, $q = 1 - p$, donc
$$\boxed{f_2(t) = q - (\alpha - p)\exp(-(a+b)t).}$$

□

c) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $f_1(t) \in [\min(p, \alpha), \max(p, \alpha)]$ et que $\lim\limits_{t \to +\infty} f_1(t) = p$.

Démonstration.

- Notons $u : t \mapsto \mathrm{e}^{-(a+b)t}$. On sait que $a > 0$ et $b > 0$ donc $-(a+b) < 0$. Ainsi, u est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ et admet le tableau de variations suivant :

x	0	$+\infty$
Signe de $u'(x)$	$-$	
Variations de u	1	0

Puisque $f = p + (\alpha - p)u$, on en déduit immédiatement que

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} f_1(t) = p.}$$

- Rappelons que $f_1(0) = \alpha$. De plus, selon le signe de $\alpha - p$,
  - × soit f_1 est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ (cas $\alpha - p > 0$), et alors on peut écrire

$$f_1([0, +\infty[) \subset \left] \lim_{t \to +\infty} f_1(t), f_1(0) \right] =]p, \alpha] \subset [\min(p, \alpha), \max(p, \alpha)]$$

  - × soit f_1 est strictement croissante (cas $\alpha - p < 0$), et alors on peut écrire

$$f_1([0, +\infty[) \subset \left[f_1(0), \lim_{t \to +\infty} f_1(t) \right[= [\alpha, p[\subset [\min(p, \alpha), \max(p, \alpha)]$$

  - × soit f_1 est constante (cas $\alpha = p$), et alors on peut écrire

$$\forall t \geqslant 0, f_1(t) = p = \alpha \in [\min(p, \alpha), \max(p, \alpha)] = \{p\} = \{\alpha\}$$

□

d) Déterminer $\lim\limits_{T \to +\infty} e_1(T)$.

Démonstration. Soit $T > 0$.

$$\begin{aligned}
\int_0^T f_1(t)\ dt &= \int_0^T \left(p + (\alpha - p)\mathrm{e}^{-(a+b)t}\right)\ dt \\
&= pT + (\alpha - p) \int_0^T \mathrm{e}^{-(a+b)t}\ dt \\
&= pT + \frac{\alpha - p}{a+b} \int_0^T (a+b)\mathrm{e}^{-(a+b)t}\ dt
\end{aligned}$$

donc

$$e_1(T) = p + \frac{1}{T} \frac{\alpha - p}{a+b} \int_0^T (a+b)\mathrm{e}^{-(a+b)t}\ dt$$

Or,

- $\lim\limits_{T \to +\infty} \dfrac{1}{T} \dfrac{\alpha - p}{a+b} = 0$.
- En reconnaissant le moment d'ordre 0 d'une variable aléatoire $X \hookrightarrow \mathcal{E}(a+b)$, on a

$$\lim_{T \to +\infty} \int_0^T (a+b)\mathrm{e}^{-(a+b)t}\ dt = \int_0^{+\infty} (a+b)\mathrm{e}^{-(a+b)t}\ dt = 1$$

Finalement,

$$\boxed{\lim_{T \to +\infty} e_1(T) = p.}$$

□

6. On suppose dans cette question que $n = 3$ et $G = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Commentaire

On vérifie également sur cet exemple que la somme des coefficients sur chaque ligne de G est nulle, cf question ***2***.

Pour tout $t \geqslant 0$, on note C_t (respectivement C'_t) la transposée de la matrice ligne L_t (respectivement L'_t).

a) Montrer que $-\frac{1}{6}$, $-\frac{1}{10}$ et 0 sont des valeurs propres de G.

Démonstration. Notons $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

On notera c_1, c_2 et c_3 les colonnes de la matrice considérée dans chacun des calculs qui suivent.

•

$$\begin{aligned} \text{rg}\left(G + \frac{1}{6}I_3\right) &= \text{rg}\left(\frac{1}{30}A + \frac{1}{6}I_3\right) \\ &= \text{rg}(A + 5I_3) \\ &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right) < 3 \qquad \textit{(car } c_1 = c_3\textit{)} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{-\frac{1}{6} \text{ est valeur propre de } G.}$$

•

$$\begin{aligned} \text{rg}\left(G + \frac{1}{10}I_3\right) &= \text{rg}\left(\frac{1}{30}A + \frac{1}{10}I_3\right) \\ &= \text{rg}(A + 3I_3) \\ &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right) < 3 \qquad \textit{(car } c_1 + c_3 = 2c_2\textit{)} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{-\frac{1}{10} \text{ est valeur propre de } G.}$$

•

$$\begin{aligned} \text{rg}\,(G) &= \text{rg}\left(\frac{1}{30}A\right) \\ &= \text{rg}(A) \\ &= \text{rg}\left(\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}\right) < 3 \qquad \textit{(car } c_1 + c_2 + c_3 = 0\textit{)} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{0 \text{ est valeur propre de } G.}$$

□

b) On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$. Justifier que $G = \frac{1}{30} P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1}$.

Démonstration. Il s'agit de montrer que $A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1}$.

On a vu à la question précédente que $\{0, -3, -5\} \subset \mathrm{Sp}(A)$. Or, A est une matrice carrée d'ordre 3 donc admet au plus 3 valeurs propres distinctes. On les a donc toutes :

$$\boxed{\mathrm{Sp}(A) = \{0, -3, -5\} \text{ et } A \text{ est diagonalisable.}}$$

De plus,

$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

et $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$ et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \neq 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}$

donc $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre 0, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -3 et $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre -5.

On en déduit que la famille $\mathcal{F} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ constituée de vecteurs propres de A. La matrice P est la matrice de changement de base de la base canonique à la base $\mathcal{F}$, donc par formule de changement de base :

$$\boxed{A = P \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix} P^{-1}.}$$

□

c) Calculer ${}^tPP$. En déduire que $P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} {}^tPP &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I_3$$

et donc

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = I_3$$

i.e.

$$\boxed{P^{-1} = \tfrac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix}.}$$

□

d) On pose, pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $P^{-1}C_t = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix}$.

Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, $y_1'(t) = 0$, $y_2'(t) = -\frac{1}{10}y_2(t)$, $y_3'(t) = -\frac{1}{6}y_3(t)$.

Démonstration. Soit $t \geqslant 0$.

- Tout d'abord,

$$\begin{aligned} L_t' &= L_t G & &\textit{(cf question \textbf{3.c)})} \\ \text{donc } C_t' &= {}^tG C_t \\ \text{donc } C_t' &= G C_t & &\textit{car G est symétrique} \end{aligned}$$

- Notons $Y_t = P^{-1}C_t$, *i.e.* $C_t = PY_t$ et notons $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{10} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{pmatrix}$.

$$\begin{aligned} C_t' &= GC_t \\ \text{donc } PY_t' &= GPY_t & &\textit{car P ne dépend pas de t} \\ \text{donc } Y_t' &= P^{-1}GPY_t \\ \text{donc } Y_t' &= DY_t & &\textit{(cf question \textbf{6.b)})} \end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{y_1'(t) = 0,\ y_2'(t) = -\tfrac{1}{10}y_2(t),\ y_3'(t) = -\tfrac{1}{6}y_3(t).}$$

□

e) En conclure que, pour tout $t \geqslant 0$, $C_t = P\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta e^{-\frac{1}{10}t} \\ \gamma e^{-\frac{1}{6}t} \end{pmatrix}$ où $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P^{-1}C_0$, puis que pour $i \in \{1,2,3\}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbb{P}([X_t = i]) = \frac{1}{3}$.

Démonstration. D'après la question précédente, il existe trois constantes réelles α, β, γ telles que, pour tout $t \geqslant 0$:

$$\begin{aligned} y_1(t) &= \alpha \\ y_2(t) &= \beta \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t} \\ y_3(t) &= \gamma \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}t} \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{C_t = PY_t = P\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t} \\ \gamma \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}t} \end{pmatrix}.}$$

En particulier, pour $t = 0$, on obtient $C_0 = P\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, *i.e.*

$$\boxed{\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = P^{-1}C_0}$$

Montrons que, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbb{P}([X_t = i]) = \alpha$. On le détaille pour $i = 1$ (les calculs sont analogues dans les deux autres cas).
$\mathbb{P}([X_t = 1])$ est le premier coefficient de C_t donc, par produit matriciel,

$$\mathbb{P}([X_t = 1]) = \alpha + \beta \mathrm{e}^{-\frac{1}{10}t} + \gamma \mathrm{e}^{-\frac{1}{6}t} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} \alpha$$

Il reste à montrer que $\alpha = \dfrac{1}{3}$.
Or, α est le premier coefficient du vecteur colonne $P^{-1}C_0$ donc, d'après la question ***6.c)***, donc

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{6}(2\mathbb{P}([X_0 = 1]) + 2\mathbb{P}([X_0 = 2]) + 2\mathbb{P}([X_0 = 3])) \\ &= \frac{1}{3}(\mathbb{P}([X_0 = 1]) + \mathbb{P}([X_0 = 2]) + \mathbb{P}([X_0 = 3])) \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

(car $([X_0 = 1], [X_0 = 2], [X_0 = 3])$ *est un système complet d'événements)*

Finalement, on a bien montré que, pour tout $i \in \{1, 2, 3\}$,

$$\boxed{\lim_{t \to +\infty} \mathbb{P}([X_t = i]) = \tfrac{1}{3}.}$$

□

7. *Temps initial passé dans un état* - On pose pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\beta_i = -\alpha_{i,i}$ et on suppose dans cette question que, si $\mathbb{P}([X_0 = i]) \neq 0$, alors $\beta_i \neq 0$.
On définit les variables aléatoires, $Y_1, \ldots, Y_n$ et Y égales, au premier instant t où $X_t \neq i$ pour Y_i et au premier instant t où $X_t \neq X_0$ pour Y. *On admet que ces instants existent.* Ainsi Y est à valeurs dans $]0, +\infty[$ et si $X_0 \neq i$, $Y_i = 0$.

