Chapitre n°10

Systèmes différentiels

I. Rappels de première année

I. 1 Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants.

On souhaite résoudre une équation différentielle du type

$$(E) : \qquad y' + ay = b$$

où

- $a \in \mathbb{R}^*$ est une constante non nulle.
- b est une **fonction** continue sur I.
- l'inconnue y est une fonction définie et de classe C^1 sur I.

Remarque :

> Résoudre le cas où $a = 0$ revient à chercher une primitive de b.

Résolution de l'équation homogène

Proposition 1.1

L'ensemble des solutions de l'équation $(E_0) : y' + ay = 0$ est

$$S_0 = \left\{ t \mapsto \lambda e^{-at} : \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

$$y \text{ est une solution de } (E_0) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R},\ t \in \mathbb{R},\ y(t) = \lambda e^{-at}$$

En particulier, on remarque qu'il existe une infinité de solutions.

Définition/Proposition 1.2

Problème de Cauchy pour une équation différentielle d'ordre 1.
Soit $c \in \mathbb{R}$. Résoudre le problème de Cauchy :

$$(P_0) : \qquad \begin{cases} y' + ay = 0 \\ y(0) = c \end{cases}$$

c'est trouver les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ qui vérifient la condition initiale $y(0) = c$.

Il existe une unique solution au problème de Cauchy.

Remarque :

> L'équation différentielle $y' + ay = 0$ possède une infinité de solutions mais il n'en reste plus qu'une lorsqu'on fixe la condition initiale. Ainsi, si deux solutions de $y' + ay = 0$ vérifient la même condition initiale, alors elles sont identiques.

L'ensemble des solutions de l'équation homogène peut s'écrire :

$$S_0 = \left\{t \mapsto \lambda e^{-at} : \lambda \in \mathbb{R}\right\} = Vect(f)$$

où $f : t \mapsto e^{-at}$. Ainsi S_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I)$, de dimension 1.

Recherche d'une solution particulière :

La recherche d'une solution particulière peut être guidée par l'exercice, il est cependant utile de connaître quelques situations :

- Si b est constante, une solution particulière est :
- Si b est une fonction polynomiale, alors il existe une solution particulière qui soit une fonction polynomiale, de même degré que b.

Proposition 1.3 — Principe de superposition

Soient b_1 et b_2 des fonctions continues sur I. On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) \ : \ y' + ay = b_1 \quad \text{et} \quad (E_2) \ : \ y' + ay = b_2$$

Si f_1 est une solution de E_1 et f_2 une solution de E_2, alors pour tous λ_1, λ_2 réels,

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \quad \text{est solution de } y' + ay = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

Résolution complète

Une fois que l'on a trouvé une solution particulière f_p de l'équation différentielle, on peut conclure que l'ensemble des solutions est

$$S = \left\{t \mapsto \lambda e^{-at} + f_p(t) \,|\, \forall \lambda \in \mathbb{R}\right\}$$

Remarque :

Ou bien $S = \left\{t \mapsto ce^{-at} + f_p(t)\right\}$ pour le problème de Cauchy (P_0).

Exercice 1

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 1 à coefficients constants

$$y' + 2y = 1 + t$$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Déterminer une solution particulière de (E).
3. Donner toutes les solutions de (E).

Complément : Méthode de variation de la constante

Soit $f : t \mapsto \lambda e^{-at}$ de l'équation différentielle homogène.. Comme son nom l'indique, la méthode consiste à faire varier la constante λ pour trouver une solution particulière de l'équation différentielle avec second membre (E). Plus précisément, on considère la fonction $f : t \mapsto \lambda(t)e^{-at}$ où la constante λ n'en est plus une, elle dépend maintenant de t :

- on suppose que la fonction $t \mapsto \lambda(t)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

- En dérivant, on obtient
$$f'(t) = \lambda'(t)e^{-at} - a\lambda(t)e^{-at} = \lambda'(t)e^{-at} - af(t)$$

$$\begin{aligned} f \text{ est solution de } (E) &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad f'(t) + af(t) = b(t) \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(t)e^{-at} - af(t) + af(t) = b(t) \\ &\iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \lambda'(t) = b(t)e^{at} \\ &\iff \text{la fonction } \lambda \text{ est une primitive de la fonction } t \mapsto b(t)e^{at} \text{ sur } \mathbb{R} \end{aligned}$$

- Par hypothèse, b est continue sur $\mathbb{R}$ donc la fonction $t \mapsto b(t)e^{at}$ est également continue sur $\mathbb{R}$ et donc elle admet une primitive sur $\mathbb{R}$. Notons $t \mapsto k(t)$ une telle primitive. Ainsi, la fonction
$$f : t \mapsto k(t)e^{-at}$$
est une solution particulière de l'équation différentielle (E).

