Thèmes particuliers

I. Moyenne de Césaro

Exercice 1

Partie A.

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite croissante et convergente de limite ℓ. On pose pour tout entier n non nul

$$v_n = \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}{n}.$$

1. a. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{n(n+1)} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} (u_{n+1} - u_k)$.

b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. a. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, u_n \leqslant \ell$.

b. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée.

3. Que peut-on en déduire pour la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, v_{2n} \geqslant \dfrac{u_n + v_n}{2}$.
5. En déduire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ.

Partie B.

On admet que, si une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers le réel ℓ, alors on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} a_j = \ell$$

On pourra essayer de le démontrer mais c'est vraiment difficile.
On se propose d'étudier la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par la donnée de $u_1 \in [0,1[$ et par la relation, valable pour tout entier naturel n non nul n : $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 1}{2}$.

1. Prouver que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et donner sa limite.
2. Pour tout entier naturel non nul n, on pose $v_n = 1 - u_n$.

a. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right)$.

b. Étudier la convergence de la suite $(nv_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. c. En déduire que $u_n = 1 - \dfrac{2}{n} + \underset{n\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Pour que cet exercice soit profitable, il n'est pas recommandé d'utiliser la correction trop tôt. La recherche de la solution a beaucoup plus d'intérêt que la solution elle-même.

Partie A.

1. a. On a d'une part

$$
\begin{aligned}
v_{n+1}-v_n &= \frac{u_1+u_2+\cdots+u_n+u_{n+1}}{n+1}-\frac{u_1+u_2+\cdots+u_n}{n} \\
&= \frac{n\left(u_1+u_2+\cdots+u_n+u_{n+1}\right)}{n(n+1)}-\frac{(n+1)\left(u_1+u_2+\cdots+u_n\right)}{n(n+1)} \\
&= \frac{(n-(n+1))u_1+(n-(n+1)u_2+\cdots+(n-(n+1))u_n}{n(n+1)}+\frac{u_{n+1}}{(n+1)} \\
&= \frac{-u_1-u_2-\cdots-u_n}{n(n+1)}+\frac{u_{n+1}}{(n+1)}.
\end{aligned}
$$

Regardons maintenant la somme (bien noter que $\sum_{k=1}^{n} u_{n+1}$ est une somme sur k de nombres qui ne dépendent pas de k).

$$
\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n}\left(u_{n+1}-u_k\right)=\frac{n}{n(n+1)} u_{n+1}-\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} u_k=\frac{1}{n+1} u_{n+1}-\frac{1}{n(n+1)} \sum_{k=1}^{n} u_k .
$$

Les deux quantités coincident donc.

b. Puisque la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, chaque terme $u_{n+1}-u_k$ (pour tout k) est positif. Donc $v_{n+1}-v_n \geqslant 0$ et la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

2. a. Une suite croissante qui converge est toujours inférieure à sa limite. C'est presque évident mais montrons le proprement. Raisonnons par l'absurde et supposons donc que pour un certain n_0 (la négation de pour tout n, on a la propriété $\mathcal{P}(n)$ est il existe n_0 tel qu'on n'ait pas $\mathcal{P}(n)$) $u_{n_0}>l$. Alors puisque $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante, on a, pour $n \geqslant n_0, u_n \geqslant u_{n_0}$. Puis, comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers ℓ, on obtient $\ell \geqslant u_{n_0}>l$ et la contradiction cherchée.

   b. Prenons l'expression

$$
v_n=\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} u_k
$$

Chacun des termes de la somme est donc inférieur à ℓ d'après la question précédente. Donc

$$
v_n \leqslant \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \ell=\frac{n \ell}{n}=\ell
$$

3. On en déduit que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge car elle est croissante et majorée (théorème de la convergence monotone).
4. On a

$$
\begin{aligned}
v_{2n} &= \frac{1}{2n} \sum_{k=1}^{2n} u_k \\
&= \frac{1}{2n}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k+\sum_{k=n+1}^{2n} u_k\right) \\
&\geqslant \frac{1}{2} v_n+\frac{1}{2n} \sum_{k=n+1}^{2n} u_n .
\end{aligned}
$$

En effet pour chaque $k>n$, on a $u_k \geqslant u_n$ car la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. On obtient donc

$$
v_{2n} \geqslant \frac{1}{2}\left(v_n\right)+\frac{n u_n}{2n}=\frac{u_n+v_n}{2}
$$

5. Puisque $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que $v_n \leqslant \ell$ pour tout n, on sait que $\lim_{n\to+\infty} v_n \leqslant \ell$. La question précédente va nous servir à montrer l'inégalité inverse. On a $\lim_{n\to+\infty} v_{2n}=\lim_{n\to+\infty} v_n$. Ainsi en passant à la limite dans l'inégalité de la question 4., on obtient

$$\lim_{n \to +\infty} v_n \geqslant \frac{\lim_{n \to +\infty} v_n + \ell}{2}$$

d'où
ou encore

$$\frac{\lim_{n \to +\infty} v_n}{2} \geqslant \frac{\ell}{2}$$

$$\lim_{n \to +\infty} v_n \geqslant \ell$$

En combinant les deux inégalités, on obtient $\lim_{n \to +\infty} v_n = \ell$.

Partie B.

1. On cherche à appliquer le théorème de convergence monotone. Montrons que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et majorée. On a

$$u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2 + 1}{2} - u_n = \frac{u_n^2 + 1 - 2u_n}{2} = \frac{(u_n - 1)^2}{2} \geqslant 0$$

Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

Montrons par récurrence sur n que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est majorée par 1. Pour l'initialisation, c'est immédiat, u_0 est donné inférieur à 1 . Pour l'hérédité, supposons que $u_n \leqslant 1$ pour un certain entier n. Alors

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 1}{2} \leqslant \frac{1^2 + 1}{2} = 1.$$

2. a. On a

$$\begin{aligned}
\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} &= \frac{1}{1 - u_{n+1}} - \frac{1}{1 - u_n} \\
&= \frac{1}{1 - \frac{1 + u_n^2}{2}} - \frac{1}{1 - u_n} \\
&= \frac{1}{\frac{1 - u_n^2}{2}} - \frac{1}{1 - u_n} \\
&= \frac{2}{1 - u_n^2} - \frac{1}{1 - u_n} \\
&= \frac{2}{1 - u_n^2} - \frac{1 + u_n}{(1 + u_n)(1 - u_n)} \\
&= \frac{2 - 1 - u_n}{1 - u_n^2} \\
&= \frac{1 - u_n}{1 - u_n^2} \\
&= \frac{1}{1 + u_n}
\end{aligned}$$

Maintenant on sait que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 1 . On en déduit que

$$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right) = \frac{1}{2}$$

b. Les deux dernières questions sont un peu plus difficiles. On utilise maintenant le résultat admis au début de la partie B : On sait que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k} \right) = \lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{v_{n+1}} - \frac{1}{v_n} \right) = \frac{1}{2}$$

Or la somme est une somme télescopique et on a

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{v_{k+1}} - \frac{1}{v_k} \right) = \frac{1}{n v_{n+1}} - \frac{1}{n v_1}$$

On voudrait maintenant prendre un équivalent mais on n'a pas le droit de sommer des équivalents. Alors écrivons plutôt

$$\frac{1}{nv_{n+1}} - \frac{1}{nv_1} = \frac{1}{2} + \underset{n\to+\infty}{\mathbf{o}}(1)$$

Puis

$$\frac{1}{nv_{n+1} = \frac{1}{2}} + \underset{n\to+\infty}{\mathbf{o}}(1) + \frac{1}{nv_1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}$$

Et par ailleurs

$$\frac{1}{nv_{n+1}} \sim n \to +\infty \frac{1}{nv_n}$$

On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{nv_n} = \dfrac{1}{2}$ donc que $\lim\limits_{n\to+\infty} (nv_n) = 2$

c. On a

$$nv_n = n - nu_n = 2 + \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(1)$$

Donc

$$nu_n = n - 2 + \underset{+\infty}{\mathbf{o}}(1)$$

Puis, en divisant par n (attention aux règles sur les o ())

$$u_n = 1 - \frac{2}{n} + \underset{+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{n}\right)$$

II. Théorème d'Abel

Exercice 2

Un théorème d'Abel. Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites. On note

$$S_N=\sum_{k=0}^{N} a_k b_k \quad \text{et} \quad B_N=\sum_{k=0}^{N} b_k$$

a. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(a_{k+1}-a_k\right) b_k=\left(a_n b_n-a_0 b_0\right)-\sum_{k=0}^{n-1} a_{k+1}\left(b_{k+1}-b_k\right)$$

Indication : Écrire pour tout $k, a_{k+1} b_{k+1}-a_k b_k=a_{k+1}\left(b_{k+1}-b_k\right)+\left(a_{k+1}-a_k\right) b_k$ puis sommer.
b. Montrer alors que

$$S_N=a_N B_N-\sum_{k=0}^{N-1} B_k\left(a_{k+1}-a_k\right)$$

Ce résultat est connu sous le nom de Lemme d'Abel.
c. À quelle opération de calcul intégral cette astuce vous fait-elle penser ?
d. On suppose que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 , que la série de terme $(a_{n+1}-a_n)$ est absolument convergente et que $(B_n)_{n\in N}$ est une suite bornée. Montrer que la série de terme général $a_n b_n$ est convergente.
C'est le théorème d'Abel. Il existe bien d'autres versions de ce théorème qui utilisent toutes la même technique. Il ne faut pas se souvenir de l'énoncé mais plutôt de la stratégie.