Soit i tel que $\mathbb{P}([X_0 = i]) \neq 0$. On admet que pour tout $x > 0$, lorsque k est un entier naturel assez grand $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k} \left[X_{\frac{j}{k}x} = i\right]\right) \neq 0$ et que l'on a :

$$\mathbb{P}([Y_i > x]) = \lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k} \left[X_{\frac{j}{k}x} = i\right]\right)$$

a) Montrer que pour tout $x > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$, k assez grand :

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k} \left[X_{\frac{j}{k}x} = i\right]\right) = \mathbb{P}([X_0 = i]) \prod_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}_{\left[X_{\frac{j}{k}x}=i\right]}\left(\left[X_{\frac{j+1}{k}x} = i\right]\right) = \mathbb{P}([X_0 = i]) \left(1 - \frac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k$$

Démonstration. Soit $x > 0$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$ assez grand pour que $\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k} \left[X_{\frac{j}{k}x} = i\right]\right) \neq 0$.

D'après la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k} \left[X_{\frac{j}{k}x} = i\right]\right) \\
=&\mathbb{P}([X_0 = i]) \prod_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}_{\bigcap_{m=0}^{j}\left[X_{\frac{m}{k}x}=i\right]}\left(\left[X_{\frac{j+1}{k}x} = i\right]\right) \\
=&\mathbb{P}([X_0 = i]) \prod_{j=0}^{k-1} \mathbb{P}_{\left[X_{\frac{j}{k}x}=i\right]}\left(\left[X_{\frac{j+1}{k}x} = i\right]\right) && \textit{(d'après } (H_2)\textit{, car } 0 = \frac{0}{k}x < \frac{1}{k}x < \cdots < \frac{j}{k}x\textit{)} \\
=&\mathbb{P}([X_0 = i]) \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 + \alpha_{i,i}\frac{x}{k} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{x}{k}\right)\right) && \textit{(d'après } (H_5)\textit{, car } \frac{j+1}{k}x - \frac{j}{k}x = \frac{x}{k} \underset{k\to+\infty}{\longrightarrow} 0\textit{)} \\
=&\mathbb{P}([X_0 = i]) \prod_{j=0}^{k-1} \left(1 - \frac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right) && \textit{(car } x \textit{ ne dépend pas de } k\textit{)} \\
=&\mathbb{P}([X_0 = i]) \left(1 - \frac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right)^k
\end{aligned}$$

□

b) En déduire que pour tout $x \geqslant 0$, $\mathbb{P}_{[X_0=i]}([Y_i > x]) = \mathrm{e}^{-\beta_i x}$. Quelle est la loi de Y_i pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X_0=i]}$?

Démonstration. Soit $x \geqslant 0$.

- Premier cas : $x = 0$.
  Alors, d'une part, $\mathrm{e}^{-\beta_i \times 0} = 1$.
  Et d'autre part, si l'événement $[X_0 = i]$ est réalisé, alors le premier instant t où $X_t \neq i$ n'est pas 0 et donc est nécessairement strictement positif donc l'événement $[Y_i > 0]$ est réalisé. On en déduit que
  $$\mathbb{P}_{[X_0=i]}([Y_i > 0]) = 1$$
  On a bien
  $$\boxed{\mathbb{P}_{[X_0=i]}([Y_i > x]) = \mathrm{e}^{-\beta_i x}.}$$

- Deuxième cas : $x > 0$.

$$\mathbb{P}_{[X_0=i]}([Y_i > x]) = \frac{\mathbb{P}([X_0 = i] \cap [Y_i > x])}{\mathbb{P}([X_0 = i])} = \frac{\mathbb{P}([Y_i > x])}{\mathbb{P}([X_0 = i])}$$

En effet, on remarque (et c'est rappelé dans l'énoncé) que $[X_0 \neq i] \subset [Y_i = 0]$ donc, par contraposée, $[Y_i > x] \subset [Y_i \neq 0] \subset [X_0 = i]$.
De plus, il est admis que

$$\mathbb{P}([Y_i > x]) = \lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k} \left[X_{\frac{j}{k}x} = i \right] \right)$$

donc

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[X_0=i]}([Y_i > x]) &= \lim_{k \to +\infty} \frac{1}{\mathbb{P}([X_0 = i])} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=0}^{k} \left[X_{\frac{j}{k}x} = i \right] \right) \\ &= \lim_{k \to +\infty} \left(1 - \frac{\beta_i}{k} x + \underset{k \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{k} \right) \right)^k\end{aligned}$$

Or, pour tout k assez grand,

$$\left(1 - \frac{\beta_i}{k} x + \underset{k \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{k} \right) \right)^k = \mathrm{e}^{k \ln\left(1 - \frac{\beta_i}{k} x + \underset{k \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{k} \right) \right)}$$

et

$$\begin{aligned}&k \ln\left(1 - \frac{\beta_i}{k} x + \underset{k \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{k} \right) \right) \\ =&k \left(-\frac{\beta_i}{k} x + \underset{k \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{k} \right) + \underset{k \to +\infty}{o}\left(-\frac{\beta_i}{k} x + \underset{k \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{k} \right) \right) \right) \quad \textit{(car } \lim_{k \to +\infty} -\frac{\beta_i}{k} x + \underset{k \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{k} \right) = 0\textit{)} \\ =&k \left(-\frac{\beta_i}{k} x + \underset{k \to +\infty}{o}\left(\frac{1}{k} \right) \right) \\ =&-\beta_i x + \underset{k \to +\infty}{o}(1) \\ \underset{k \to +\infty}{\longrightarrow}& -\beta_i x\end{aligned}$$

et par continuité de exp sur $\mathbb{R}$, on a bien

$$\boxed{\mathbb{P}_{[X_0=i]}([Y_i > x]) = \mathrm{e}^{-\beta_i x}.}$$

- Tout d'abord, $Y_i(\Omega) = [0, +\infty[$ et l'ensemble des valeurs possibles pour Y_i sachant l'événement $[X_0 = i]$ réalisé est $]0, +\infty[$.
Ensuite, par passage au complémentaire :

$$\mathbb{P}_{[X_0=i]}([Y_i \leqslant x]) = 1 - \mathbb{P}_{[X_0=i]}([Y_i > x]) = \begin{cases} 1 - \mathrm{e}^{-\beta_i x} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Remarquons que $\beta_i > 0$. En effet, $\beta_i = -\alpha_{i,i}$ et $\alpha_{i,i} \leqslant 0$ d'après (H_5) donc $\beta_i \geqslant 0$. De plus, $\mathbb{P}([X_0 = i]) \neq 0$ donc $\beta_i \neq 0$ par hypothèse.
On reconnait la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre β_i. Or, la fonction de répartition caractérise la loi donc la loi de Y_i pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X_0=i]}$ est la loi exponentielle de paramètre β_i.

Commentaire

Les compositions de DL ne sont pas au programme et ne sont pas exigibles des candidat·es.
Pour rester dans le cadre strict du programme, on peut faire un calcul d'équivalent plutôt qu'un calcul de DL. Cela alourdit la rédaction, mais c'est peut-être plus facile à comprendre :
Notons, pour tout k assez grand, $u_k = -\frac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)$.
Puisque $x > 0$ et $\beta_i > 0$,

$$u_k \underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{\beta_i}{k}x$$

On en déduit que $\lim\limits_{k\to+\infty} u_k = 0$ et pour tout k assez grand, $u_k \neq 0$.
On peut donc écrire que

$$\begin{aligned}\ln\left(1 - \frac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right) &= \ln(1+u_k) \\ &\underset{k\to+\infty}{\sim} u_k \\ &\underset{k\to+\infty}{\sim} -\frac{\beta_i}{k}x\end{aligned}$$

puis que

$$k\ln\left(1 - \frac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right) \underset{k\to+\infty}{\sim} -\beta_i x$$

donc

$$\lim_{k\to+\infty} k\ln\left(1 - \frac{\beta_i}{k}x + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)\right) = -\beta_i x$$

□

c) Montrer que pour tout $x \geqslant 0$, $\mathbb{P}([Y > x]) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k])e^{-\beta_k x}$.

Démonstration. Soit $x \geqslant 0$. La famille $([X_0 = k])_{1\leqslant k\leqslant n}$ est un système complet d'événements, donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\mathbb{P}([Y > x]) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([Y > x] \cap [X_0 = k])$$

- Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\mathbb{P}([X_0 = k]) \neq 0$. Alors

$$\mathbb{P}([Y > x] \cap [X_0 = k]) = \mathbb{P}([X_0 = k])\mathbb{P}_{[X_0=k]}([Y > x])$$

  Si l'événement $[X_0 = k]$ est réalisé, alors par définition, Y est le premier instant t tel que $X_t \neq k$, *i.e.* $Y = Y_k$. D'où

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([Y > x] \cap [X_0 = k]) &= \mathbb{P}([X_0 = k])\mathbb{P}_{[X_0=k]}([Y_k > x]) \\ &= \mathbb{P}([X_0 = k])e^{-\beta_k x} \qquad \textit{(cf question } \textbf{\textit{7.b)}}\textit{)}\end{aligned}$$

- Soit $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $\mathbb{P}([X_0 = k]) = 0$. Alors, par un raisonnement analogue à celui fait en question ***3.a)***, on a aussi

$$\mathbb{P}([Y > x] \cap [X_0 = k]) = \mathbb{P}([X_0 = k])e^{-\beta_k x}$$

  car

$$\mathbb{P}([Y > x] \cap [X_0 = k]) = 0 \qquad \text{et} \qquad \mathbb{P}([X_0 = k])e^{-\beta_k x} = 0$$

Finalement, on a bien

$$\boxed{\text{pour tout } x \geqslant 0,\ \mathbb{P}([Y > x]) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k])\mathrm{e}^{-\beta_k x}.}$$

□

d) En conclure que Y est une variable à densité et déterminer une densité de Y.