Remarque :

> Le raisonnement est à refaire à chaque fois. Pour calculer l'expression de la fonction k, il suffit de se rappeler que
> $$k(t) =$$

Exercice 2

Reprendre l'exercice précédent et chercher une solution particulière par la méthode de variation de la constante.

I. 2 Équations différentielles linéaires d'ordre 2 à coefficients constants.

On souhaite résoudre une équation différentielle du type
$$(E) : \qquad y'' + ay + by = c$$
où

- $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$ deux constantes.
- c est une **fonction** continue sur I.
- l'inconnue y est une fonction définie et de classe C^2 sur I.

Remarque :

> Résoudre le cas où $b = 0$ revient à se ramener au cas d'une EDL à l'ordre 1.

Résolution de l'équation homogène

Proposition 1.4

L'ensemble des solutions de l'équation $(E_0) : y'' + ay' + by = 0$ dépend des racines du polynôme caractéristique :
$$P(X) = X^2 + aX + b$$
Si Δ est le discriminant de P, alors

- si $\Delta > 0$, P admet deux racines r_1 et r_2 et
$$S_0 = \left\{ t \mapsto \lambda e^{r_1 t} + \mu e^{r_2 t} : (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
- si $\Delta = 0$, P admet une racine r_0 et
$$S_0 = \left\{ t \mapsto (\lambda + \mu t)e^{r_2 t} : (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2 \right\}$$
- si $\Delta < 0$, Hors Programme.

Définition/Proposition 1.5

Problème de Cauchy pour une équation différentielle d'ordre 1.
Soit $c \in \mathbb{R}$. Résoudre le problème de Cauchy :

$$(P_0) : \quad \begin{cases} y'' + ay' + by = 0 \\ y(0) = c \\ y'(0) = d0 \end{cases}$$

c'est trouver les solutions de $y' + ay = 0$ qui vérifient la condition initiale $y(0) = c$ et $y'(0) = d$.

Il existe une unique solution au problème de Cauchy.

Remarque :

Plus précisément :

- Si $\Delta > 0$, on trouve c et d en résolvant le système :
- Si $\Delta > 0$, on trouve c et d en résolvant le système :

L'ensemble des solutions de l'équation homogène peut s'écrire : $S_0 = Vect(f_1, f_2)$ où

- Si $\Delta > 0$: $f_1 : t \mapsto e^{r_1 t}$, $f_2 : t \mapsto e^{r_2 t}$.
- Si $\Delta = 0$: $f_1 : t \mapsto e^{r_0 t}$, $f_2 : t \mapsto te^{r_0 t}$.

Ainsi S_0 est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^1(I)$, de dimension 2.

Recherche d'une solution particulière

La recherche d'une solution particulière peut être guidée par l'exercice, il est cependant utile de connaître quelques situations :

- Si b est constante, une solution particulière est :
- Si b est une fonction polynomiale, alors il existe une solution particulière qui soit une fonction polynomiale, de même degré que b.

Proposition 1.6 — Principe de superposition

Soient b_1 et b_2 des fonctions continues sur I. On considère les équations différentielles suivantes :

$$(E_1) \ : \ y'' + ay' + by = c_1 \quad \text{et} \quad (E_2) \ : \ y'' + ay' + by = c_2$$

Si f_1 est une solution de E_1 et f_2 une solution de E_2, alors pour tous λ_1, λ_2 réels,

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 \quad \text{est solution de } y' + ay = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$$

Résolution complète

Une fois que l'on a trouvé une solution particulière f_p de l'équation différentielle, on peut conclure que l'ensemble des solutions est

$$S = \{f_h + f_p \,|\, f_h \in S_0\}$$

Exercice 3

On considère l'équation différentielle linéaire d'ordre 2 à coefficients constants $(E) : \quad y'' + y' - 2y = (10 + 8t)e^{2t}$

1. Résoudre l'équation homogène associée à (E).
2. Déterminer une solution particulière de (E) sous la forme $t \mapsto cte^{2t}$, $c \in \mathbb{R}$.
3. Donner toutes les solutions de (E).