2. Applications.

a. Montrer que le critère des séries alternées est un cas particulier du théorème d'Abel : si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite décroissante de limite nulle, alors $\sum(-1)^n a_n$ converge.
b. Montrer que la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ est convergente.
Pour que cet exercice soit profitable, il n'est pas recommandé d'utiliser la correction trop tôt. La recherche de la solution a beaucoup plus d'intérêt que la solution elle-même.

1. a. Comme indiqué, on part de la formule

$$a_{k+1} b_{k+1}-a_k b_k=a_{k+1}\left(b_{k+1}-b_k\right)+\left(a_{k+1}-a_k\right) b_k$$

que l'on somme. La somme de gauche est télescopique et on a

$$\sum_{k=0}^{n-1}\left(a_{k+1} b_{k+1}-a_k b_k\right)=a_n b_n-a_0 b_0$$

La formule de l'énoncé s'en déduit.
b. On a

$$S_N=\sum_{k=0}^{N} a_k b_k=\sum_{k=0}^{N} a_k\left(B_k-B_{k-1}\right)$$

et on applique à cette somme le résultat précédent. Il vient

$$S_N=a_N B_N-a_0 B_0-\sum_{k=0}^{N} B_{k-1}\left(a_k-a_{k-1}\right)$$

avec la convention que $B_{-1}=0$. On fait maintenant un changement d'indices. On obtient

$$S_N=a_N B_N-\sum_{k=0}^{N-1} B_k\left(a_{k+1}-a_k\right)$$

ce qu'on voulait (remarquer que $B_0=0$).

c. On vient en fait de faire "une intégration par parties" discrète (ou une sommation par parties). En effet la suite $(B_{n+1}-B_n)$ représente la "dérivée" de la suite (B_n). L'expression

$$S_N=\sum_{k=0}^{N} a_k\left(B_k-B_{k-1}\right)$$

représente donc le produit d'une suite par "sa dérivée". Dans l'expression finale

$$S_N=a_N B_N-\sum_{k=0}^{N-1} B_k\left(a_{k+1}-a_k\right)$$

il y a la partie toute intégrée $a_N b_N$ et la partie $-\sum_{k=0}^{N-1} B_k\left(a_{k+1}-a_k\right)$ sur laquelle on a fait basculé la dérivée sur la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Bien sûr, il s'agit seulement d'une analogie et cet argument n'a pas vocation a être rigoureux.

d. nous allons montrer que dans l'expression

$$S_N=a_N B_N-\sum_{k=0}^{N-1} B_k\left(a_{k+1}-a_k\right)$$

S_N apparaît comme la somme de deux suites convergentes. La première $(a_N b_N)_N$ est le produit d'une suite qui tend vers 0 et d'une suite bornée, elle converge donc (vers 0). La seconde

$$-\sum_{k=0}^{N-1} B_k\left(a_{k+1}-a_k\right)$$

est bien une série convergente puisque, si M est un majorant de la suite (B_N), on a

$$\left|-\sum_{k=0}^{N-1} B_k\left(a_{k+1}-a_k\right)\right| \leqslant \sum_{k=0}^{N-1} M\left|a_{k+1}-a_k\right|=M \sum_{k=0}^{N-1}\left|a_{k+1}-a_k\right|$$

qui est convergente.

2. a. Vérifions qu'on peut appliquer le théorème d'Abel avec $b_n=(-1)^n$ et a_n. La suite des sommes partielles de b_n prend alternativement les valeurs 1 et 0 (selon si N est pair ou impair), elle est donc bornée. Quand à la série de terme général $|a_{k+1}-a_k|=a_k-a_{k+1}$ (puisque $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante), c'est une série télescopique qui est de même nature que la suite $(-a_n)_n$ donc converge vers 0 .

b. On est dans le cas où on peut directement appliquer le théorème des séries alternées.

III. Fonction indicatrice

Exercice 3

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et A un évènement.
On appelle variable indicatrice de l'évènement A la variable aléatoire notée $\mathbf{1}_A$ définie par

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in A \\ 0, & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

1. Reconnaître la loi de $\mathbf{1}_A$ et son espérance.
2. Soient A et B deux évènements. Montrer que $\mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A\cap B}$.

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On introduit la fonction indicatrice de I avec la formule

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in I \\ 0, & \text{si } x \notin I \end{cases}$$

Soient X une variable aléatoire réelle de densité f et $s \in \mathbb{R}$. On remarque alors que

$$\mathbf{1}_{[X\geq s]} = \chi_{[s;+\infty[}(X)$$

3. Soient X une variable aléatoire réelle de densité f et $s \in \mathbb{R}$. Soit $Y = g(X)$ une autre variable aléatoire. Justifier soigneusement, que $\mathbf{1}_{[X\geq s]}Y$ admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[s;+\infty[}(x)g(x)f(x)\mathrm{d}x = \int_{s}^{+\infty} g(x)f(x)\mathrm{d}x$$

converge.

Soient $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ un espace probabilisé et A un évènement.
On appelle variable indicatrice de l'évènement A la variable aléatoire notée $\mathbf{1}_A$ définie par

$$\mathbf{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega \in A \\ 0, & \text{si } \omega \notin A \end{cases}$$

1. La variable $\mathbf{1}_A$ prend la valeur 0 ou 1 ; c'est donc une variable de Bernoulli. Son paramètre est égal à la probabilité de prendre la valeur 1

$$P\left(\{\omega : \mathbf{1}_A(\omega) = 1\}\right) = P(\{\omega : \omega \in A\}) = P(A)$$

En particulier,

$$E\left(\mathbf{1}_A\right) = P(A), \quad V\left(\mathbf{1}_A\right) = P(A)(1 - P(A)).$$

2. Soient A et B deux évènements.

$$\begin{aligned} \mathbf{1}_A(\omega) \cdot \mathbf{1}_B(\omega) = 1 &\iff \mathbf{1}_A(\omega) = 1 \quad \text{ et } \mathbf{1}_B(\omega) = 1 \\ &\iff \omega \in A \text{ et } \omega \in B \\ &\iff \omega \in A \cap B \\ &\iff \mathbf{1}_{A\cap B}(\omega) = 1 \end{aligned}$$

Ayant raisonné par équivalences, on a bien

$$\mathbf{1}_A \times \mathbf{1}_B = \mathbf{1}_{A\cap B}$$

3. On calcule en utilisant les deux questions précédentes

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}\left(\mathbf{1}_A, \mathbf{1}_B\right) &= E\left(\mathbf{1}_A \cdot \mathbf{1}_B\right) - E\left(\mathbf{1}_A\right) E\left(\mathbf{1}_B\right) \\ &= E\left(\mathbf{1}_{A\cap B}\right) - E\left(\mathbf{1}_A\right) E\left(\mathbf{1}_B\right) \\ &= P(A \cap B) - P(A)P(B). \end{aligned}$$

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. On introduit la fonction indicatrice de I avec la formule

$$\chi_I(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \in I \\ 0, & \text{si } x \notin I \end{cases}$$

Soient X une variable aléatoire réelle de densité f et $s \in \mathbb{R}$. On remarque alors que

$$\mathbf{1}_{[X \geq s]} = \chi_{[s;+\infty[}(X)$$

4. On observe que

$$\mathbf{1}_{[X \geq s]} Y = \mathbf{1}_{[X \geq s]} g(X) = \chi_{[s;+\infty[}(X) g(X)$$

Ainsi, par le théorème de transfert, cette variable aléatoire admet une espérance si et seulement si l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \chi_{[s;+\infty[}(x) g(x) f(x) \mathrm{d}x$$

converge.
Comme $\chi_{[s;+\infty[}(x) = 0$ si $x < s$ et 1 si $x \geq s$, cette même intégrale est égale à

$$\int_s^{+\infty} g(x) f(x) \mathrm{d}x.$$

Exercice 4

1. Question de cours : Rappeler l'inégalité de Markov.

Un fabricant cherche à optimiser le prix de vente p de son produit. Il suppose que chaque client potentiel est prêt à payer un prix aléatoire X pour acheter le produit. Si X est supérieur ou égal à p, la vente a lieu le fabricant encaisse p euros ; sinon la vente n'a pas lieu et le fabricant n'encaisse aucun chiffre d'affaires.
On suppose que X admet une densité de probabilité f continue sur $\mathbb{R}_+$et une espérance finie. On note F la fonction de répartition et Z_p le chiffre d'affaires réalisé si le prix de son produit est fixé à la valeur p et on définit la fonction g sur $\mathbb{R}_+$ par $g(p) = E\left(Z_p\right)$.

