

Équations différentielles linéaires d'ordre 1 à coefficients constants



EXERCICE 1

Résoudre les équations différentielles suivantes.

- | | |
|----------------------------|--------------------------------------|
| 1. $y' = y + 1$ | 4. $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$ |
| 2. $y' = 3y + e^{3x}$ | 5. $y' = -y + xe^x$ |
| 3. $y' = 2y + e^{2x}(1+x)$ | 6. $y' = 2y + 2x^2 - 1$ |



EXERCICE 2

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

- | | | |
|---|--|---|
| 1. $\begin{cases} y' + 2y = 3 \\ y(0) = 10 \end{cases}$ | 2. $\begin{cases} y' - y = t^2 + 1 \\ y(0) = -3 \end{cases}$ | 3. $\begin{cases} y' + y = te^t \\ y(1) = -1 \end{cases}$ |
|---|--|---|

EDL d'ordre deux à coefficients constants



EXERCICE 3

Résoudre les problèmes de Cauchy suivants.

- | | | |
|--|---|--|
| 1. $\begin{cases} y'' - 3y' + 2y = 0 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$ | 2. $\begin{cases} y'' - 4y' + 4y = 0 \\ y(0) = -3 \\ y'(0) = 1 \end{cases}$ | 3. $\begin{cases} y'' - 2y = 0 \\ y(0) = -1 \\ y'(0) = -1 \end{cases}$ |
|--|---|--|



EXERCICE 4

Déterminer l'ensemble des solutions des équations différentielles suivantes :

- | | |
|------------------------------------|-------------------------------|
| 1. $y'' - 3y' + 2y = 1 + t$ | 4. $y'' - 4y' + 4y = te^{2t}$ |
| 2. $y'' - 3y' + 2y = te^t$ | 5. $y'' - 2y = e^t$ |
| 3. $y'' - 4y' + 4y = (-1+t)e^{-t}$ | 6. $y'' - 2y = 1 - 2t + 3t^2$ |



EXERCICE 5

Déterminer les solutions de l'équation différentielle $y'' - y' = 0$ de deux manières différentes :

- (1) En appliquant le théorème du cours sur les équations différentielles linéaires d'ordre 2.
- (2) En faisant un changement de fonction inconnue pour se ramener à une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Systèmes différentiels - Cas diagonalisable



EXERCICE 6

On veut résoudre le problème de Cauchy

$$\begin{cases} x' = x - 2y \\ y' = -2x + y \end{cases} \quad x(0) = 1 = y(0)$$

- Écrire le système sous la forme $X' = AX$
- Trouver des matrices D diagonale et P inversible telles

$$A = PDP^{-1}$$

- En posant $Y = P^{-1}X$ et **sans calculer** P^{-1} Montrer que Y vérifie l'équation

$$Y' = DY$$

- Résoudre cette équation.
- En déduire les solutions de l'équation initiale.
- Trouver la solution du problème de Cauchy.



EXERCICE 7

Résoudre

$$(S1) \begin{cases} x' = -\frac{x}{2} - y \\ y' = -\frac{x}{4} - \frac{y}{2} \end{cases} \quad (S2) \begin{cases} x' = -2y \\ y' = -\frac{x}{2} \end{cases}$$

EXERCICE 8 — Valeurs propres données

On cherche à résoudre les systèmes différentiels suivants :

$$(S1) \cdot \begin{cases} x' = x + 2y - z \\ y' = 2x + 4y - 2z \\ z' = -x - 2y + z \end{cases} \quad (S2) \cdot \begin{cases} x' = y + z \\ y' = -x + 2y + z \\ z' = x + z \end{cases}$$

- Écrire le système (S1) sous la forme $X' = AX$
- On donne les valeurs propres de A : 0 et 6. Diagonaliser la matrice puis résoudre le système
- Écrire (S2) sous la forme $X' = BX$
- Les valeurs propres de B sont 0, 1 et 2. Résoudre ce système

EXERCICE 9 — polynôme annulateur donné

On pose

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et on cherche à résoudre le système $X' = AX$

1. On pose $X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$, écrire $X' = AX$ sous la forme d'un système de trois équations différentielle
2. Calculer A^3 , en en déduire un polynôme annulateur de A
3. Diagonaliser A
4. Résoudre le système différentiel.