II. Systèmes différentiels à coefficients constants

Définition 2.1

On appelle système différentiel linéaire à coefficients constants toute équation différentielle linéaire de la forme

$$(E) : \begin{cases} x_1' = a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n \\ x_2' = a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n \\ \vdots \\ x_n' = a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n \end{cases}$$

où

- $n \in \mathbb{N}^*$
- les $a_{i,j}$ sont des constantes réelles, appelées coefficients du système différentiel
- $x_1, \ldots, x_n$ désignent des fonctions inconnues, définies et dérivables sur un intervalle I.

Remarques :

R1 – Soit $X(t) = \begin{vmatrix} I & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \\ t & \mapsto & \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix} \end{vmatrix}$ avec x_1, x_2, … dérivables sur $\mathbb{R}$. Alors on dit que X est dérivable sur I et on note

$$\forall t \in I \qquad X'(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$$

R2 – Soit X et Y deux telles fonctions et λ un réel, alors $X + \lambda Y$ est dérivable et

$$(X + \lambda Y)' = X' + \lambda Y'$$

On peut réécrire le système différentiel (E) sous la forme

$$X' = AX$$

où $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Ensemble des solutions

Proposition 2.2 — Structure de l'ensemble des solution

Soit $X' = AX$ un système d'équation différentielles à coefficients constants , Alors l'ensemble des solutions est un espace vectoriel de dimension l'ordre de de A

Démonstration. □

Définition/Proposition 2.3 — Problème de Cauchy

Un **problème de Cauchy** est la donnée d'un système $X' = AX$ d'une condition initiale $X_0 = X(t_0)$.

Un problème de Cauchy a unique solution définie sur $\mathbb{R}$.

III. Résolution

III. 1 Cas d'une matrice diagonale

Théorème 3.1 — Résolution cas diagonale

On suppose que l'on étudie le système que l'on étudie est de la forme

$$X' = DX \qquad \text{où} \qquad D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Alors les solutions de l'équation sur $\mathbb{R}$ sont de la forme

$$X(t) = \begin{pmatrix} K_1 \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ K_2 \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ K_n \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$$

où K_1, K_2, …, K_n sont des constantes réelles que l'on peut choisir arbitrairement ou qui sont déterminées par les conditions initiales

Démonstration. □

Remarques :

R1 – On retrouve que l'ensemble des solutions est de dimension n

R2 – On peut écrire que l'espace des solutions est

$$\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{\lambda_1 t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{e}^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \mathrm{e}^{\lambda_n t} \end{pmatrix}\right)$$

Exemple :

On étudie le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) \\ y'(t) &= -2y(t) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} x(0) &= 1 \\ y(0) &= 4 \end{cases}$$

Alors l'unique solution de ce problème de Cauchy est

$$\forall t \in \mathbb{R} \qquad x(t) = \mathrm{e}^{t} \qquad y(t) = 4\mathrm{e}^{-2t}$$

III. 2 Cas d'une matrice diagonalisable

Supposons que A soit diagonalisable. Alors il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D est la telles que l'on puisse écrire

$$A = PDP^{-1}$$

Alors

$$X' = AX \Leftrightarrow X' = PDP^{-1}X \Leftrightarrow \mathrm{P}^{-1}\,X' = DP^{-1}X$$

ou encore, comme P est une matrice constante $\left(P^{-1}X\right)' = DP^{-1}X$.
On pose $Y = P^{-1}X$ qui correspond aux coordonnées dans la base de vecteurs propres. On obtient alors

$$Y' = DY$$

et on se ramène au cas précédent. On en déduit que $Y = \begin{pmatrix} K_1 e^{\lambda_1 t} \\ K_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ K_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}$, et donc

Théorème 3.2

Dans ce cas , les solutions sont définies sur $\mathbb{R}$ et sont de la forme $\boxed{X(t) = P \begin{pmatrix} K_1 e^{\lambda_1 t} \\ K_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ K_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}}$,

où K_1, K_2, ..., K_n sont des constantes choisies arbitrairement

Exemple :

On cherche à étudier le système $\begin{cases} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= x(t) + y(t) \end{cases}$.