2. Exprimer Z_p à l'aide de $\mathbf{1}_{(X \geq p)}$ puis montrer que $g(p) = p(1 - F(p))$.
3. Montrer que $g(p)$ tend vers 0 lorsque p tend vers $+\infty$.
4. Que vaut $g(0)$? Dessiner l'allure de la courbe de g. En déduire que g admet un maximum sur $\mathbb{R}_+$, atteint en une valeur $p^* > 0$.
5. Expliciter une équation vérifiée p^*.
6. Quel chiffre d'affaires maximal peut espérer le fabricant si X suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$?

1. Question de cours : Inégalité de Markov.
Soit X une variable aléatoire positive (ou nulle) admettant une espérance. Alors, pour tout $t > 0$, on a

$$P(X > t) \leq \frac{E(X)}{t}$$

Un fabricant cherche à optimiser le prix de vente p de son produit. Il suppose que chaque client potentiel est prêt à payer un prix aléatoire X pour acheter le produit. Si X est supérieur ou égal à p, la vente a lieu le fabricant encaisse p euros ; sinon la vente n'a pas lieu et le fabricant n'encaisse aucun chiffre d'affaires.

On suppose que X admet une densité de probabilité f continue sur $\mathbb{R}_+$et une espérance finie. On note F la fonction de répartition et Z_p le chiffre d'affaires réalisé si le prix de son produit est fixé à la valeur p et on définit la fonction g sur $\mathbb{R}_+$ par $g(p) = E\left(Z_p\right)$.

2. Le fabricant gagne p euros si la vente à lieu c'est à dire si $X \geq p$. Sinon, il ne gagne rien. Ainsi, clairement

et

$$Z_p = p \cdot \mathbf{1}_{(X \geq p)}$$

$$\begin{aligned} g(p) = E\left(Z_p\right) = E\left(p \mathbf{1}_{(X \geq p)}\right) &= pE\left(\mathbf{1}_{(X \geq p)}\right) \\ &= pP(X \geq p) = p(1 - P(X < p)) \\ &= p(1 - F(p)). \end{aligned}$$

3. La fonction de répartition F tend vers 1 en $+\infty$ donc $1 - F(p)$ tend vers 0 mais on a une forme indéterminée pour le produit avec p. Il faut donc regarder avec un peu de subtilité les quantités en présence :

$$\begin{aligned} g(p) = pP(X \geq p) = p \int_p^{+\infty} f(t) \mathrm{d}t &= \int_p^{+\infty} ptf(t) \mathrm{d}t \\ &\leq \int_p^{+\infty} tf(t) \mathrm{d}t \end{aligned}$$

ce qui est l'intégrale correspondant au "reste" de l'espérance de X. En effet, on sait que X admet une espérance (et que f est nulle sur $\mathbb{R}_-$) donc
et

$$\lim_{p \to +\infty} \int_0^p tf(t) \mathrm{d}t = E(X) = \int_0^{+\infty} tf(t) \mathrm{d}t$$

$$\int_p^{+\infty} tf(t) \mathrm{d}t = E(X) - \int_0^p tf(t) \mathrm{d}t \underset{p \to +\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Par encadrement on a bien que $g(p) \to 0, p \to \infty$. Ce n'était pas une question si facile !

4. On calcule

$$g(0)=0(1-F(0))=0.$$

Par ailleurs, F étant primitive de f, elle est dérivable et, produit, g aussi. On a

$$g'(p)=1-F(p)-pf(p)$$

On ne peut pas dire grand chose sur cette fonction dérivée ; en particulier on ne peut pas trouver son signe pour en déduire des variations sur g. On raisonne donc avec des arguments plus fins et qualitatifs.

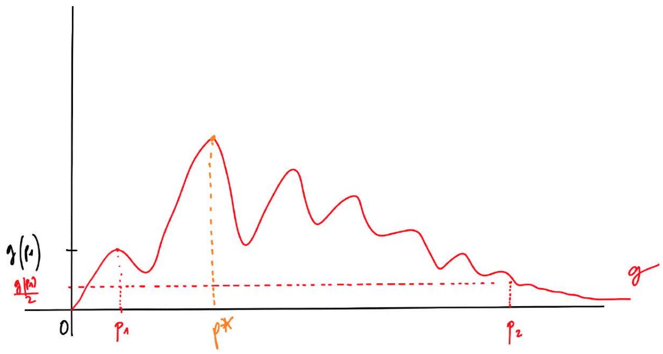
- Une fonction continue sur un intervalle fermé et borné atteint ses bornes et admet donc un maximum. Le problème ici est que $\mathbb{R}_+$n'est pas un intervalle fermé et borné... Mais l'idée est de s'y ramener en disant que "à l'infini" cela tend vers 0 donc ce n'est pas là que sera le maximum.
- g est positive et non identiquement nulle. Il existe donc $p_1>0$ tel que $g\left(p_1\right)>0$.
- Comme $g(p) \longrightarrow 0, p \rightarrow+\infty$, il existe une valeur $p_2>p_1$ telle que,

$$\forall p \geq p_2, \quad g(p) \leq \frac{g\left(p_1\right)}{2}.$$

- Mais alors, g est continue sur $\left[0 ; p_2\right]$ et admet donc un maximum sur cet intervalle en un point noté p^*. En particulier, $g\left(p^*\right) \geq g\left(p_1\right)$ et par construction, pour tout $p \in\left[0 ; p_2\right], g(p) \leq g\left(p^*\right)$ et pour tout $p \geq p_2, g(p) \leq g\left(p_1\right) / 2<g\left(p^*\right)$. On a bien

$$\forall p \in \mathbb{R}_+, \quad g(p) \leq g\left(p^*\right)$$

et g admet bien un maximum (strictement positif) sur $\mathbb{R}_+$.



5. Naturellement, comme g présente un extremum en p^*, la dérivée de g s'annule en p^* (c'est un point critique). On a donc

$$p^* f\left(p^*\right)=1-F\left(p^*\right).$$

6. Dans le cas de la loi exponentielle de paramètre $\lambda>0$, on a, pour $p \geq 0$,

$$g(p)=p e^{-\lambda p}$$

et l'équation vérifiée par p^* est

$$e^{-\lambda p^*}=p^* \lambda e^{-\lambda p^*} \Longleftrightarrow p^*=\frac{1}{\lambda}$$

Le chiffre d'affaire maximal est donc l'évaluation du chiffre d'affaires g en cette valeur de p^*. Plus précisément, celui-ci vaut

$$g\left(\frac{1}{\lambda}\right)=\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda \frac{1}{\lambda}}=\frac{1}{e \lambda}$$

Exercice 5

On étudie le jeu suivant : X_1 et X_2 étant deux variables indépendantes de loi uniforme sur $[0;1]$, un joueur observe d'abord X_1. S'il décide d'en rester là, il gagne la valeur observée. S'il décide de continuer, il observe et gagne X_2. On note G la v.a. correspondant au gain du joueur.

1. Sa première stratégie est de toujours continuer et observer X_2. Quelle est alors l'espérance de son gain ?
2. Dans un deuxième temps, il décide de continuer et d'observer X_2 si et seulement si $X_1 \leq s$, où $s \in [0;1]$ est un seuil qu'il se fixe à l'avance.

a. Justifier que

$$G = \mathbf{1}_{X_1 \geq s} X_1 + \mathbf{1}_{X_1 < s} X_2$$

b. Écrire un programme Python qui demande à l'utilisateur d'entrer le seuil s et simule le gain.
c. Quelle est l'espérance du gain dans ce cas ?
d. Quelle valeur s doit-il choisir pour maximiser cette espérance ?

3. Si, dans une variante du jeu précédent, on pouvait observer X_1 et X_2 avant de prendre une décision, quelle serait la stratégie et combien rapporterait-elle en moyenne ?

On étudie le jeu suivant : X_1 et X_2 étant deux variables indépendantes de loi uniforme sur $[0;1]$, un joueur observe d'abord X_1. S'il décide d'en rester là, il gagne la valeur observée. S'il décide de continuer, il observe et gagne X_2. On note G la v.a. correspondant au gain du joueur.