Démonstration.

- $Y(\Omega) =]0, +\infty[$.
- Soit $x \in \mathbb{R}$.
  Si $x \leqslant 0$, alors

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\ &= \mathbb{P}(\varnothing) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Si $x > 0$, alors

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \mathbb{P}([Y \leqslant x]) \\ &= 1 - \mathbb{P}([Y > x]) \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k])\mathrm{e}^{-\beta_k x} \end{aligned}$$

- On en déduit que la fonction F_Y est
  × de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\infty, 0[$ car constante sur cet intervalle
  × de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$ par somme de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0, +\infty[$
  × continue en 0. En effet,

$$\begin{aligned} \lim_{x \to 0^+} F_Y(x) &= \lim_{x \to 0} 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k])\mathrm{e}^{-\beta_k x} \\ &= 1 - \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k]) \\ &= 0 \qquad \textit{(car } ([X_0 = k])_{1 \leqslant k \leqslant n} \textit{ est un système complet d'événements)} \\ &= F_Y(0) \\ &= \lim_{x \to 0^-} F_Y(x) \end{aligned}$$

  Finalement, F_Y est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 0 donc

$$\boxed{Y \text{ est une variable à densité.}}$$

- Pour déterminer une densité de Y, on dérive sa fonction de répartition sur les intervalles ouverts où elle est de classe $\mathcal{C}^1$. On pose

$$f_Y : t \mapsto \begin{cases} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k])\beta_k \mathrm{e}^{-\beta_k x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

  et on prolonge f_Y en 0 en posant $f_Y(0) = 0$.

$$\boxed{\text{La fonction } f_Y \text{ est une densité de } Y.}$$

□

e) On note $I = \{k \in \{1, \ldots, n\} \mid \mathbb{P}([X_0 = k]) \neq 0\}$. Établir que Y admet une espérance égale à $\displaystyle\sum_{k\in I} \frac{\mathbb{P}([X_0 = k])}{\beta_k}$.

Démonstration. La variable aléatoire Y admet une espérance si et seulement si l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\, dt$ converge absolument, ce qui revient à démontrer la convergence pour ce calcul de moment.

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\, dt &= \int_0^{+\infty} t f_Y(t)\, dt & \textit{(car } f_Y \textit{ est nulle en dehors }]0, +\infty[\textit{)}\\
&= \int_0^{+\infty} t \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = k])\beta_k \mathrm{e}^{-\beta_k t}\, dt \\
&= \int_0^{+\infty} \sum_{k\in I} \mathbb{P}([X_0 = k]) t\beta_k \mathrm{e}^{-\beta_k t}\, dt & \textit{(les autres termes étants nuls)}
\end{aligned}$$

Soit $k \in I$. Alors $\beta_k > 0$ (même raisonnement qu'en ***7.b)***).
On reconnaît le moment d'ordre 1 d'une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre β_k, d'où $\displaystyle\int_0^{+\infty} t\beta_k \mathrm{e}^{-\beta_k t}\, dt$ converge et

$$\int_0^{+\infty} t\beta_k \mathrm{e}^{-\beta_k t}\, dt = \frac{1}{\beta_k}$$

On en déduit que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sum_{k\in I} \mathbb{P}([X_0 = k]) t\beta_k \mathrm{e}^{-\beta_k t}\, dt$ converge, et par linéarité (c'est bien une somme finie) :

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} t f_Y(t)\, dt &= \sum_{k\in I} \mathbb{P}([X_0 = k]) \int_0^{+\infty} t\beta_k \mathrm{e}^{-\beta_k t}\, dt \\
&= \sum_{k\in I} \mathbb{P}([X_0 = k]) \frac{1}{\beta_k}
\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{Y \text{ admet une espérance et } \mathbb{E}(Y) = \sum_{k\in I} \frac{\mathbb{P}([X_0 = k])}{\beta_k}.}$$

□

Partie 2 - Matrice de transition, lien avec la matrice génératrice

On utilise les notations de la partie 1.

8. *Définition de la matrice de transition* - Pour tous $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$ et $s \geqslant 0$, si $t \in S_i$, on pose

$$m_{i,j}(s) = \mathbb{P}_{[X_t = i]}([X_{t+s} = j])$$

qui ne dépend pas de t d'après les hypothèses (H_4) et (H_5).
On note $M(s)$ la matrice d'élément générique $m_{i,j}(s)$.

a) Établir que pour tout $s \geqslant 0$, $L_s = L_0 M(s)$.

Démonstration. Soit $s \geqslant 0$.
Le coefficient $m_{i,j}(s)$ ne dépend pas de t donc on peut, pour $i \in I$, choisir de l'écrire avec $t = 0$:

$$m_{i,j}(s) = \mathbb{P}_{[X_0=i]}([X_s = j])$$

Fixons $j \in [\![1, n]\!]$.

- D'une part, la famille $([X_0 = i])_{1 \leqslant i \leqslant n}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_s = j]) &= \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = i] \cap [X_s = j]) \\
&= \sum_{i \in I} \mathbb{P}([X_0 = i] \cap [X_s = j]) \\
&= \sum_{i \in I} \mathbb{P}([X_0 = i])\mathbb{P}_{[X_0=i]}([X_s = j]) \\
&= \sum_{i \in I} \mathbb{P}([X_0 = i]) m_{i,j}(s)
\end{aligned}$$

- D'autre part,

$$\begin{aligned}
L_0 M(s) &= \left(\sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = i]) m_{i,1}(s) \quad \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = i]) m_{i,2}(s) \ldots\ldots \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}([X_0 = i]) m_{i,n}(s) \right) \\
&= \left(\sum_{i \in I} \mathbb{P}([X_0 = i]) m_{i,1}(s) \quad \sum_{i \in I} \mathbb{P}([X_0 = i]) m_{i,2}(s) \ldots\ldots \sum_{i \in I} \mathbb{P}([X_0 = i]) m_{i,n}(s) \right)
\end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $j \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
[L(s)]_j &= \mathbb{P}([X_s = j]) \\
&= \sum_{i \in I} \mathbb{P}([X_0 = i]) m_{i,j}(s) \\
&= [L_0 M(s)]_j
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{L(s) = L_0 M(s).}$$

□

b) Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$, $r \in S_i$. En utilisant la propriété (H_2) et en distinguant les cas où $\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k])$ est nulle ou non, montrer que pour tous $(j, k) \in \{1, \ldots, n\}^2$, s et t des réels positifs :

$$\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j]) = \mathbb{P}([X_r = i]) m_{i,k}(s) m_{k,j}(t)$$

En déduire que, pour tous $j \in \{1, \ldots, n\}$ et s, t des réels positifs,

$$\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s+t} = j]) = \mathbb{P}([X_r = i]) \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}(s) m_{k,j}(t)$$

Démonstration. Soit $i \in \{1, \ldots, n\}$ et soit $r \in S_i$. Par définition, $\mathbb{P}([X_r = i]) \neq 0$.
Soient $(j, k) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $s \geqslant 0$ et $t \geqslant 0$.

- Premier cas : $\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]) \neq 0$. Alors $\mathbb{P}([X_{r+s} = k]) \neq 0$, *i.e.* $r + s \in S_k$.
  Pour utiliser la propriété (H_2), il faut des instants $t_1 < \cdots < t_m$ distincts, donc il faut encore séparer deux cas.

× Supposons $s > 0$. On peut alors écrire, en appliquant la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j]) \\
=&\mathbb{P}([X_r = i])\mathbb{P}_{[X_r=i]}([X_{r+s} = k])\mathbb{P}_{[X_r=i]\cap[X_{r+s}=k]}([X_{r+s+t} = j]) \\
=&\mathbb{P}([X_r = i])\mathbb{P}_{[X_r=i]}([X_{r+s} = k])\mathbb{P}_{[X_{r+s}=k]}([X_{r+s+t} = j]) \qquad \textit{(par } (H_2) \textit{ car } r < r+s\textit{)} \\
=&\mathbb{P}([X_r = i])m_{i,k}(s)m_{k,j}(t)
\end{aligned}$$

× Supposons maintenant $s = 0$. Alors nécessairement $k = i$, sinon on aurait $\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]) = \mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_r = k]) = 0$.
Ainsi, d'une part,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j]) &= \mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_r = i] \cap [X_{r+t} = j]) \\
&= \mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+t} = j]) \\
&= \mathbb{P}([X_r = i])\mathbb{P}_{[X_r=i]}([X_{r+t} = j]) \\
&= \mathbb{P}([X_r = i])m_{i,j}(t)
\end{aligned}$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_r = i])m_{i,k}(s)m_{k,j}(t) &= \mathbb{P}([X_r = i])m_{i,i}(0)m_{i,j}(t) \\
&= \mathbb{P}([X_r = i])m_{i,j}(t)
\end{aligned}$$

En effet,

$$m_{i,i}(0) = \mathbb{P}_{[X_r=i]}([X_r = i]) = 1$$

- Deuxième cas : $\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k]) = 0$.
  Alors, d'une part,

$$\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j]) = 0$$

et d'autre part,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_r = i])m_{i,k}(s)m_{k,j}(t) &= \mathbb{P}([X_r = i])\mathbb{P}_{[X_r=i]}([X_{r+s} = k])m_{k,j}(t) \\
&= \mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k])m_{k,j}(t) \\
&= 0
\end{aligned}$$

On a bien montré, dans tous les cas, que

$$\boxed{\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j]) = \mathbb{P}([X_r = i])m_{i,k}(s)m_{k,j}(t).}$$

Pour finir, la famille $([X_{r+s} = k])_{1\leqslant k\leqslant n}$ est un système complet d'événements donc, d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s+t} = j]) &= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s} = k] \cap [X_{r+s+t} = j]) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}([X_r = i])m_{i,k}(s)m_{k,j}(t) \\
&= \mathbb{P}([X_r = i])\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}(s)m_{k,j}(t)
\end{aligned}$$

□

c) En conclure que pour tous s et t, des réels positifs, $M(s+t) = M(s)M(t)$.