- **Mise sous forme matricielle :** La forme matricielle de ce système est $\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = X(t)$

  $X' = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} X$.

- **Réduction de la matrice :** La matrice A admet pour valeurs propres

  – 0 associée à $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ – 2 associée à $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

  On a ainsi $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

- **On se ramène au cas diagonale :** L'équation devient

  $$X' = PDP^{-1}X \qquad \left(P^{-1}X\right)' = AP^{-1}X$$

  en posant $Y = P^{-1}X$, on trouve alors $Y' = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} Y$.

Attention:

On n'a pas besoin de calculer P^{-1} !!

- **Résolution du cas diagonale :** il existe donc deux constantes réelles α et β telles que $Y(t) = \begin{pmatrix} \alpha e^{0t} \\ \beta e^{2t} \end{pmatrix}$
- **Retour au cas général :** Comme $X(t) = PY(t)$, $\boxed{X(t) = \begin{pmatrix} \alpha + \beta e^{2t} \\ -\alpha + \beta e^{2t} \end{pmatrix}}$

Exercice 4

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$. Résoudre le problème de Cauchy $\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$.

Exercice 5

On considère le système différentiel linéaire $\begin{cases} x_1' = x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_2' = 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ x_3' = -x_1 - 2x_2 + x_3 \end{cases}$

1. Expliciter une matrice $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $X' = AX$, où $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
2. Justifier que A est diagonalisable. Donner sans calcul une première valeur propre de A.
3. Calculer $A^2(A - 6I)$. En déduire le spectre de A.
4. Diagonaliser A.
5. Déterminer, pour tout $t \in \mathbb{R}$, l'expression de $X(t)$.

IV. Trajectoires dans la plan

IV. 1 Équilibre et convergence

Définition 4.1

On appelle point d'équilibre ou état d'équilibre du système différentiel $X' = AX$ toute solution constituée de fonctions constantes. On a alors l'équivalence :

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ est un point d'équilibre } \iff A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0$$

Proposition 4.2

La matrice A est inversible si et seulement si l'unique point d'équilibre du système différentiel linéaire $X' = AX$ est le point $(0, \dots, 0) = 0_{\mathbb{R}^n}$.

Remarque :

> Si la matrice n'est pas inversible, il existe une infinité de points d'équilibre : le noyau de A.

Définition 4.3

On appelle trajectoire du système différentiel $X' = AX$ tout ensemble de la forme

$$\{(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n : t \in \mathbb{R}\}$$

où $(x_1, \dots, x_n)$ est une solution du système différentiel $X' = AX$.

Remarque :

> La trajectoire d'un équilibre est réduite à un point.

Définition 4.4

Soit $(x_1, \dots, x_n)$ une solution du système différentiel linéaire $X' = AX$. Soit $(\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$.
On dit que la trajectoire $\{(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n : t \in \mathbb{R}\}$ converge vers $(\ell_1, \dots, \ell_n)$ si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$\lim_{t \to +\infty} x_i(t) = \ell_i$$

Si il n'existe pas de tel n-uplet $(\ell_1, \dots, \ell_n)$, alors on dit que la trajectoire diverge.

Proposition 4.5 — Spectre et convergence

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice diagonalisable. On considère le système différentiel linéaire $X' = AX$.

- Si toutes les valeurs propres de A sont négatives ou nulles, alors toutes les trajectoires du système convergent vers un point d'équilibre et on dit que ces points d'équilibres sont stables.
- Si A possède au moins une valeur propre strictement positive, alors il existe des trajectoires divergentes.

IV. 2 Représentations graphiques

On se place dans le plane ($n = 2$). On souhaite donner les représentations graphiques de trajectoires d'un système :

$$(E) : \begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$

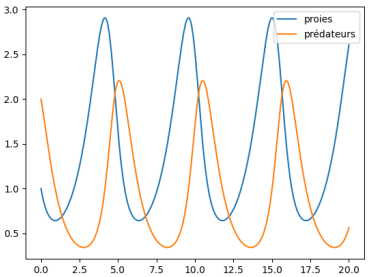
On peut soit tracer les deux fonctions x et y en fonction de t, soit tracer la fonction y en fonction de x. On parle de trajectoire dans l'espace des phases. Prenons l'exemple (hors programme), du modèle de proie-prédateurs de Lodka-Voltera.