1. Si le joueur continue systématiquement, son gain est égal à X_2 et $E(G) = E(X_2) = 1/2$ car $X_2 \hookrightarrow \mathcal{U}([0;1])$.
2. Dans un deuxième temps, il décide de continuer et d'observer X_2 si et seulement si $X_1 \leq s$, où $s \in [0;1]$ est un seuil qu'il se fixe à l'avance.

a. Si $X_1 < s$ (et donc $\mathbf{1}_{X_1<s} = 1$ et $\mathbf{1}_{X_1<s} = 0$) alors on continue et le gain sera égal à X_2, c'est à dire à $\mathbf{1}_{X_1<s} X_2$. Sinon, le gain sera égal à X_1 ou a $\mathbf{1}_{X_1 \leq s} X_1$. On a bien

$$G = \mathbf{1}_{X_1 \geq s} X_1 + \mathbf{1}_{X_1 < s} X_2$$

b. Sans difficulté

```
import numpy.random as rd

def simul_gain():
  s=int(input("s=?"))
  G=rd.rand( )
  if G<s :  # si X1 < s, on rejoue
        G=rd.rand( )
  return G
```

c. Dans ce cas $E(G) = E\left(\mathbf{1}_{X_1 \geq s} X_1\right) + E\left(\mathbf{1}_{X_1 \geq s} X_1\right)$. Mais, X_1 et X_2 étant indépendantes, le lemme des coalitions permet d'affirmer que $\mathbf{1}_{X_1<s}$ et X_2 sont indépendantes. Donc

$$E\left(\mathbf{1}_{X_1<s} X_2\right) = E\left(\mathbf{1}_{X_1<s}\right) E\left(X_2\right) = P\left(X_1 < s\right) E\left(X_2\right) = \frac{s}{2}$$

De plus, par le théorème de transfert et le résultat établi en préambule,

$$\begin{aligned} E\left(\mathbf{1}_{X_1 \geq s} X_1\right) &= \int_s^1 t \, \mathrm{d}t = \left[\frac{t^2}{2}\right]_s^2 \\ &= \frac{1-s^2}{2}. \end{aligned}$$

Au final,

$$E(G) = \frac{1 - s^2 + s}{2}$$

d. On regarde où la fonction $s \mapsto 1 - s^2 + s$ est maximale. Sa dérivée vaut $1 - 2s$ et s'annule en $s^* = 1/2$ où on voit sans difficulté que $E(G)$ est maximale. Ce résultat est d'ailleurs assez intuitif. Dans ce cas, l'espérance vaut

$$E(G) = \frac{5}{8} > \frac{1}{2}$$

ce qui est donc un peu mieux que la première stratégie.

3. Dans cette optique très avantageuse, on aurait $G = \max(X_1, X_2)$. On obtient alors $E(G)$ en déterminant la loi du max, question trèèèèèès classique. On commence par la fonction de répartition

$$\begin{aligned}
&F_G(x) = P(\max(X_1, X_2) \leq x) = P([X_1 \leq x] \cap [X_2 \leq x]) \\
&= P(X_1 \leq x) P(X_2 \leq x) \quad \text{(par indépendance de } X_1 \text{ et } X_2\text{)} \\
&= F_{X_1}(x)^2 \\
&= \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ x^2, \text{ si } 0 \leq x < 1 \\ 1, \text{ si } x \geq 1 \end{cases}
\end{aligned}$$

Cette fonction est bien la fonction de répartition d'une variable à densité (continue partout sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathcal{C}^1$ sur chacun des morceaux) donc G est bien une v.a à densité. Une densité est donnée par

$$f_G(x) = \begin{cases} 2x, \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

Il suit que

$$E(G) = \int_0^1 2x^2 \, \mathrm{d}x = \left[\frac{2x^3}{3}\right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

C'est clairement la stratégie la plus avantageuse !

IV. Méthode de D'Alembert

Exercice 6

La méthode de d'Alembert est une méthode pour étudier la convergence de certaines séries, par comparaison à une série géométrique (un peu comme la méthode du n^2 ou du n^α qui se proposent de comparer le terme général d'une série à une série de Riemann). L'exercice commence par la preuve du théorème de d'Alembert (difficile et abstraite) puis se concentre sur des exemples et des applications (plus faciles).
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

1. Théorème de d'Alembert

a. On suppose que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell < 1$$

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge.

b. On suppose que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \ell > 1.$$

Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

c. Justifier à l'aide d'exemples bien choisis qu'on ne peut pas conclure dans le cas où

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$$

d. À quoi sert l'hypothèse $u_n > 0$?

2. Applications À l'aide du résultat précédent, étudier la convergence des séries de termes généraux suivants.
   a. $u_n = \dfrac{1}{n!}$. b. $u_n = \dfrac{n!}{n^n}$. c. $u_n = \dfrac{n^n n!}{(2n)!}$.

Pour que cet exercice soit profitable, il n'est pas recommandé d'utiliser la correction trop tôt. La recherche de la solution a beaucoup plus d'intérêt que la solution elle-même.

1. a. C'est une question difficile. On fixe un nombre $\ell' \in]\ell, 1[$ (ce qui est possible car $\ell < 1$). Le résultat de convergence montre en fait qu'il existe un moment n_0 à partir duquel tous les termes de la suite $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$ sont majorés par ℓ' : pour tout $n \geqslant n_0$,

Soit maintenant $n \geqslant n_0$. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \ell'$$

$$\frac{u_n}{u_{n_0}} = \frac{u_n}{u_{n-1}} \frac{u_{n-1}}{u_{n-2}} \cdots \frac{u_{n_0+1}}{u_{n_0}}.$$

Dans le membre de droite, il y a $n-n_0$ fractions de la forme $\frac{u_{k+1}}{u_k}$ avec $k \geqslant n_0$ donc qui satisfont toutes l'hypothèse $\frac{u_{k+1}}{u_k} \leqslant \ell'$. On obtient donc

$$\frac{u_n}{u_{n_0}} \leqslant (\ell')^{n-n_0}$$

puis

$$u_n \leqslant (\ell')^{n-n_0} u_{n_0}$$

En notant c la constante $c = u_{n_0} (\ell')^{-n_0}$, on a

$$u_n \leqslant c (\ell')^n .$$

Le théorème de comparaison par majoration des séries à termes positifs (compte tenu du fait que la série de terme général $c(\ell')^n$ converge) montre alors que la série de terme général u_n converge.

b. On raisonne de manière similaire. Soit cette fois $\ell' > \ell$. On montre maintenant et de la même manière que, à partir d'un certain rang u_n est minorée par une $c(\ell')^n$. Ceci permet, encore avec le critère de comparaison par majoration des séries à termes positifs que $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ diverge.

c. Prenons $u_n = \frac{1}{n}$ et $v_n = \frac{1}{n^2}$. On a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = 1$$

Et pourtant, $\sum_{n\to+\infty} u_n$ diverge alors que $\sum_{n\to+\infty} v_n$ converge. Ceci montre bien que tout peut arriver dans le cas où la limite du quotient vaut 1.

d. Il faut que $u_n \geqslant 0$ pour pouvoir appliquer le théorème de comparaison et il faut que $u_n \neq 0$ car on divise par u_n dans le quotient $\frac{u_{n+1}}{u_n}$.

2. a. On a tout de suite $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1}$ qui tend vers 0 . La question 1.a s'applique et on conclut à la convergence de la série $\sum_{n\to+\infty} u_n$.

b. On a ici

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)n^n}{(n+1)^{n+1}} = \frac{n^n}{(n+1)^n} = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}.$$

On a ensuite

$$n\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = n\left(\frac{-1}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{\mathbf{o}}\left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{-n}{n+1} + \underset{n\to+\infty}{\mathbf{o}}(1).$$

On conclut que
puis enfin que

$$\lim_{n\to+\infty} n\ln\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = -1$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = e^{-1} < 1$$

La question 1.a montre alors que $\sum_{n\to+\infty} u_n$ converge.

c. On a

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+2}}{(2n+2)(2n+1)n^n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{2(2n+1)n^n}$$

Nous avons montré à la question précédente que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} = e$$

Par ailleurs

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(n+1)}{2(2n+1)} = \frac{1}{4}$$

On obtient alors que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{e}{4} < 1$$

On conclut encore une fois à l'aide de la question 1.a que $\displaystyle\sum_{n\to+\infty} u_n$ converge.

V. Méthode des trapèzes

Exercice 7

Dans cet exercice, on discute deux méthodes de calcul numérique d'une intégrale et on compare leur efficacité. La première méthode, dite méthode des rectangles consiste à approcher une intégrale par ses sommes de Riemann ; la seconde dite, méthode des trapèzes consiste à approcher une intégrale par une somme d'aires de trapèzes.

Partie I : méthode des rectangles.

1. Nous avons vu dans le cours une méthode d'intégration approchée par les sommes de Riemann. Vérifier que la méthode du cours est équivalente au programme suivant (noter en particulier la présence de la fonction linspace qui permet de discrétiser un intervalle $[a, b]$ en n points répartis uniformément).

```
import numpy as np

def rectangle_gauche(f, a ,b, n) :
  h = (b-a)/(n-1)
  x = np.linspace(a, b, n)
  y = [f(t) for t in x]
  r = h * np.sum(y)
  return r
```

2. Pourquoi a-t-on appelé cette fonction rectangle_gauche ? En s'inspirant de la fonction ci-dessus, écrire une fonction rectangle_droite qui donne une autre approximation de l'intégrale de f.
3. Définir en Scilab la fonction réelle $\operatorname{truc}(t) = \dfrac{4}{1+t^2}$. Trouver, grâce aux fonctions précédentes une valeur approchée de son intégrale sur $[0, 1]$. Comparer la valeur obtenue avec le nombre π.
4. Difficile. On suppose ici que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et on note $I(a, b, f)$ l'intégrale de f sur $[a, b]$ et $R_g(f, a, b, n) =$ rectangle_gauche $(\mathrm{f}, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{n})$[1]. Avec le théorème des accroissements finis, montrer que
$$|I(f, a, b) - R_g(f, a, b, n)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{2(n-1)} M$$
5. On définit de même R_d avec la fonction qui approche l'intégrale par les rectangles droits où M est une constante dont on justifiera l'existence. On a la même formule pour R_d (la preuve est identique).