Démonstration. Soit $s \geqslant 0$ et soit $t \geqslant 0$.
Soit $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$. Soit $r \in S_i$ (il existe bien un tel réel d'après (H_3)).
D'après la question précédente,

$$\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s+t} = j]) = \mathbb{P}([X_r = i]) \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}(s) m_{k,j}(t)$$

Or, on a également

$$\mathbb{P}([X_r = i] \cap [X_{r+s+t} = j]) = \mathbb{P}([X_r = i]) m_{i,j}(s+t)$$

En simplifiant par $\mathbb{P}([X_r = i]) \neq 0$, on obtient

$$m_{i,j}(s+t) = \sum_{k=1}^{n} m_{i,k}(s) m_{k,j}(t)$$

Or, $m_{i,j}(s+t)$ est le coefficient à la position (i, j) de la matrice $M(s+t)$ et, par définition du produit matriciel, $\sum_{k=1}^{n} m_{i,k}(s) m_{k,j}(t)$ est le coefficient à la position (i, j) de la matrice $M(s)M(t)$.
L'égalité précédente étant valable pour tout couple $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, on a bien

$$\boxed{M(s+t) = M(s)M(t).}$$

□

d) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ et t réel positif, $M(kt) = (M(t))^k$.

Démonstration. Soit $t \geqslant 0$.
Montrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(k)$
où $\mathcal{P}(k)$: « $M(kt) = (M(t))^k$ ».
<u>Initialisation</u> :
$M(t)^1 = M(t) = M(1 \times t)$, d'où $\mathcal{P}(1)$.
<u>Hérédité</u> : soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(k)$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\begin{aligned} M((k+1)t) &= M(kt+t) \\ &= M(kt)M(t) && \textit{(cf question } \textbf{\textit{8.c)}}\textit{, car } t \geqslant 0 \textit{ et } kt \geqslant 0\textit{)} \\ &= (M(t))^k M(t) && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= M(t^{k+1}) \end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(k+1)$.
On a montré par récurrence

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ M(kt) = (M(t))^k.}$$

□

- Si $(A_k)_{k \geqslant 1}$ est une suite de matrices appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, A une matrice appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, si l'on note $a_{i,j}(k)$ le coefficient d'indice (i, j) de la matrice A_k, $a_{i,j}$ le coefficient d'indice (i, j) de A, alors on écrira $A = \lim\limits_{k \to +\infty} A_k$ si pour $(i, j) \in \{1, \ldots, n\}^2$, $\lim\limits_{k \to +\infty} a_{i,j}(k) = a_{i,j}$.

  On dit alors que la suite $(A_k)_{k \geqslant 1}$ converge vers A.

- On admet, dans la suite de cette partie et dans la partie 3, que pour tout $t \geqslant 0$,

$$M(t) = \lim_{k \to +\infty} \left(I_n + \frac{t}{k} G\right)^k \qquad (**)$$

9. On veut simuler le processus à partir de la donnée de la matrice G et de L_0. On admet que pour $t \in [0, 100]$, on peut considérer que $M(t) = \left(I_n + \frac{t}{1000} G\right)^{1000}$.

- On importe des bibliothèques :
  `numpy as np`, `numpy.random as rd`, `matplotlib.pyplot as plt`, `numpy.linalg as al`
- On rappelle que si `M` est une matrice, représentée par un tableau `numpy`, `M[:,j]` désigne le vecteur des coefficients de la `j`-ème colonne de `M`, de même pour `M[i,:]` et la `i`-ème ligne de `M`.

a) Écrire une fonction **Python** `transition(t,G)` de paramètres `G` représentant la matrice génératrice carrée d'ordre n et `t`, qui renvoie la matrice $\left(I_n + \frac{t}{1000} G\right)^{1000}$.

Démonstration.

```
def transition(t, G):
    n = len(G)
    # On récupère n en calculant la taille de la matrice carrée G
    I = np.eye(n)
    # On crée la matrice identité d'ordre n
    return al.matrix_power(I + (t / 1000)*G, 1000)
```

Commentaire

On peut être très économe et écrire directement

```
def transition(t, G):
    return al.matrix_power(np.eye(len(G)) + (t / 1000)*G, 1000)
```

mais cela rend le code un peu moins facile à déchiffrer car il ya beaucoup de formules emboitées.

□

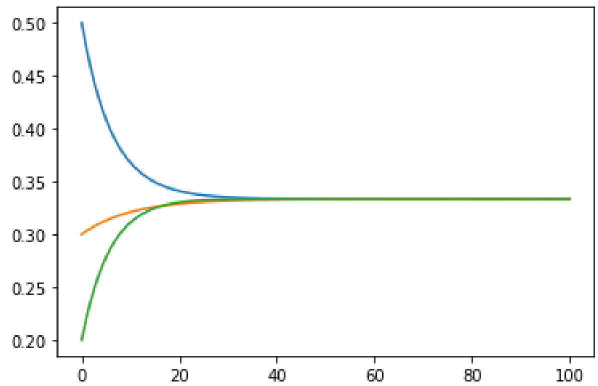
b) Utiliser la fonction précédente pour écrire une fonction `traceLoi2Xt(G,L0,tmax)` qui trace, sur un même graphique, les graphes des fonctions $t \mapsto \mathbb{P}([X_t = i])$ sur le segment $[0, t_{\max}]$ pour i variant de 1 à n, `G` et `L0` représentant, respectivement, la matrice génératrice du processus et la ligne L_0.
On utilisera 1000 points pour les graphes.

Démonstration. On remarque que la loi de X_t est donnée par le vecteur $L_0 M(t)$. En utilisant la fonction précédente, on peut ainsi récupérer la loi de X_t via la commande `np.dot(L0, transition(t, G))`.
On discrétise le segment $[0, t_{\max}]$ en 1000 points, que l'on note $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_{999} = t_{\max}$. Cette discrétisation est stockée dans la variable `abscisse`.
On construit ensuite une grosse matrice $T \in \mathscr{M}_{n,1000}(\mathbb{R})$, dont la colonne j contient la loi de X_{t_j}. Une fois cette matrice construite, on peut tracer le graphe de $t \mapsto \mathbb{P}([X_t = i])$ en traçant la ligne `T[i,:]` au dessus de `abscisse`, ce qui est fait par la commande `plt.plot(abscisse, T[i,:])`.
On propose alors la fonction suivante :

```python
def traceLoi2Xt(G, L0, tmax):
    n = len(G)
    abscisse = np.linspace(0, tmax, 1000)
    T = np.zeros([n,1000])
    for j in range(1000):
        t = abscisse[j]
        vectLoi = np.dot(L0, transition(t, G))
        # vectLoi contient la loi de X_{t_j}
        for i in range(n):
            T[i,j] = vectLoi[i]
    for i in range(n):
        plt.plot(abscisse, T[i,:])
    plt.show()
```

□

c) Si G est la matrice de la partie 1, question ***6.***, l'instruction,
`traceLoi2Xt(1/30*np.array([[-3,1,2],[1,-2,1],[2,1,-3]]),1/10*np.array([5,3,2]),100)`
affiche l'image suivante :



Expliquer en quoi ce graphique est cohérent avec un résultat obtenu précédemment.

Démonstration. Le graphique représente les graphes des fonctions $t \mapsto \mathbb{P}([X_t = i])$, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, où

$$n = 3, \qquad G = \frac{1}{30}\begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix}, \qquad L_0 = \frac{1}{10}\begin{pmatrix} 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}, \qquad t_{\max} = 100$$

Il s'agit du contexte de la question ***6***.
D'après la question ***6.e)***, pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $\lim\limits_{t \to +\infty} \mathbb{P}([X_t = i]) = \dfrac{1}{3}$.
C'est bien ce que l'on observe sur le graphique.