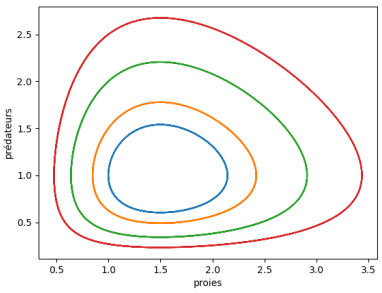
Ce modèle est mis au point au début du 20ième siècle pour décrire des systèmes biologiques où deux espèces cohabitent : prédateurs et proies. Certains biologistes cherchaient à comprendre pourquoi les populations de différentes espèces de poisson dans la mer Adriatique variaient de façon contre intuitive. On note $x(t)$ et $y(t)$ la population de deux espèces au cours du temps $x(t)$ est la population de proie et $y(y)$ celle de prédateurs On modélise l'évolution de ces deux populations par le système suivant

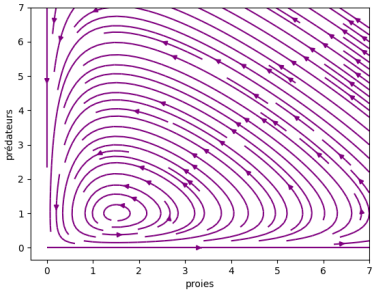
$$\begin{cases} x'(t) &= \alpha x(t) - \beta x(t) y(t) \\ y'(t) &= \delta x(t) y(t) - \gamma y(t) \end{cases}$$

- α taux de reproduction des proies
- β taux de mortalité des proies, du à la prédation
- δ taux de reproduction des prédateurs, proportionnel à la population de proies (dont les prédateurs se nourrissent)
- γ taux de mortalité des prédateurs, indépendant des proies

On peut utiliser `numpy` pour résoudre numériquement ce type d'équation, dans la suite on prend arbitrairement $\alpha = \beta = \delta = 1$, $\gamma = 1,5$.







Cas d'une matrice diagonale

On considère une matrice $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ diagonale. On note $X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. On a

$$X' = AX \iff \begin{cases} x' = \lambda_1 x \\ y' = \lambda_2 y \end{cases} \iff \forall t \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x(t) = x(0)e^{\lambda_1 t} \\ y(t) = y(0)e^{\lambda_2 t} \end{cases}$$

Remarquons que $x(0) = 0$ si et seulement si, pour tout $t \in \mathbb{R}, x(t) = 0$. Plaçons nous dans le cas où $x(0) \neq 0$. On peut alors écrire $t = \dfrac{1}{\lambda_1} \ln\left(\dfrac{x(t)}{x(0)}\right)$

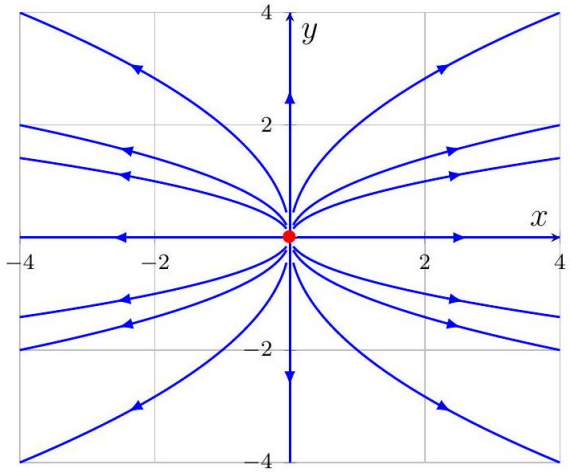
ce qui donne, en injectant cette formule dans celle donnant $y(t)$: $y(t) = y(0)\left(\dfrac{x(t)}{x(0)}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$