Partie II : méthode des trapèzes. Dans cette partie, l'intégrale est approchée par la somme des aires des trapèzes obtenus en reliant les points $(x_i, f(x_i))$ situés sur la courbe de f, ce qui donne la formule d'approximation de l'intégrale par
$$T(f, a, b, n) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) + f\left(a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right)}{2}$$

6. Faire un dessin de ce que représente $T(f, a, b, n)$.
7. Écrire en Scilab une fonction trapeze $(\mathrm{f}, \mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{n})$ qui permet de calculer l'intégrale approchée de f sur $[a, b]$ par cette méthode.
8. Montrer que $T(f, a, b, n) = \dfrac{1}{2}\left(R_g(f, a, b, n) + R_d(f, a, b, n)\right)$ et en déduire une autre façon de programmer trapeze.
9. Encore plus difficile. On suppose ici que f est de classe $\mathcal{C}^2$. Montrer que
$$|I(f, a, b) - T(f, a, b, n)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{12(n-1)^2} M$$

où M est une constante dont on justifiera l'existence.

Partie III : conclusion. À l'aide des questions 4. des parties I. et II., quelle méthode semble la meilleure pour calculer une intégrale approchée. Vérifier votre hypothèse sur des exemples. [2]

Pour que cet exercice soit profitable, il n'est pas recommandé d'utiliser la correction trop tôt. La recherche de la solution a beaucoup plus d'intérêt que la solution elle-même.

Partie I : méthode des rectangles.

1. Déjà vu en cours.
2. On construit dans la fonction précédente les rectangles "par la gauche" c'est-à-dire que la hauteurs de chaque rectangle est donnée par la valeur de la fonction à gauche de l'intervalle. Pour les rectangles à droite, on écrirait plutôt :

```
import numpy as np

def rectangle_droite(f, a ,b, n) :
  h = (b-a)/(n-1)
  x = np.linspace(a+1/n, b+1/n, n)
  y = [f(t) for t in x]
  r = h * np.sum(y)
  return r
```

3.

```
def truc(t) :
  return 4/(1+t*t)


rectangle_gauche(truc ,0 ,1 ,10000)
```

La valeur est très proche de π.

4. Il existe une méthode encore meilleure pour le calcul approché d'intégrale. La technique consiste cette fois à approcher l'intégrale par une somme d'aires sous la courbe de certaines paraboles : voir la page Wikipédia

$$\begin{aligned}
I(f,a,b) - R_g(f,a,b,n+1) &= \int_a^b f(t)dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} f(t)dt - \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{(b-a)}{n}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} f(t)dt - \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) dt \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} \left[f(t) - f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right] dt
\end{aligned}$$

Puis en passant à la valeur absolue et en appliquant l'inégalité triangulaire

$$|I(f,a,b) - R_g(f,a,b,n+1)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} \left|f(t) - f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right| dt$$

On applique maintenant le théorème de accroissements finis sur chaque intervalle $\left[a + k\frac{b-a}{n}, a + (k+1)\frac{b-a}{n}\right]$ de longueur $\frac{b-a}{n}$ Puisque la fonction f est $\mathcal{C}^1$, sa dérivée (est continue et donc) majorée par une constante M. On a

$$\left[f(t) - f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right] \leqslant \frac{b-a}{n}M$$

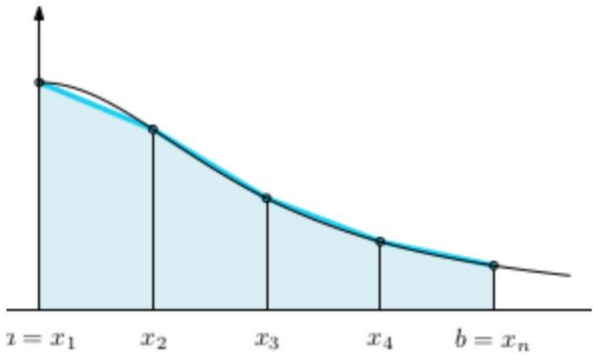
Il reste à intégrer ces inégalités : par croissance de l'intégrale, on a

$$|I(f,a,b) - R_g(f,a,b,n+1)| \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \int_{a+k\frac{b-a}{n}}^{a+(k+1)\frac{b-a}{n}} \frac{b-a}{n}Mdt = \frac{(b-a)^2}{n}M$$

L'inégalité de l'énoncé s'en déduit en modifiant légèrement la constante M (ou en apppliquant légèrement différemment le théorème des accroissements finis) et en remplaçant n par $n-1$. Attention à l'indice n : dans les questions 1. et 2., on a découpé l'intervalle $[a,b]$ en n points seulement alors qu'ici, on a découpé l'intervalle en $n+1$ points.

Partie II : Méthode des trapèzes.

6.



7.

```
def trapeze(f, a ,b, n):
  h = (b-a)/(n-1)
  x1 = np.linspace(a, b, n)
  y1 = [f(t)/2 for t in x1]
  x2 = np.linspace(a+1/n, b+1/n, n)
  y2 = [f(t)/2 for t in x1]
  r = h * (np.sum(y1)+np.sum(y2))
  return r
```

8. On a

$$\begin{aligned} T(f,a,b,n) &= \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)+f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right)}{2} \\ &= \frac{b-a}{2n}\left(\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+k\frac{b-a}{n}\right)+\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a+(k+1)\frac{b-a}{n}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(R_g(f,a,b,n)+R_d(f,a,b,n)\right) \end{aligned}$$

On en déduit que
`def trapeze(f,a,b,n)` return (rectangle_gauche (f,a,b,n)+ rectangle_droite (f,a,b,n))/2
donne le même résultat.

9. C'est une question vraiment difficile que je vous conseille d'admettre. Pour les plus courageux, l'explication est donnée par exemple dans ce texte : `http://bruneau.u-cergy.fr/enseignement/http://bruneau.u-cergy.fr/enseign`
Il s'agit de faire une double intégration par parties intelligemment.

Partie III : Conclusion.

On en déduit que pour les grandes valeurs de n, l'erreur commise dans le calcul de l'intégrale est plus faible lorsqu'on la remplace par la somme des aires des trapèzes que par la somme des aires des rectangles. Cela provient de fait que

$$\frac{1}{(n-1)^2} \underset{n\to+\infty}{=} \mathbf{o}\left(\frac{1}{n-1}\right)$$

Il est donc plus économique de calculer l'intégrale d'une fonction par la méthode des trapèzes.

V. Polynôme caractéristique d'une matrice carrée de taille 3

Motivation.

Dans l'étude d'une matrice donnée A, il est souvent intéressant de disposer d'un polynôme annulateur de A. En effet, cela renseigne sur les valeurs propres de A. On rappelle que les valeurs propres sont contenues dans l'ensemble des racines d'un polynôme annulateur. Cette méthode de recherche des valeurs propres possède néanmoins une faille importante : rien ne nous dit que les valeurs propres sont exactement les racines du polynôme annulateur. Imaginons par exemple que l'on sache que le polynôme

$$P(x) = (x-1)^2(x-3)$$

soit un polynôme annulateur de A. Alors le polynôme

$$Q(x) = (x-1)^2(x-3)(x+1)$$

est encore un polynôme annulateur de A. On peut donc toujours "ajouter des racines" à un polynôme annulateur et ces racines ne sont pas des valeurs propres de A.

Dans cet exercice, on présente une théorie qui permet de trouver un polynôme annulateur d'une matrice de taille 3×3 dont les racines sont exactement les valeurs propres de la matrice. Ce polynôme n'a donc aucune racine "en trop" comme dans le polynôme Q précédent. Même si l'existence et les propriétés de ce polynôme ne sont pas supposées être connues des candidats, il est très fréquent que les sujets de concours nous guident pour le retrouver. C'est le cas par exemple dans les sujets récents de ECRICOME 2021 Exercice 1 et 2019 Exercice 1, EDHEC 2021 Exercice 3, EML 2019 Exercice 2 ou encore HEC 2018.

Au passage, nous rencontrerons la notion de déterminant d'une matrice de taille 3×3 : c'est un outil qui sert à décider si une matrice est inversible. En dimension 2, on rappelle qu'une matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ est inversible si et seulement si $ad - bc \neq 0$ et le nombre $ad - bc$ s'appelle le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. C'est ce résultat que nous généralisons à la dimension 3.

Exercice 8

Partie I : déterminant en dimension 3.

Soit $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ une matrice carrée de taille de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On appelle déterminant de cette matrice et on note $\det(A)$ le nombre

$$\det(A)=aei+dhc+gbf-ahf-dbi-gec^{1}$$

Parfois, il est commode de voir le déterminant comme une fonction de $\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\rightarrow\mathbb{R}$ des trois vecteurs colonne de $\mathbb{R}^3$ formant la matrice $A\in\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. Il prend alors la forme

$$\det(X,Y,Z)=\det\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix}=x_1y_2z_3+x_2y_3z_1+x_3y_1z_2-x_1z_2y_3-x_2y_1z_3-x_3y_2z_1$$

où $X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, Y=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ et $Z=\begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.

Partie II : Propriétés élémentaires du déterminant.