□

d) On veut simuler et représenter, sur un même graphique, les valeurs de $X_0, X_t, \dots, X_{kt}$, pour $t > 0$ et $k \in \mathbb{N}^*$, à partir de la loi de X_0 donnée dans une ligne `L0`. Compléter la fonction suivante pour qu'elle réalise cette tâche :

```
def simulX(t,k,L0,G):
    listeDesT=[] ; listeDesX=[]
    Mt=transition(t,G) ; Lt = L0
    for i in range(k+1):
        listeDesT.append(i*t)
        p=rd.random()
        s=...
        j=0
        while p>...:
            j+=1
            s+=Lt[j]
        Lt=...
        listeDesX.append(j+1)
    plt.plot(listeDesT,listeDesX) ; plt.show()
```

Démonstration. On met en œuvre dans cette fonction la méthode usuelle pour simuler une variable aléatoire finie, utilisant `rd.random()`.
Rappelons brièvement cette méthode. On considère X telle que $X(\Omega) = [\![0, n-1]\!]$ (on part de 0 pour être cohérent avec la numérotation de **Python**) et on note

$$(\mathbb{P}([X = 0]), \dots, \mathbb{P}([X = n-1])) = (p_0, \dots, p_{n-1})$$

On simule alors X en tirant au hasard un nombre p entre 0 et 1 (`p = rd.random()`) et en attribuant à X la valeur j si

$$p_0 + \cdots + p_{j-1} < p \leqslant p_0 + \cdots + p_{j-1} + p_j$$

La loi de X_0 est donnée par L_0, représenté en **Python** par `L0`.
On définit une variable `Lt = L0`. Initialement, le vecteur `Lt` représente donc la loi de X_0. On veut, au cours de la boucle `for i in range(k+1):`, mettre à jour la variable `Lt` pour qu'on puisse simuler $X_t, X_{2t}, \dots, X_{kt}$ successivement.
Supposons avoir simulé $X_0, X_t, \dots, X_{mt}$. Comment simuler $X_{(m+1)t}$?
Notons $j_0, \dots, j_m$ les valeurs prises par $X_0, X_t, \dots, X_{mt}$. Il s'agit alors de simuler la loi conditionnelle de $X_{(m+1)t}$ sachant que l'événement $[X_0 = j_0] \cap \cdots \cap [X_m = j_m]$ est réalisé. Or, d'après (H_2),

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{[X_0=j_0]\cap\cdots\cap[X_m=j_m]}\big(\big[X_{(m+1)t} = j\big]\big) &= \mathbb{P}_{[X_{mt}=j_m]}\big(\big[X_{(m+1)t} = j\big]\big)\\ &= m_{j_m,j}(t)\end{aligned}$$

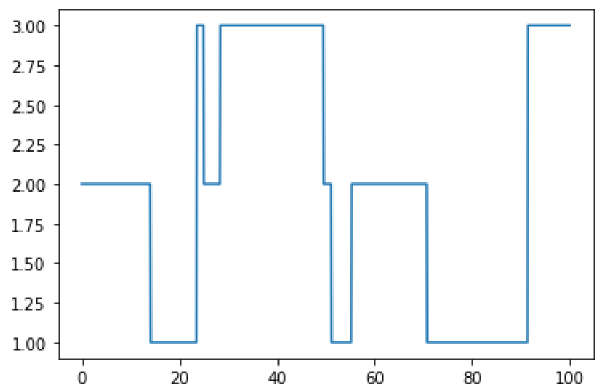
Ainsi, la loi conditionnelle de $X_{(m+1)t}$ sachant que l'événement $[X_0 = j_0] \cap \cdots \cap [X_m = j_m]$ est réalisé est donnée par la ligne numéro j_m de la matrice $M(t)$, représentée en **Python** par `Mt` dans la fonction.
On doit donc mettre à jour `Lt` en écrivant

```
        Lt=Mt[j,:]
```

sachant que la variable aléatoire précédente vient de prendre la valeur $j+1$ et qu'il y a un décalage en **Python** (on commence à numérotée à 0, alors que les $X_0, X_t, \dots, X_{kt}$ prennent leurs valeurs dans $[\![1, n]\!]$)

```
def simulX(t,k,L0,G):
    listeDesT=[] ; listeDesX=[]
    Mt=transition(t,G) ; Lt = L0
    for i in range(k+1):
        listeDesT.append(i*t)
        p=rd.random()
        s=Lt[0]
        j=0
        while p>s:
            j+=1
            s+=Lt[j]
        Lt=Mt[j,:]
        listeDesX.append(j+1)
    plt.plot(listeDesT,listeDesX) ; plt.show()
```

On donne un exemple d'appel de cette fonction, avec $t = 0,1$, $k = 1000$, G et L_0 comme à la question ***9.c)***.



Commentaire

La démarche suivie à cette question est très similaire à celle de la simulation d'une chaîne de Markov. Si l'on note $Y_i = X_{it}$, la suite (Y_i) est une chaîne de Markov. On a discrétisé le processus de Markov continu.

□

Partie 3 - Deux exemples de modélisations

On conserve les notations des deux premières parties.

10. On considère trois états pour le recouvrement d'un crédit bancaire après un défaut de paiement et un accord entre le débiteur et l'organisme de crédit sur la somme à recouvrer :

- 1 - en cours de recouvrement, lorsque le débiteur est en train de régulariser sa créance ;
- 2 - recouvré, lorsque le débiteur a honoré la totalité du montant dû ;
- 3 - non recouvré, lorsque l'organisme de crédit considère que l'argent est définitivement perdu.

La matrice génératrice G du processus de Markov modélisant ce phénomène est $\begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $L_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, α et β étant des réels strictement positifs.

a) Montrer que pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1}G$.

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall i \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(i)$
où $\mathcal{P}(i)$: « $G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1}G$ ».
Initialisation :
D'une part, $G^1 = G$. D'autre part $(-\alpha-\beta)^{1-1}G = (-\alpha-\beta)^0 G = G$, d'où $\mathcal{P}(1)$.
Hérédité : soit $i \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(i)$. Montrons $\mathcal{P}(i+1)$.

$$\begin{aligned} G^{i+1} &= G^i G \\ &= (-\alpha-\beta)^{i-1}GG && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\ &= (-\alpha-\beta)^{i-1}G^2 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} G^2 &= \begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\alpha-\beta & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (-\alpha-\beta)(-\alpha-\beta) & (-\alpha-\beta)\alpha & (-\alpha-\beta)\beta \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-\alpha-\beta)G \end{aligned}$$

donc

$$G^{i+1} = (-\alpha-\beta)^{i-1}(-\alpha-\beta)G = (-\alpha-\beta)^i G$$

d'où $\mathcal{P}(i+1)$.
On a montré par récurrence

$$\boxed{\text{pour tout } i \in \mathbb{N}^*,\ G^i = (-\alpha-\beta)^{i-1}G.}$$

□

b) En déduire que pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et t réel : $(I_3 + \frac{t}{k}G)^k = I_3 + \left(\sum\limits_{i=1}^{k} \binom{k}{i}(\frac{t}{k})^i(-\alpha-\beta)^{i-1}\right) G$.

Démonstration. Soit $t \in \mathbb{R}$. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.
Les matrices I_3 et $\frac{t}{k}G$ commutent (la matrice identité commute avec toutes les matrices). On peut alors appliquer la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned}
(I_3 + \frac{t}{k}G)^k &= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}G\right)^i I_3^{n-i} \\
&= \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i G^i \\
&= \left(\frac{t}{k}\right)^0 G^0 + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i G^i && \textit{(découpage valable car } k \geqslant 0\textit{)} \\
&= I_3 + \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha-\beta)^{i-1} G && \textit{(égalité valable car } i \geqslant 1\textit{)} \\
&= I_3 + \left(\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha-\beta)^{i-1}\right) G
\end{aligned}$$

□

c) Montrer que pour tous $k \in \mathbb{N}^*$ et t réel, $\sum_{i=1}^{n} \binom{k}{i}(\frac{t}{k})^i(-\alpha-\beta)^{i-1} = \dfrac{1-(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k})^k}{\alpha+\beta}$ et en déduire que pour tout $t \geqslant 0$,

$$M(t) = I_3 + \frac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta} G$$

Démonstration. Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et t un réel.

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-\alpha-\beta)^{i-1} \\
=&\sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-(\alpha+\beta))^{i-1} \\
=&\frac{1}{-(\alpha+\beta)} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(\frac{t}{k}\right)^i (-(\alpha+\beta))^{i} && \textit{(}\alpha > 0 \textit{ et } \beta > 0 \textit{ donc } \alpha+\beta \neq 0\textit{)} \\
=&\frac{1}{-(\alpha+\beta)} \sum_{i=1}^{k} \binom{k}{i} \left(-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^i 1^{n-i} \\
=&\frac{1}{-(\alpha+\beta)} \left(\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} \left(-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^i 1^{n-i} - 1\right) \\
=&\frac{1}{-(\alpha+\beta)} \left(\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k - 1\right) && \textit{(par binôme de Newton)} \\
=&\frac{1-(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k})^k}{\alpha+\beta}
\end{aligned}$$

On remarque que l'égalité $M(t) = I_3 + \dfrac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta} G$ est valable si $t = 0$. En effet,

- D'une part, $M(0) = I_3$
- D'autre part, $I_3 + \dfrac{1-\exp(-(\alpha+\beta)\times 0)}{\alpha+\beta} G = I_3 + \dfrac{1-1}{\alpha+\beta} G = I_3$

On suppose dans la suite que $t > 0$.
D'après $(**)$,

$$M(t) = \lim_{k \to +\infty} \left(I_n + \frac{t}{k} G\right)^k$$

et d'après ce qui précède

$$\left(I_n + \frac{t}{k} G\right)^k = I_3 + \frac{1 - (1 - (\alpha+\beta)\frac{t}{k})^k}{\alpha+\beta} G$$