On peut faire disparaître la dépendance en t pour ne garder que la relation entre y et x (c'est l'équation des trajectoires) :

$$y = y(0)\left(\frac{x}{x(0)}\right)^{\frac{\lambda_2}{\lambda_1}}$$

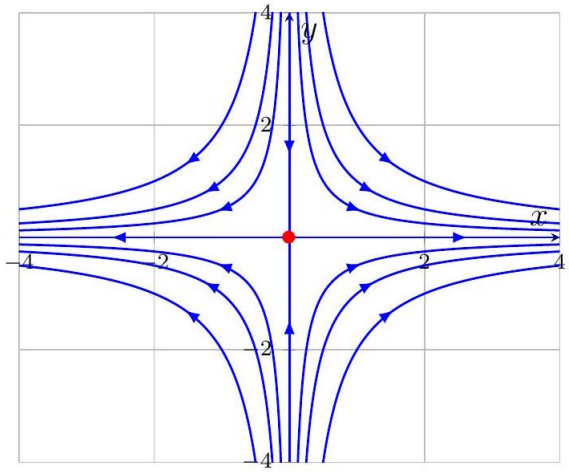
Le dessin des trajectoires dépend du signe des valeurs propres λ_1 et λ_2.

- Cas où $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$:



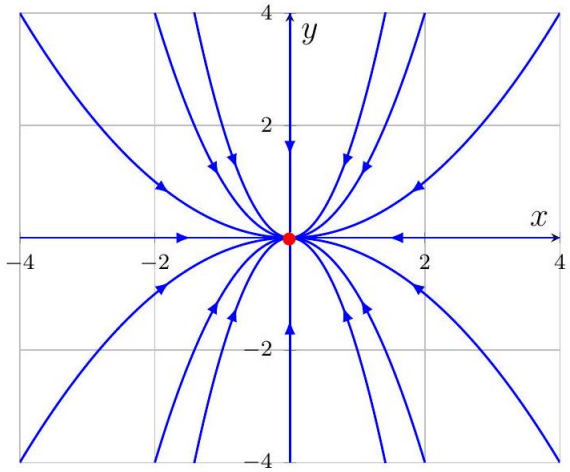
Aucune trajectoire non stationnaire ne converge. L'unique point d'équilibre est instable.

- Cas où $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$:



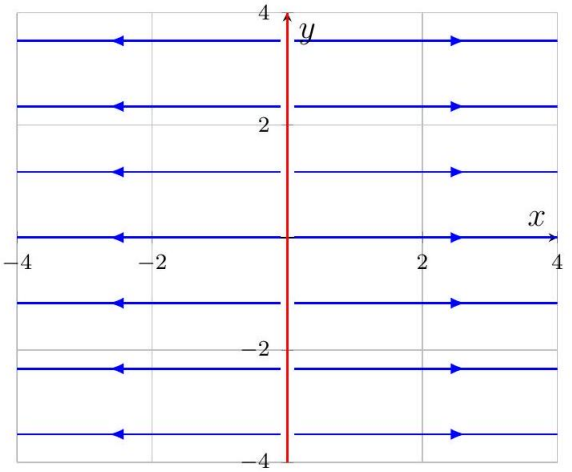
On remarque que la plupart des trajectoires divergent mais que deux trajectoires remarquables convergent vers l'unique point d'équilibre $(0, 0)$. On dit dans cette situation que le point d'équilibre est un point selle.

- Cas où $0 > \lambda_1 > \lambda_2$:



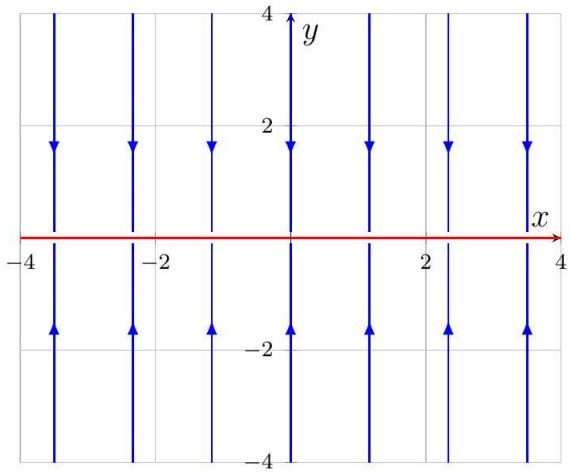
Toutes les trajectoires convergent vers l'unique point d'équilibre, stable.