2. Montrer que si deux colonnes de la matrice sont identiques, le déterminant s'annule.
3. Montrer que le déterminant de la base canonique de $\mathbb{R}^3$ vaut 1 .
4. Montrer que le déterminant est une application linéaire par rapport à chacune des colonnes. Plus précisément, justifier que si $X,X',X'',Y,Y',Y'',Z,Z',Z''\in\mathbb{R}^3$ et $\alpha\in\mathbb{R}$, on a

$$\begin{aligned}\det\left(\alpha X'+X'',Y,Z\right)&=\alpha\det\left(X',Y,Z\right)+\det\left(X'',Y,Z\right)\\ \det\left(X,\alpha Y'+Y'',Z\right)&=\alpha\det\left(X,Y',Z\right)+\det\left(X,Y'',Z\right)\\ \det\left(X,Y,\alpha Z'+Z''\right)&=\alpha\det\left(X,Y,Z'\right)+\det\left(X,Y,Z''\right)\end{aligned}$$

5. En déduire que si la famille (X,Y,Z) est liée dans $\mathbb{R}^3$, alors $\det(X,Y,Z)=0$.
6. On veut maintenant montrer la réciproque de la question précédente.
   (a) $(\star)^2$ Montrer que si A et B sont deux matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, alors $\det(A,B)=\det(A)\cdot\det(B)$
   (b) À l'aide de la question précédente et de la question 2.b., montrer que si P est une matrice inversible, on a $\det(P)\neq 0$ et $\det\left(P^{-1}\right)=\dfrac{1}{\det(P)}$
   (c) Soit maintenant (X,Y,Z) une famille libre de $\mathbb{R}^3$ (c'est donc une base de $\mathbb{R}^3$). Soit P la matrice de passage de la base canonique à la base (X,Y,Z). Montrer que $\det(X,Y,Z)=\det(P)$ et conclure.
7. En récapitulant ce qui précède, montrer qu'une matrice A est inversible si et seulement si $\det(A)\neq 0$.

Partie III : polynôme caractéristique en dimension 3. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On s'intéresse à la fonction

$$\begin{aligned}P_A:\mathbb{R}&\longrightarrow\mathbb{R}\\ x&\longmapsto\det\left(A-xI_3\right)\end{aligned}$$

8. Montrer que P_A est une fonction polynomiale de degré 3 .
9. Je suis d'accord, ça parait effrayant.
10. On pourra admettre ce résultat pour poursuivre
11. Justifier que les racines de P_A sont exactement les valeurs propres de A. On pourra se servir de la question 5.
12. Poser enfin $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, exprimer $P_A(x)=\det\left(A-xI_3\right)$ en fonction des coefficients de A et vérifier que $P_A(A)=0$.

Plusieurs de ces questions sont faciles mais très techniques et il faut jouer avec les 9 coordonnées en jeu. J'indique ces questions avec le symbole $\star$ et je ne rédige pas la correction, n'hésitez pas à venir me voir si la rédaction des détails vous pose problème.

1. On trouve 15.
2. a. On suppose par exemple que $X=Y$, c'est-à-dire $x_1=y_1, x_2=y_2$ et $x_3=y_3$. On a alors

$$\det(X,Y,Z)=x_1x_2z_3+x_2x_3z_1+x_3x_1z_2-x_1x_3z_2-x_2x_1z_3-x_3x_2z_1=0$$

Les cas où $X=Z$ ou $Y=Z$ sont similaires.

b. Parmi tous les termes de la forme $x_iy_jz_k$, il n'y en a qu'un qui est non nul (et qui vaut 1), c'est le tout premier $x_1y_2z_3=1\times1\times1=1$.

Noter que le déterminant de la base canonique est aussi le déterminant de la matrice I_3. c. $\star$.

3. Si la famille est liée, on peut supposer par exemple que $X=\alpha Y+\beta Z$ (les cas où Y ou Z sont combinaisons linéaires des deux vecteurs sont identiques). On a alors

$$\det(X,Y,Z)=\det(\alpha Y+\beta Z,Y,Z)=\alpha\det(Y,Y,Z)+\beta(Z,Y,Z)=0$$

En effet, dans les deux derniers déterminants, il y a deux colonnes identiques et le déterminant est donc nul par la question 2.a.

4. a. $\star$.

b. On a si P est inversible, alors d'une part

$$\det\left(P\cdot P^{-1}\right)=\det(P)\det\left(P^{-1}\right)$$

et d'autre part

$$\det\left(P\cdot P^{-1}\right)=\det\left(I_3\right)=1$$

On obtient donc

$$\det\left(P^{-1}\right)=\frac{1}{\det(P)}$$

ce qui montre en particulier que $\det(P)$ est non nul.

c. La matrice de passage consiste à exprimer les coordonnées de X,Y et Z dans la base canonique. C'est donc exactement la matrice dont les colonnes sont les vecteurs X,Y et Z. On a donc

$$\det(X,Y,Z)=\det(P)$$

Or P est une matrice de passage, elle est donc inversible (son inverse est la matrice de passage de la base (X,Y,Z) vers la base canonique. Donc $\det(P)\neq0$ puis $\det(X,Y,Z)\neq0$.

5. Si A est inversible, son déterminant est non nul d'après la question 4.b. Inversement, si A n'est pas inversible, alors les colonnes de A forment une famille liée (c'est une famille génératrice de l'image et l'image ne peut pas être de dimension 3 car sinon la matrice serait inversible). On peut donc conclure par la question 3. que $\det(A)=0$.
6. On pose $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{pmatrix}$ et on a $P_A(x)=\det\left(\begin{pmatrix}a-x&b&c\\d&e-x&f\\g&h&i-x\end{pmatrix}\right)$. Lorsque l'on calcule le déterminant, le premier terme est donc

$$(a-x)(e-x)(i-x)$$

qui est un terme de degrés 3 . Tous les autres termes sont de degrés inférieur à 2 . On conclut donc que $P_A(x)$ est un polynôme de degrés 3.

7. C'est une reformulation d'un résultat du cours en terme de déterminant. On rappelle que λ est valeur propre de A si et seulement si $A-\lambda I_3$ n'est pas inversible et donc, d'après la question 5., si et seulement si $\det\left(A-\lambda I_3\right)=0$ n'est pas inversible. Mais $\det\left(A-\lambda I_3\right)=P_A(\lambda)$. Ainsi λ est valeur propre si et seulement si $P_A(\lambda)=0$.
8. $\star$.

VI. Qu'est-ce que racine de 2 ?

Exercice 9

On appelle fonction Γ la fonction définie par

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

1. Montrer que Γ est définie sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que, pour tout $x > 0, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.
3. En déduire la valeur de la fonction Γ sur les entiers.
4. D'après ce qui précède, comment proposeriez-vous de définir $(\sqrt{2})\,!$ ou encore $\pi\,!$?

On pose $f(t) = e^{-t}t^{x-1}$. Il s'agit donc de voir que l'intégrale de f est convergente pour chaque $x > 0$. L'intégrale est toujours impropre en $+\infty$, il faudra donc étudier son intégrabilité. Elle est aussi impropre en 0 lorsque $x < 1$. En effet, lorsque $x \geqslant 1$, la fonction f est prolongeable par continuité en $t = 0$ en lui attribuant la valeur 0 car

$$\lim_{t \to 0} f(t) = 0$$

D'autre part, lorsque $x < 1$, on trouve un équivalent de la fonction à intégrer en 0 :

$$f(t) \underset{t \to 0}{\sim} t^{x-1}$$

et la fonction $t \mapsto t^{x-1} = \dfrac{1}{t^{1-x}}$ est intégrable en 0 (c'est une intégrale de Riemann de référence).
Ainsi la fonction $t \mapsto f(t)$ est toujours intégrable en 0 .
À l'infini, on utilise la "méthode du t^2 " :

$$t^2 f(t) = t^2 e^{-t} t^{x-1} = e^{-t} t^{x+1} \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

et on constate que $f(t) = \underset{t \to +\infty}{\mathbf{o}}\left(\dfrac{1}{t^2}\right)$, pour en conclure que f est aussi intégrable en $+\infty$ par comparaison.

2. On procède par intégration par parties. On rappelle que la formule d'intégration par parties ne marche que pour des intégrales définies. Il faut donc prendre soin de revenir à la définition des intégrales impropres comme limites d'intégrales définies.

$$\Gamma(x+1) = \lim_{A \to \infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^A e^{-t} t^x dt$$

puis on dérive la fonction $t \mapsto t^x$ et on intègre la fonction $t \mapsto e^{-t}$.

$$\begin{aligned}\Gamma(x+1) &= \lim_{A \to \infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\left[-e^{-t}t^x\right]_\varepsilon^A + \int_\varepsilon^A x t^{x-1} e^{-t} dt \right) \\ &= \lim_{A \to \infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-e^{-A}A^x + e^{-\varepsilon}\varepsilon^x\right) + \lim_{A \to \infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^A x t^{x-1} e^{-t} dt\end{aligned}$$

Ici, on a pu prendre la somme des deux limites car chacun des deux termes converge :

$$\lim_{A \to \infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(-e^{-A}A^x + e^{-\varepsilon}\varepsilon^x\right) = 0$$

et

$$\lim_{A \to \infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\varepsilon^A x t^{x-1} e^{-t} dt = x\Gamma(x)$$

On obtient bien

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

3. À l'aide de la formule précédente, on prouve par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $\Gamma(n) = (n-1)\,!$.