Or,

$$\left(1 - (\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k = \mathrm{e}^{k \ln\left(1-(\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)}$$

et $\lim\limits_{k \to +\infty} -(\alpha+\beta)\frac{t}{k} = 0$, avec $(\alpha+\beta)t \neq 0$, donc on peut écrire que

$$\ln\left(1 - (\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} -(\alpha+\beta)\frac{t}{k}$$

d'où

$$k \ln\left(1 - (\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right) \underset{k \to +\infty}{\sim} -(\alpha+\beta)t$$

ce qui entraîne

$$\lim_{k \to +\infty} k \ln\left(1 - (\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right) = -(\alpha+\beta)t$$

et enfin, par continuité de exp sur $\mathbb{R}$,

$$\lim_{k \to +\infty} \left(1 - (\alpha+\beta)\frac{t}{k}\right)^k = \mathrm{e}^{-(\alpha+\beta)t}$$

On a alors bien

$$\boxed{M(t) = I_3 + \frac{1 - \exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta} G.}$$

□

d) En conclure que pour tout $t \geqslant 0$, $\mathbb{P}([X_t = 1]) = \exp(-(\alpha+\beta)t)$,
$\mathbb{P}([X_t = 2]) = \dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}(1 - \exp(-(\alpha+\beta)t))$ et $\mathbb{P}([X_t = 3]) = \dfrac{\beta}{\alpha+\beta}(1 - \exp(-(\alpha+\beta)t))$

Démonstration. Soit $t \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix}\mathbb{P}([X_t = 1]) & \mathbb{P}([X_t = 2]) & \mathbb{P}([X_t = 3])\end{pmatrix} &= L_t \\
&= L_0 M(t) && \textit{(cf question } \textbf{\textit{8.a)}}\textit{)} \\
&= L_0 \left(I_3 + \frac{1 - \exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta} G\right) && \textit{(cf question } \textbf{\textit{10.c)}}\textit{)}
\end{aligned}$$

Or, $L_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ donc $L_0 \left(I_3 + \dfrac{1 - \exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta} G\right)$ est la première ligne de la matrice $I_3 + \dfrac{1 - \exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta} G$.

$$I_3 + \frac{1 - \exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta} G = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} + \frac{1 - \exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta} \begin{pmatrix}-\alpha-\beta & \alpha & \beta\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

En identifiant les coefficients, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_t = 1]) &= 1 + \frac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta}(-\alpha-\beta) \\ &= 1 - (1-\exp(-(\alpha+\beta)t)) \\ &= \exp(-(\alpha+\beta)t)\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_t = 2]) &= \frac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta}\alpha \\ &= \frac{\alpha}{\alpha+\beta}(1-\exp(-(\alpha+\beta)t))\end{aligned}$$

et enfin

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_t = 3]) &= \frac{1-\exp(-(\alpha+\beta)t)}{\alpha+\beta}\beta \\ &= \frac{\beta}{\alpha+\beta}(1-\exp(-(\alpha+\beta)t))\end{aligned}$$

□

e) En utilisant les résultats de la question ***7.*** de la partie 1, montrer que le temps aléatoire passé en recouvrement suit la loi exponentielle de paramètre $\alpha+\beta$.

Démonstration. $L_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$ donc $X_0 = 1$ (à l'instant 0, le crédit bancaire est en cours de recouvrement).
Si le processus de Markov passe dans l'état 2 ou 3, il devient stationnaire et ne revient jamais dans l'état 1. Ainsi, le temps aléatoire passé en recouvrement coïncide avec le temps initial passé dans l'état 1.
On en déduit que le temps aléatoire passé en recouvrement suit la loi de Y_1 pour la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}_{[X_0=1]}$ (notations de la question ***7***).
D'après la question ***7.b)***, cette loi conditionnelle est la loi exponentielle de paramètre $\beta_1 = -\alpha_{1,1}$.
Dans notre contexte : $\alpha_{1,1} = -\alpha-\beta$, donc

$$\boxed{\text{le temps aléatoire passé en recouvrement suit la loi exponentielle de paramètre } \alpha+\beta.}$$

□

11. On distingue, pour l'accès au crédit d'une organisation, trois niveaux de solvabilité :

- 1 - niveau C ;
- 2 - niveau B ;
- 3 - niveau A.

On suppose que ce niveau évolue dans le temps suivant un processus de Markov avec $G = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-\alpha & \alpha & 0 \\ 0 & -\alpha & \alpha \\ 4\alpha & 0 & -4\alpha\end{pmatrix}$ et $L_0 = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\end{pmatrix}$, $\alpha > 0$. On note aussi $A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4\end{pmatrix}$

a) On admet que $A^3 = \frac{1}{27}\begin{pmatrix}-3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60\end{pmatrix}$. Calculer A^3-2A^2+A (on explicitera A^2). Que peut-on dire du polynôme $U(x) = x^3-2x^2+x$?

Démonstration. Tout d'abord,

$$A^2 = \frac{1}{3^2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{3^2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{aligned} A^3 - 2A^2 + A &= \frac{1}{3^3}\begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix} - \frac{2}{3^2}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & 4 & 16 \end{pmatrix} + \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3^3}\left(\begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix} - 6\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -5 \\ -20 & 4 & 16 \end{pmatrix} + 3^2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 4 \end{pmatrix}\right) \\ &= \frac{1}{3^3}\left(\begin{pmatrix} -3 & -3 & 6 \\ 24 & -3 & -21 \\ -84 & 24 & 60 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -6 & 12 & -6 \\ -24 & -6 & 30 \\ 120 & -24 & -96 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 9 & -9 & 0 \\ 0 & 9 & -9 \\ -36 & 0 & 36 \end{pmatrix}\right) \\ &= 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\text{le polynôme } U \text{ est un polynôme annulateur de } A.}$$

□

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}^*$, on admet qu'il existe un polynôme Q et des réels a, b, c tels que, pour tout x réel : $\left(1 + \frac{\theta}{k}x\right)^k = Q(x)U(x) + ax^2 + bx + c \quad (*)$.

b) Déterminer une factorisation de $U(x)$ et en déduire que $c = 1$ et $\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k = a + b + c$.

Démonstration. On remarque que

$$\begin{aligned} U(x) &= x^3 - 2x^2 + x \\ &= x(x^2 - 2x + 1) \\ &= x(x-1)^2 \end{aligned}$$

Ainsi, 0 est racine simple de U et 1 est racine double de U, ce qui implique que $U(1) = U(0) = 0$ et $U'(1) = 0$.
En évaluant $(*)$ en $x = 0$, on trouve

$$\boxed{c = 1.}$$

En évaluant $(*)$ en $x = 1$, on trouve

$$\boxed{a + b + c = \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k.}$$

□

c) En dérivant la relation $(*)$, montrer que, $\theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} = 2a + b$.
En déduire que $a = \theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k + 1$, $b = 2\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k - \theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2$.

Démonstration. On dérive la relation $(*)$ par rapport à x :

$$Q'(x)U(x) + Q(x)U'(x) + 2ax + b = \frac{\theta}{k} k \left(1 + \frac{\theta}{k} x\right)^{k-1} = \theta \left(1 + \frac{\theta}{k} x\right)^{k-1} \qquad (*')$$

En évaluant $(*')$ en $x = 1$, on trouve (puisque $U'(1) = U(1) = 0$)

$$\boxed{2a + b = \theta \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1}.}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\begin{cases} a + b = \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k - 1 \\ 2a + b = \theta \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} \end{cases}
&\iff \begin{cases} a + b = \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k - 1 \\ \quad - b = \theta \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k + 2 & L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a \qquad = \theta \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} + 1 - \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k & L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ \quad - b = \theta \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k + 2 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} a \qquad = \theta \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k + 1 \\ \qquad b = 2\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k - \theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2 & L_2 \leftarrow -L_2 \end{cases}
\end{aligned}$$

□

d) En conclure que pour tout $t \geqslant 0$,

$$M(t) = \left(1 - (1 + \alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\right) A^2 + ((2 + \alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t} - 2)A + I_3$$

puis préciser la loi de X_t.

Démonstration. Soit $t \geqslant 0$.
D'après l'égalité $(**)$ admise :

$$M(t) = \lim_{k \to +\infty} \left(I_3 + \frac{t}{k} G\right)^k$$

On a montré que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
\left(I_3 + \frac{\theta}{k} A\right)^k &= Q(A)U(A) + aA^2 + bA + cI_3 \\
&= aA^2 + bA + cI_3 & \textit{(car } U(A) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}\textit{)}
\end{aligned}$$

où

$$a = \theta \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - \left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k + 1, \qquad b = 2\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^k - \theta\left(1 + \frac{\theta}{k}\right)^{k-1} - 2, \qquad c = 1$$

On remarque que $G = -\alpha A$. On applique alors le résultat précédent avec $\theta = -\alpha t$, ce qui donne

$$\left(I_3 + \frac{t}{k} G\right)^k = aA^2 + bA + cI_3$$

où

$$a = -\alpha t \left(1 - \frac{\alpha t}{k}\right)^{k-1} - \left(1 - \frac{\alpha t}{k}\right)^k + 1, \qquad b = 2\left(1 - \frac{\alpha t}{k}\right)^k + \alpha t\left(1 - \frac{\alpha t}{k}\right)^{k-1} - 2, \qquad c = 1$$

De manière analogue à la question ***10.c)***, on montre que

$$\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{\alpha t}{k}\right)^{k-1}=\mathrm{e}^{-t\alpha}\qquad\text{et}\qquad\lim_{k\to+\infty}\left(1-\frac{\alpha t}{k}\right)^{k}=\mathrm{e}^{-t\alpha}$$