- Cas où $\lambda_1 > \lambda_2 = 0$:



Aucune trajectoire non stationnaire ne converge. Infinité de points d'équilibres, tous instables.

Cas où $\lambda_1 = 0 > \lambda_2$:



Toutes les trajectoires convergent. Infinité de points d'équilibres, tous sont stables.
Tableau récapitulatif de la nature des points d'équilibre :

λ_1	$\lambda_2 < 0$	$\lambda_2 = 0$	$\lambda_2 > 0$
$\lambda_1 < 0$	stable	stables	selle
$\lambda_1 = 0$	stables	stables	instables
$\lambda_1 > 0$	selle	instables	instable

Cas d'une matrice diagonalisable

Proposition 4.6 — Stabilité dans le cas diagonalisable

On étudie le système $X' = AX$

- Si toutes les valeurs propres sont strictement positives alors 0 est un point d'équilibre instable
- Si toutes les valeurs propres sont strictement négatives alors 0 est un point d'équilibre stable
- Si les valeurs propres de A sont toutes non nulles mais de signes différents, l'origine est un point d'équilibre stable dans certaines directions instables dans d'autres
- Si il existe des valeurs propres nulles on peut parler de cas dégénéré.

V. Compléments

V. 1 Cas d'une matrice non diagonalisable

On considère le système différentiel linéaire

$$\begin{cases} x' = x + 2y - 2z \\ y' = -4x - 3y + 4z \\ z' = -2x + z \end{cases}$$

où x, y, z sont trois fonctions inconnues, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. On pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telle que X solution de (E) si et seulement si $X' = AX$.
2. On introduit la matrice inversible P dont on admet que l'inverse est donnée par la matrice P^{-1} ci-après

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

(a) Montrer que $P^{-1}AP = T$ où T est la matrice triangulaire supérieure $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) On pose $Y = P^{-1}X$. Montrer que $X' = AX \iff Y' = TY$.

3. (a) Résoudre l'équation différentielle $(E_1) : \varphi' = \varphi$.

(b) Résoudre l'équation différentielle $(E_2) : \varphi' = -\varphi$.

(c) Soit $c \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $t \mapsto cte^{-t}$ est une solution particulière de l'équation différentielle $(E_3) : \varphi' = -\varphi + ce^{-t}$.

4. On note $Y = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ et on suppose que $Y' = TY$.

Montrer que α est solution de (E_1), γ est solution de (E_2) et β est solution de (E_3) pour un réel c bien choisi.

5. En déduire que si $X' = AX$, alors il existe des réels $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ tels que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{cases} x(t) = (2\lambda_1 t + \lambda_2 - \lambda_1)\, e^{-t} \\ y(t) = 2\lambda_1 e^{-t} + \lambda_3 e^{t} \\ z(t) = (2\lambda_1 t + \lambda_2)\, e^{-t} + \lambda_3 e^{t} \end{cases}$$

6. En déduire une solution de (E) non stationnaire qui converge vers l'unique état équilibre du système.

V. 2 Systèmes différentiels et EDL d'ordre 2

On considère une équation différentielle linéaire à coefficients constants d'ordre 2

$$y'' + ay' + by = 0$$

où $b \neq 0$.

- **Mise sous forme matricielle** : En posant

$$X = \begin{pmatrix} y \\ y' \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad A =$$

on se ramène à un système différentiel linéaire, plus précisément, on obtient l'équivalence :

$$X \text{ solution de } (E) \iff X' = AX.$$

- **Réduction de la matrice** : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. On a

$$\begin{aligned} \lambda \text{ valeur propre de } A &\iff A - \lambda I \text{ non inversible} \\ &\iff \lambda^2 + a\lambda + b = 0 \\ &\iff P(\lambda) = 0, \end{aligned}$$

où $P(X)$ est le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle (E).

  - Si P admet deux racines r_1 et r_2, la matrice est diagonalisable, (deux valeurs propres distinctes pour une matrice carrée d'ordre 2) et on peut poursuivre l'étude comme habituellement.
  - Si P admet une racine double, A n'est pas diagonalisable. On se laissera alors guider par l'énoncé comme dans la partie précédente.

Remarque :

> Si P admet deux racines r_1 et r_2, on retrouve facilement le résultat sur les solutions d'une équation différentielle linéaire d'ordre 2 :