Pour $n=1$, on a

$$\Gamma(1)=\int_0^{+\infty} e^{-t}dt=1$$

En effet, pour calculer cette limite, on peut soit faire un calcul direct (on connaît une primitive de $t\mapsto e^{-t}$, soit se souvenir que $t\mapsto e^{-t}$ est la densité de la loi exponentielle de paramètre 1 et que l'intégrale d'une densité de proba est toujours 1. La propriété à démontrer est donc initialisée.

Pour l'hérédité, supposons que $\Gamma(n)=(n-1)\,!$ pour un certain entier n. Puis donc, d'après la question précédente

$$\Gamma(n+1)=n\Gamma(n)=n\cdot(n-1)!=n!.$$

4. Ainsi la fonction Γ coïncide avec la fonction factorielle sur les entiers positifs (car $n!=\Gamma(n+1)$) mais elle est définie sur tous les nombres réels positifs. On peut donc se servir de la fonction Γ pour prolonger la définition de la fonction factorielle à tous les réels positifs. Ainsi, par exemple

ou encore

$$\sqrt{2}!=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\sqrt{2}}dt$$

$$\pi!=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{\pi}dt$$

VII. Trace et déterminant

Exercice 10

Toutes les matrices de cet exercice sont des éléments de l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit les deux applications suivantes, notées d et tr,

$$d : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & ad - bc \end{array} \right. \quad \text{et } tr : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \rightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & a + d \end{array} \right.$$

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appellera $\mathrm{d}(A)$ le déterminant de A et $\mathrm{tr}(A)$ sa trace.

1. Propriétés de la trace.

a. Montrer que tr est une application linéaire de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
b. Déterminer une base du noyau de tr.
c. En déduire l'image de tr.
d. Établir que si A et B sont deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ on a : $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.
e. Soit P une matrice carrée de taille 2 inversible. Montrer que $\mathrm{tr}\left(P^{-1}AP\right) = \mathrm{tr}(A)$.
f. En déduire que deux matrices semblables ont la même trace. La réciproque est-elle vraie ?
g. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A$ et ${}^tA$ ont la même trace.

2. À propos du déterminant.

a. Calculer $\mathrm{d}(2I)$. En déduire que l'application d n'est pas linéaire.
b. Soit A et B deux éléments de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. Établir la formule : $\mathrm{d}(AB) = \mathrm{d}(A) \times \mathrm{d}(B)$.
c. On suppose que P est une matrice carrée de taille 2 inversible. Montrer que $\mathrm{d}(P)$ est non nul.
d. Soit P une matrice carrée de taille 2 inversible. Montrer que $\mathrm{d}\left(P^{-1}AP\right) = \mathrm{d}(A)$.
e. En déduire que deux matrices semblables ont le même déterminant. La réciproque est-elle vraie ?

1. Plusieurs questions de cet exercice sont apparues dans le sujet de ECRICOME 2022 f. Montrer que, pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}), A$ et ${}^tA$ ont le même déterminant.
2. Dans cette question seulement, on suppose que A est semblable à une matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.
   Montrer que $\lambda_1 + \lambda_2 = \mathrm{tr}(A), \quad$ et $\quad \lambda_1\lambda_2 = \mathrm{d}(A)$
4. Dans toute la suite, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté par A dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$.

a. Montrer que $A^2 - \mathrm{tr}(A)A + \mathrm{d}(A)I = 0$

$$f^2(u) = \mathrm{tr}(A)f(u) - \mathrm{d}(A)u.$$

b. En déduire que, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$,

$$f^2(u) = \mathrm{tr}(A)f(u) - \mathrm{d}(A)u.$$

c. À l'aide de la question 4.a, prouver la réciproque à la question 2.c.

5. Dans cette question seulement, on suppose que A est non colinéaire à I. On introduit $w = e_1 + e_2$.

a. (i) Montrer que, s'il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que $f(e_1) = \lambda_1 e_1$ et $f(e_2) = \lambda_2 e_2$, alors nécessairement $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
(ii) Montrer qu'il n'est pas possible d'avoir simultanément $f(e_1) = \lambda_1 e_1, f(e_2) = \lambda_2 e_2$ et $f(w) = \lambda_3 w$, quels que soient les réels λ_1, λ_2 et λ_3.
b. En déduire qu'il existe au moins un vecteur non nul x de $\mathbb{R}^2$ tel que la famille $(x, f(x))$ soit une base de $\mathbb{R}^2$.
c. En déduire, à l'aide de la question 4.b l'expression de la matrice M représentant u dans la base $(x, f(x))$.
d. (i) Soit A et A' deux matrices, dont les endomorphismes associés sont notés respectivement f et f'. Rappeler sans preuve une condition nécessaire et suffisante portant sur f et f' pour que A et A' soient semblables.
(ii) Déduire de 4.c et des informations dont on dispose sur la trace et le déterminant que la matrice A est semblable à sa transposée ${}^tA$.

Toutes les matrices de cet exercice sont des éléments de l'ensemble $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On définit les deux applications suivantes, notées d et tr,

$$\begin{array}{rclcrcl} \mathrm{d} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} & & \mathrm{tr} : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & ad - bc, & \text{et} & \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} & \longmapsto & a + d. \end{array}$$

Pour une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, on appellera $\mathrm{d}(A)$ le déterminant de A et $\mathrm{tr}(A)$ sa trace.

1. Propriétés de la trace.

a. On considère deux réels λ, μ et deux matrices

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad N = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\lambda M + \mu N) &= \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} \lambda a + \mu x & \lambda b + \mu y \\ \lambda c + \mu z & \lambda d + \mu t \end{pmatrix}\right) \\ &= \lambda a + \mu x + \lambda d + \mu t \\ &= \lambda(a + d) + \mu(x + t) \\ &= \lambda\,\mathrm{tr}(M) + \mu\,\mathrm{tr}(N) \end{aligned}$$

et tr est bien linéaire.
b. On résout

$$\begin{aligned} M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) &\iff \mathrm{tr}(M) = 0 \\ &\iff d = -a \\ &\iff M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

et on obtient

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

Les trois matrices ci-dessus forment également une famille libre (ce qu'on vérifie en écrivant l'équation de liaison qui se résout de manière triviale) et forme donc une base du noyau de tr qui est donc de dimension 3.

c. Par le théorème du rang, l'image de tr est donc de dimension 1 mais c'est un sous-espace de $\mathbb{R}$ et on a donc $\mathrm{Im}(\mathrm{tr}) = \mathbb{R}$; autrement dit l'application trace est surjective (mais elle n'est pas du tout injective comme on l'a vu avec son noyau).

d. On fait le calcul explicite. Ce n'est pas difficile, juste un peu désagréable. Notant

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

on a

$$AB = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} xa + yc & xb + yd \\ za + tc & zb + dt \end{pmatrix}$$

et

$$\mathrm{tr}(AB) = ax + bz + cy + dt = \mathrm{tr}(BA)$$

e. Soit P une matrice carrée de taille 2 inversible. D'après la question précédente

$$\mathrm{tr}\left(P^{-1}AP\right) = \mathrm{tr}\left(PP^{-1}A\right) = \mathrm{tr}(A)$$

f. Si A et B sont deux matrices semblables, alors il existe P inversible telle que $B = P^{-1}AP$. D'après la question précédente, on a donc $\mathrm{tr}(B) = \mathrm{tr}(A)$ ainsi, deux matrices semblables ont bien la même trace.