Par passage à la limite, on obtient :

$$\begin{aligned}M(t)&=(-\alpha t\mathrm{e}^{-\alpha t}-\mathrm{e}^{-\alpha t}+1)A^2+(2\mathrm{e}^{-\alpha t}+\alpha t\mathrm{e}^{-\alpha t}-2)A+I_3\\&=\left(1-(1+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\right)A^2+((2+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}-2)A+I_3\end{aligned}$$

Pour finir, rappelons que $L_t=L_0M(t)$. Or, $L_0=\begin{pmatrix}1&0&0\end{pmatrix}$ donc L_t est la première ligne de la matrice $M(t)$.

$$M(t)=\left(1-(1+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}\right)\frac{1}{3^2}\begin{pmatrix}1&-2&1\\4&1&-5\\-20&4&16\end{pmatrix}+((2+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}-2)\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&-1\\-4&0&4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

En identifiant les coefficients, on obtient :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_t=1])&=\frac{1-(1+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}}{3^2}+\frac{(2+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}-2}{3}+1\\&=\frac{1-(1+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}+3(2+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}-6+9}{9}\\&=\frac{4+(6+3\alpha t-1-\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}}{9}\\&=\frac{4+(5+2\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}}{9}\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\mathbb{P}([X_t=2])&=\frac{2(1+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}-2}{3^2}+\frac{2-(2+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}}{3}\\&=\frac{2(1+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}-2+6-3(2+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}}{9}\\&=\frac{4+(2+2\alpha t-6-3\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}}{9}\\&=\frac{4-(4+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}}{9}\end{aligned}$$

et enfin

$$\mathbb{P}([X_t=3])=\frac{1-(1+\alpha t)\mathrm{e}^{-\alpha t}}{9}$$

Commentaire

On peut vérifier à vue que $\mathbb{P}([X_t=1])+\mathbb{P}([X_t=2])+\mathbb{P}([X_t=3])=1$. Le résultat semble correct.

□

Partie 4 - Démonstration de l'égalité $(**)$ admise dans la partie 2

On utilise les notations et définitions des deux premières parties.

- On définit pour $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $\|A\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|\right)$ c'est-à-dire la plus grande valeur que prend $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$ lorsque i décrit $\{1,\ldots,n\}$.
- On admet que si $(A_k)_{k\geqslant 1}$ est une suite de matrices appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et A appartenant aussi à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, $A = \lim\limits_{k\to+\infty} A_k$ si et seulement si $\lim\limits_{k\to+\infty} \|A_k - A\| = 0$.

Commentaire

Cette dernière partie introduit, sans le dire, une *norme matricielle.*
Si E est un espace vectoriel, on définit une *norme* (vectorielle) sur E comme étant une application $\|.\| : E \to \mathbb{R}^+$ vérifiant trois axiomes :
- $\|0_E\| = 0$ et pour tout $u \neq 0_E$, $\|u\| > 0$ (séparation).
- Pour tout $(u,v) \in E^2$, $\|u+v\| \leqslant \|u\| + \|v\|$ (inégalité triangulaire, cf question ***14.a)***).
- Pour tout $u \in E$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\|\lambda u\| = |\lambda|\,\|u\|$ (absolue homogénéité).

Une telle application permet de donner un sens précis à la notion de *longueur d'un vecteur.* D'après les axiomes, seul le vecteur nul à une longueur nulle.
Remarquons que la valeur absolue est une norme sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}$. D'une certaine manière, le concept de norme généralise la valeur absolue à un espace vectoriel quelconque. Dans $\mathbb{R}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = a$ si et seulement si $\lim\limits_{k\to+\infty} |a_k - a| = 0$. Le résultat admis sur les suites de matrices est une généralisation de ce fait.

On peut toujours créer une distance à partir d'une norme. Il suffit de définir l'application $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$ par

$$\forall (u,v) \in E^2,\ d(u,v) = \|u-v\|$$

Une application $d : E^2 \to \mathbb{R}^+$, pour être appelée *distance*, doit vérifier les trois axiomes :
- Pour tout $(u,v) \in E^2$, $d(u,v) = d(v,u)$ (symétrie).
- Pour tout $(u,v) \in E^2$, $d(u,v) = 0 \iff u = v$ (séparation).
- Pour tout $(u,v,w) \in E^3$, $d(u,v) \leqslant d(u,w) + d(w,v)$ (inégalité triangulaire).

Avec le concept de distance, on peut écrire $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = a$ si et seulement si $\lim\limits_{k\to+\infty} d(a_k,a) = 0$.
La suite (a_k) converge vers a si et seulement si la distance entre a_k et a tend vers 0, ce qui est tout à fait naturel. Les mots sont donc bien choisis.

Revenons maintenant à l'espace $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Il s'agit d'un espace vectoriel, mais on peut aussi faire le produit de deux matrices, ce qui en fait une algèbre (structure algébrique hors programme). La question ***14.c)*** montre que la norme introduite est une *norme d'algèbre* : elle est sous-multiplicative.
Il existe beaucoup de normes matricielles sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. La norme choisie dans l'énoncé est la norme *subordonnée* à la norme infinie de $\mathbb{R}^n$, mais expliquer précisément ces termes nous emmènerait un peu trop loin.

12. *Un exemple* - Si $A = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -4 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, montrer que $\|A\| = 2$.

Démonstration.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

donc

- $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{1,j}| = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 1$
- $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{2,j}| = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- $\sum\limits_{j=1}^{n} |a_{3,j}| = \frac{4}{3} + \frac{2}{3} = 2$

d'où

$$\boxed{\|A\| = \max\left(1, \frac{2}{3}, 2\right) = 2.}$$

□

13. Soit $t \geqslant 0$.

a) Établir $\|M(t)\| = 1$.

Démonstration. Soit $i \in [\![1, n]\!]$. Soit $r \in S_i$.

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}(t)| &= \sum_{j=1}^{n} \left|\mathbb{P}_{[X_r=i]}([X_{r+t} = j])\right| \\ &= \sum_{j=1}^{n} \mathbb{P}_{[X_r=i]}([X_{r+t} = j]) && \textit{(car } \mathbb{P}_{[X_r=i]}([X_{r+t} = j]) \geqslant 0\textit{)} \\ &= 1 && \textit{(cf question 2.)} \end{aligned}$$

D'où

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |m_{i,j}(t)| \right) = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} (1) = 1$$

i.e.

$$\boxed{\|M(t)\| = 1.}$$

Commentaire

Il est étrange de rappeler l'utilité de la question ***2*** à la question suivante mais pas à celle-ci, alors qu'on peut également l'utiliser pour ne pas avoir à refaire l'argument du système complet d'événements.

□

b) En utilisant la question ***2.*** de la partie 1, montrer que pour $k \in \mathbb{N}^*$ assez grand, $\|I_n + \frac{t}{k} G\| = 1$.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Notons $A_k = I_n + \frac{t}{k}G = (a_{i,j}(k))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.
Pour tout $(i,j) \in \{1,\dots,n\}^2$,

$$a_{i,j}(k) = \begin{cases} \frac{t}{k}\alpha_{i,j} & \text{si } j \neq i \\ 1 + \frac{t}{k}\alpha_{i,i} & \text{si } j = i \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $i \in \{1,\dots,n\}$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}(k)| &= |a_{i,i}(k)| + \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} |a_{i,j}(k)| \\
&= \left|1 + \frac{t}{k}\alpha_{i,i}\right| + \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} \left|\frac{t}{k}\alpha_{i,j}\right| \\
&= \left|1 + \frac{t}{k}\alpha_{i,i}\right| + \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} \frac{t}{k}\alpha_{i,j} && \textit{(car pour tout } i \neq j,\ \alpha_{i,j} \geqslant 0, \textit{ cf } (H_4)) \\
&= 1 + \frac{t}{k}\alpha_{i,i} + \sum_{\substack{1\leqslant j\leqslant n\\ j\neq i}} \frac{t}{k}\alpha_{i,j} && \textit{(pour } k \textit{ assez grand, car } \lim_{k\to+\infty} 1 + \frac{t}{k}\alpha_{i,i} = 1) \\
&= 1 + \frac{t}{k}\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} \\
&= 1 && (\sum_{j=1}^{n} \alpha_{i,j} = 0, \textit{ cf question 2.})
\end{aligned}$$

D'où, pour tout k assez grand,

$$\boxed{\|I_n + \tfrac{t}{k}G\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} (1) = 1.}$$

□

14. Soient $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ et $B = (b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ deux matrices appartenant à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

a) Établir que $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$.

Démonstration. $A + B = (a_{i,j} + b_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ donc

$$\|A + B\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| \right)$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j} + b_{i,j}| &\leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + |b_{i,j}| && \textit{(par inégalité triangulaire)} \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| + \sum_{j=1}^{n} |b_{i,j}| \\
&\leqslant \|A\| + \|B\|
\end{aligned}$$

Le terme de droite ne dépend pas de i, donc on peut passer au max :

$$\boxed{\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|.}$$

□

b) Montrer que $\|A\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$.

Démonstration. $\|A\| = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \right)$ et l'ensemble $[\![1, n]\!]$ est fini donc il existe un entier $i_0 \in [\![1, n]\!]$ tel que

$$\|A\| = \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}|$$

Or, $\sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq i_0}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \geqslant 0$ (somme de termes positifs) donc

$$\sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |a_{i_0,j}| + \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ i \neq i_0}} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|$$

d'où

$$\boxed{\|A\| \leqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}|.}$$

□

c) Démontrer que, $\|AB\| \leqslant \|A\| \|B\|$ puis que pour tout entier naturel n, $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$.