Pour exhiber un contre-exemple, il faudrait trouver deux matrices avec la même trace qui ne sont pas semblables. On sait que deux matrices semblables ont les mêmes propriétés d'inversibilité. On observe que

$$\mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0 = \mathrm{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\right)$$

alors que ces deux matrices ne peuvent être semblables ; la seconde est clairement inversible (mille et une justifications possibles) alors que la première (la matrice nulle) est la matrice la moins inversible du monde. La réciproque est donc fausse.

g. Cette question est vraiment triviale ;

$$\operatorname{tr}\left({}^t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right) = a + d = \operatorname{tr}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

2. À propos du déterminant.

a. Le calcul (immédiat) donne $\mathrm{d}(2I) = 4$. Or, $\mathrm{d}(I) = 1$ donc $\mathrm{d}(2I) \neq 2 \times \mathrm{d}(I)$ et d n'est pas linéaire.

b. C'est un calcul. On y va. Notant encore une fois

on a d'une part

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$$

$$AB = \begin{pmatrix} ax + bz & ay + bt \\ cx + dz & cy + dt \end{pmatrix}$$

et il suit

$$\begin{aligned} \mathrm{d}(AB) &= (ax + bz)(cy + dt) - (cx + dz)(ay + bt) \\ &= axcy + axdt + bzcy + bzdt - cxay - cxbt - aydz - dzbt \\ &= axdt + bzcy - cxbt - aydz \end{aligned}$$

D'autre part

$$\mathrm{d}(A)\mathrm{d}(B) = (ad - bc)(xt - yz) = adxt - yzad - bcxy + bcyz$$

Les quantités sont bien égales, on a bien $\mathrm{d}(AB) = \mathrm{d}(A)\mathrm{d}(B)$.

c. On suppose que P est une matrice carrée de taille 2 inversible.D'après ce qui précède, on a donc $1 = \mathrm{d}(I) = \mathrm{d}\left(PP^{-1}\right) = \mathrm{d}(P)\mathrm{d}\left(P^{-1}\right)$. Ce produit étant non nul, chaque facteur est nécessairement non nul donc $\mathrm{d}(P) \neq 0$. On a même montré que

$$\mathrm{d}\left(P^{-1}\right) = \frac{1}{\mathrm{d}(P)}$$

d. Soit P une matrice carrée de taille 2 inversible. D'après ce qui précède on peut astucieusement écrire

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\left(P^{-1}AP\right) &= \mathrm{d}\left(P^{-1}\right)\mathrm{d}(A)\mathrm{d}(P) \\ &= \mathrm{d}(A)\mathrm{d}\left(P^{-1}\right)\mathrm{d}(P) \\ &= \mathrm{d}(A)\mathrm{d}\left(P^{-1}P\right) = \mathrm{d}(A)\mathrm{d}(I) \\ &= \mathrm{d}(A) \end{aligned}$$

e. Si deux matrices A et B sont semblables, alors il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$. D'après la question précédente, on a bien

$$\mathrm{d}(B) = \mathrm{d}\left(P^{-1}AP\right) = \mathrm{d}(A)$$

donc deux matrices semblable ont le même déterminant. Concernant la réciproque, on peut utiliser le fait que deux matrices semblables représentent le même endomorphisme donc ont le même rang et donc un noyau de même dimension. Il est alors facile d'exhiber deux matrices dont le déterminant est nul mais qui auront des noyaux de dimensions différentes et qui ne peuvent donc pas être semblables, fournissant ainsi un contre-exemple et niant la réciproque. Par exemple,

$$\mathrm{d}\left(\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = 0 = \mathrm{d}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

alors que la première a un noyau égal à tout l'espace (donc de dimension 2) et la seconde un noyau de dimension 1 (engendré par le second vecteur de la base canonique).

f. C'est encore un calcul trivial.

$$\mathrm{d}\left({}^t\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = \mathrm{d}\left(\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\right) = ad - bc = \mathrm{d}\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right)$$

3. Dans cette question seulement, on suppose que A est semblable à une matrice diagonale $D=\left(\begin{array}{cc}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2\end{array}\right)$.

D'après ce qui précède on a donc

$$\operatorname{tr}(A)=\operatorname{tr}(D)=\lambda_1+\lambda_2, \quad \text{ et } \quad \mathrm{d}(A)=\mathrm{d}(D)=\lambda_1 \lambda_2 .$$

4. Dans toute la suite, on considère une matrice $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on note f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ représenté par A dans la base canonique (e_1, e_2) de $\mathbb{R}^2$.

a. C'est un calcul explicite un peu lourd. observant que f^2 est représenté par A^2, et notant

$$A=\left(\begin{array}{ll}a & b \\ c & d\end{array}\right), \quad A^2=\left(\begin{array}{cc}a^2+bc & ab+bd \\ ca+dc & cb+d^2\end{array}\right), \quad \text{ et } \quad u=\left(\begin{array}{l}x \\ y\end{array}\right)$$

on a, d'une part

$$f^2(u)=A^2\left(\begin{array}{l}x \\ y\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\left(a^2+bc\right) x+(ab+bd) y \\ (ca+dc) x+\left(cb+d^2\right) y\end{array}\right)$$

et d'autre part

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr}(A) f(u)-\mathrm{d}(A) u & =(a+d) A\left(\begin{array}{l}x \\ y\end{array}\right)-(ad-bc)\left(\begin{array}{l}x \\ y\end{array}\right) \\
& =(a+d)\left(\begin{array}{l}ax+by \\ cx+dy\end{array}\right)-(ad-bc)\left(\begin{array}{l}x \\ y\end{array}\right) \\
& =\left(\begin{array}{c}\left(a^2+bc\right) x+(ab+bd) y \\ (ca+dc) x+\left(cb+d^2\right) y\end{array}\right),
\end{aligned}$$

et on a bien l'égalité voulue, à savoir que, pour tout $u \in \mathbb{R}^2$,

$$f^2(u)=\operatorname{tr}(A) f(u)-\mathrm{d}(A) u .$$

b. La relation précédente étant vraie pour tout $u \in \mathbb{R}^2$, elle se traduit par le fait que $f^2-\operatorname{tr}(A) f+$ $\mathrm{d}(A) \mathrm{id}=0$ et donc le polynôme $X^2-\operatorname{tr}(A) X+\mathrm{d}(A)$ annule f (et A).

c. On doit donc montrer que si A vérifie $\mathrm{d}(A) \neq 0$, alors A est inversible. En utilisant la question précédente, on a

$$-A^2+\operatorname{tr}(A) A=\mathrm{d}(A) I$$

et comme $\mathrm{d}(A) \neq 0$, on peut diviser par $\mathrm{d}(A)$. On factorise à gauche par A pour ainsi avoir

$$A\left(\frac{\operatorname{tr}(A)}{\mathrm{d}(A)} I-\frac{1}{\mathrm{d}(\ A) A}\right)=I$$

et on peut conclure que A est inversible et même que

$$A^{-1}=\frac{1}{\mathrm{d}(A)}(\operatorname{tr}(A) I-A)$$

5. Dans cette question seulement, on suppose que A est non colinéaire à I. On introduit

$$w=e_1+e_2$$

a. (i) Supposons donc qu'il existe deux réels λ_1 et λ_2 tels que $f\left(e_1\right)=\lambda_1 e_1$ et $f\left(e_2\right)=\lambda_2 e_2$. Si $\lambda_1=\lambda_2, f$ serait représenté dans la base canonique par la matrice

$$A=\left(\begin{array}{cc}\lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_1\end{array}\right)=\lambda_1 I$$

or A n'est pas colinéaire à I, on a donc nécessairement $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

(ii) Supposons qu'on ait simultanément $f\left(e_1\right)=\lambda_1 e_1, f\left(e_2\right)=\lambda_2 e_2$ et $f(w)=\lambda_3 w$, avec λ_1, λ_2 et λ_3 trois réels (non nécessairement deux à deux distincts). Alors,

$$\begin{aligned}
\lambda_3 w & =\lambda_3 e_1+\lambda_3 e_2 \\
& =f(w)=f\left(e_1+e_2\right)=f\left(e_1\right)+f\left(e_2\right) \\
& =\lambda_1 e_1+\lambda_2 e_2
\end{aligned}$$

ou encore

$$(\lambda_3 - \lambda_1)\, e_1 + (\lambda_3 - \lambda_2)\, e_2 = 0.$$

Mais (e_1, e_2) est une base et donc une famille libre. Nécessairement, on a

$$\lambda_3 - \lambda_1 = 0 \quad \text{et} \quad \lambda_3 - \lambda_2 = 0$$

ce qui implique

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$$

ce qui n'est pas possible d'après la question précédente et fournit donc la contradiction souhaitée.

b. Si, pour tout x non nul de $\mathbb{R}^2$, on a $(x, f(x))$ liée, alors avec $x = e_1$, puis $x = e_2$ et ensuite $x = w$, on arrive à la situation impossible de la question précédente. Donc, il existe nécessairement un vecteur $x \neq 0$ tel que $(x, f(x))$ soit libre et forme donc une base de $\mathbb{R}^2$ (car la dimension de $\mathbb{R}^2$ est égale à 2 et on a une famille libre de deux vecteurs).

c. D'après la Question (4a), on sait que

$$f(f(x)) = f^2(x) = -\operatorname{tr}(A) f(x) + \mathrm{d}(A) x.$$

Il suit que

$$M = \operatorname{Mat}(f, (x, f(x))) = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}(A) \\ 1 & -\operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}$$

d. Comme M et A représentent le même endomorphisme, on vient de montrer que

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}(A) \\ 1 & -\operatorname{tr}(A) \end{pmatrix}$$

En appliquant le même raisonnement à ${}^tA$ (qui n'est également pas colinéaire à I si A ne l'est pas $\operatorname{car}^t(\lambda I) = \lambda I\big)$, on a aussi

$${}^tA \sim \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}\left({}^tA\right) \\ 1 & -\operatorname{tr}\left({}^tA\right) \end{pmatrix}$$

Or, $\operatorname{tr}\left({}^tA\right) = \operatorname{tr}(A)$ et $d\left({}^tA\right) = d(A)$ donc

$$A \sim \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}(A) \\ 1 & -\operatorname{tr}(A) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \mathrm{d}\left({}^tA\right) \\ 1 & -\operatorname{tr}\left({}^tA\right) \end{pmatrix} \sim {}^tA$$

et la matrice A est bien semblable à sa transposée ${}^tA$.