Démonstration. Notons $C = AB = (c_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, où

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j}$$

Par définition,

$$\begin{aligned} \|AB\| &= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} |c_{i,j}| \right) \\ &= \max_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right| \right) \end{aligned}$$

Or, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} b_{k,j} \right| &\leqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \, |b_{k,j}| && \textit{(par inégalité triangulaire)} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}| && \textit{(interversion de sommes)} \\ &\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \, \|B\| && \textit{(car } \sum_{j=1}^{n} |b_{k,j}| \leqslant \|B\| \textit{)} \\ &\leqslant \|B\| \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \\ &\leqslant \|B\| \|A\| && \textit{(car } \sum_{k=1}^{n} |a_{i,k}| \leqslant \|A\| \textit{)} \end{aligned}$$

Le terme de droite ne dépend pas de i, donc on peut passer au max :

$$\boxed{\|AB\| \leqslant \|A\|\|B\|.}$$

Montrons par récurrence : $\forall n \in \mathbb{N}, \mathcal{P}(n)$
où $\mathcal{P}(n)$: « $\|A^n\| \leqslant \|A\|^n$ ».
<u>Initialisation</u> :
D'une part $\|A^0\| = \|I_n\| = 1$ et d'autre part $\|A\|^0 = 1$ d'où $\mathcal{P}(0)$.
<u>Hérédité</u> : soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $\mathcal{P}(n)$. Montrons $\mathcal{P}(n+1)$.

$$\begin{aligned}
\|A^{n+1}\| &= \|A^n A\| \\
&\leqslant \|A^n\|\|A\| && \textit{(en appliquant le résultat précédent avec } B = A^n\textit{)} \\
&\leqslant \|A\|^n\|A\| && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&\leqslant \|A\|^{n+1}
\end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(n+1)$.
On a montré par récurrence

$$\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ \|A^n\| \leqslant \|A\|^n.}$$

Commentaire

Les questions ***14.a)***, ***14.b)*** et ***14.c)*** mettent en jeu des raisonnements sur le max qui sont classiques en filière scientifique, mais assez éloignés de ce qui se fait habituellement en prépa ECG, voie maths appliquée. Il s'agit donc de questions difficiles et seuls les candidat·es ayant un fort recul sur les notions du programme pourront les aborder avec sérénité.
Il fallait donc aller chercher les questions simples de cette partie, en particulier les récurrences.

□

d) Vérifier que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A^{k+1} - B^{k+1} = A(A^k - B^k) + (A - B)B^k$.

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
A(A^k - B^k) + (A - B)B^k &= A^{k+1} - AB^k + AB^k - B^{k+1} \\
&= A^{k+1} - B^{k+1}
\end{aligned}$$

Commentaire

Démontrer cette formule ne pose aucune difficulté. Le concepteur a rajouté cette question non pas pour tester les candidat·es, mais parce qu'il a jugé, avec raison, qu'aucun·e candidat·e n'aurait été en mesure de penser tout·e seul·e à cette factorisation pour faire la prochaine question.

□

e) On pose $c = \max(\|A\|, \|B\|)$. Montrer, par récurrence sur k, que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\|A^k - B^k\| \leqslant kc^{k-1}\|A - B\|$$

Démonstration. Montrons par récurrence : $\forall k \in \mathbb{N}^*, \mathcal{P}(k)$
où $\mathcal{P}(k)$: « $\|A^k - B^k\| \leqslant kc^{k-1}\|A - B\|$ ».
<u>Initialisation</u> :
D'une part, $\|A^1 - B^1\| = \|A - B\|$ et d'autre part $1c^{1-1}\|A - B\| = \|A - B\|$, d'où $\mathcal{P}(1)$.
<u>Hérédité</u> : soit $k \in \mathbb{N}^*$. Supposons $\mathcal{P}(k)$. Montrons $\mathcal{P}(k+1)$.

$$\begin{aligned}
\|A^{k+1} - B^{k+1}\| &= \|A(A^k - B^k) + (A - B)B^k\| && \textit{(cf question } \textbf{\textit{14.d)}}\textit{)} \\
&\leqslant \|A(A^k - B^k)\| + \|(A - B)B^k\| && \textit{(cf question } \textbf{\textit{14.a)}}\textit{)} \\
&\leqslant \|A\|\|A^k - B^k\| + \|A - B\|\|B\|^k && \textit{(cf question } \textbf{\textit{14.c)}}\textit{)} \\
&\leqslant c\|A^k - B^k\| + \|A - B\|c^k && (0 \leqslant \|B\| \leqslant c \textit{ donc } 0 \leqslant \|B\|^k \leqslant c^k) \\
&\leqslant ckc^{k-1}\|A - B\| + \|A - B\|c^k && \textit{(par hypothèse de récurrence)} \\
&\leqslant kc^k\|A - B\| + \|A - B\|c^k \\
&\leqslant (k+1)c^k\|A - B\|
\end{aligned}$$

d'où $\mathcal{P}(k+1)$.
On a montré par récurrence

$$\boxed{\text{pour tout } k \in \mathbb{N}^*,\ \|A^k - B^k\| \leqslant kc^{k-1}\|A - B\|.}$$

□

15. Soit t un réel positif et $k \in \mathbb{N}^*$.

Commentaire

La variable k est muette dans les questions qui suivent, seule la variable t devrait être fixée ici.

a) Justifier que $\left\| M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)\right\| \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k}\right)$.

Démonstration. Notons, pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $A_k = M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right) = (a_{i,j}(k))_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

Soit $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. Montrons que $a_{i,j}(k) \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k}\right)$.

- Premier cas : $j = i$. Alors

$$a_{i,i}(k) = m_{i,i}\left(\frac{t}{k}\right) - \left(1 + \frac{t}{k}\alpha_{i,i}\right) = m_{i,i}\left(\frac{t}{k}\right) - 1 - \frac{t}{k}\alpha_{i,i}$$

Soit $r \in S_i$, de sorte que

$$\begin{aligned}
m_{i,i}\left(\frac{t}{k}\right) &= \mathbb{P}_{[X_r=i]}\left(\left[X_{r+\frac{t}{k}} = i\right]\right) \\
&= 1 + \alpha_{i,i}\frac{t}{k} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right) && \textit{(cf } (H_5)\textit{, } t \textit{ étant une constante)}
\end{aligned}$$

d'où

$$\boxed{a_{i,i}(k) \underset{k\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{k}\right).}$$

- Deuxième cas : $j \neq i$. Alors
$$a_{i,j}(k) = m_{i,j}\left(\frac{t}{k}\right) - \frac{t}{k}\alpha_{i,j}$$
Soit $r \in S_i$, de sorte que
$$\begin{aligned} m_{i,j}\left(\frac{t}{k}\right) &= \mathbb{P}_{[X_r=i]}\left(\left[X_{r+\frac{t}{k}} = j\right]\right) \\ &= \alpha_{i,j}\frac{t}{k} + \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right) \qquad \textit{(cf } (H_4)\textit{, } t \textit{ étant une constante)} \end{aligned}$$
d'où
$$\boxed{a_{i,j}(k) = \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right).}$$

On en déduit que, pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $|a_{i,j}(k)| = \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)$.

Il suit que, pour tout $i \in [\![1,n]\!]$,
$$\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}(k)| = n \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right) = \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)$$
et donc
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}(k)| = n \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right) = \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right)$$
Or, d'après la question ***14.b)***,
$$0 \leqslant \left\|M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)\right\| = \|A_k\| \leqslant \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{i,j}(k)|$$
donc, par théorème d'encadrement,
$$\lim_{k\to+\infty} k\left\|M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)\right\| = 0$$
ce qui donne bien
$$\boxed{\left\|M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)\right\| = \underset{k\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{k}\right).}$$

□

b) Montrer que pour tout k assez grand,
$$\left\|M\left(\frac{t}{k}\right)^k - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k\right\| \leqslant k\left\|M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)\right\|$$

Démonstration. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Notons $c_k = \max\left(\left\|M\left(\frac{t}{k}\right)\right\|, \left\|I_n + \frac{t}{k}G\right\|\right)$.

D'après la question ***13.a)***, $\left\|M\left(\frac{t}{k}\right)\right\| = 1$.

D'après la question ***13.b)***, pour k assez grand, $\left\|I_n + \frac{t}{k}G\right\| = 1$.

Donc, pour k assez grand, $c_k = 1$.

Soit k assez grand. On applique la question ***14.e)*** :

$$\begin{aligned}\left\| M\left(\frac{t}{k}\right)^k - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k \right\| &\leqslant k c_k^{k-1} \left\| M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right) \right\| \\ &\leqslant k \left\| M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right) \right\|\end{aligned}$$

□

c) En conclure que $M(t) = \lim\limits_{k\to+\infty} \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k$.

Démonstration. D'après la question précédente :

$$0 \leqslant \left\| M\left(\frac{t}{k}\right)^k - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k \right\| \leqslant k \left\| M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right) \right\|$$

D'après la question ***15.a)***,

$$\lim_{k\to+\infty} k \left\| M\left(\frac{t}{k}\right) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right) \right\| = 0$$

donc, par théorème d'encadrement,

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| M\left(\frac{t}{k}\right)^k - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k \right\| = 0$$

Or, d'après la question ***8.d)***,

$$M\left(\frac{t}{k}\right)^k = M\left(k\frac{t}{k}\right) = M(t)$$

Donc,

$$\lim_{k\to+\infty} \left\| M(t) - \left(I_n + \frac{t}{k}G\right)^k \right\| = 0$$

D'après le résultat admis en début de partie 4, on peut conclure que

$$\boxed{M(t) = \lim_{k\to+\infty} \left(I_n + \tfrac{t}{k}G\right)^k.}$$

□