Systèmes différentiels - Autres cas**EXERCICE 10**

On étudie $(S_1) : \begin{cases} x' &= -2x + y \\ y' &= -4x + 2y \end{cases}$.

1. Écrire ce système sous forme matricielle $X' = AX$.
2. Calculer A^2 . En déduire les valeurs propres potentielles de A . Est-elle diagonalisable ?
3. On pose $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer AU . On nomme $V = AU$, calculer AV .
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$. Montrer que P est inversible et sans calcul montrer que

$$A = PNP^{-1} \text{ avec } N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

5. On note $Y = P^{-1}X$, montrer que $Y' = NY$ (S_2)
6. On pose $Y(t) = \begin{pmatrix} u(t) \\ v(t) \end{pmatrix}$. Montrer (S_2) peut s'écrire $\begin{cases} u'(t) &= 0 \\ v'(t) &= u(t) \end{cases}$.
7. Résoudre ce dernier système et montrer qu'il existe deux constantes telles que :

$$u(t) = K_1 \quad v(t) = K_1 t + K_2$$

8. Résoudre le système initial.

EXERCICE 11 — Cas non diagonalisable

On cherche à résoudre le système

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + y(t) \\ y'(t) &= y(t) \end{cases} \quad x(0) = y(0) = 1$$

1. Écrire le système sous forme matricielle $X' = AX$
2. Montrer que la matrice A n'est pas diagonalisable
3. En utilisant la deuxième ligne du système trouver la forme de y (on utilisera la condition initiale).
4. En déduire que x vérifie l'équation

$$x'(t) = x(t) + e^t$$

5. Résoudre cette équation (on pourra chercher une solution particulière sous la forme $t \mapsto (at + b)e^t$).

EXERCICE 12 — Second membre

On cherche à résoudre

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) - 2y(t) + e^{3t} \\ y'(t) &= -2x(t) + y(t) + e^{3t} \end{cases}$$

On pose

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \quad B(t) = \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$$

1. Trouver une matrice A telle que le système s'écrive

$$X' = AX + B$$

2. Résoudre le système $X' = AX$
3. Montrer que $X_0(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{3t} \\ e^{3t} \end{pmatrix}$ est solution particulière de l'équation de départ
4. Résoudre l'équation.

Ordre supérieur



EXERCICE 13

On étudie l'équation : $y'' = 4y$.

1. Résoudre cette équation avec la méthode vue l'année dernière
2. On pose $Y(t) = \begin{pmatrix} y'(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$. Trouver une matrice A telle que $Y' = AY$
3. Résoudre cette dernière équation avec la méthode vue cette année

EXERCICE 14 — Ordre 3

On cherche à résoudre : $y''' = 6y'' - 11y' + 6y$.

1. Soit $Y(t) = \begin{pmatrix} y'' \\ y' \\ y \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 6 & -11 & 6 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que Y vérifie le système : $Y' = AY$.
2. Montrer que $(A - I_3)(A - 2I_3)(A - 3I) = 0$
3. En déduire les valeurs propres et les vecteurs propres de A
4. Écrire A sous la forme $A = PDP^{-1}$
5. En posant $Z = P^{-1}Y$, montrer que Z vérifie $Z' = DZ$ résoudre cette équation puis donner une expression de Y
6. Donner une expression de $y(t)$



EXERCICE 15

On veut résoudre le système $\begin{cases} x''(t) = x'(t) + y'(t) - y(t) \\ y''(t) = x'(t) + y'(t) - x(t) \end{cases}$. On pose $X = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$.

1. Trouver une matrice A telle que $X' = AX$
2. Les valeurs propres de A sont -1 et 1 . Résoudre l'équation

Hors Programme : Equations différentielles à coefficients non constants



EXERCICE 16

Résoudre les équations différentielles suivantes.

$$1. \quad y' + \frac{2x}{1+x^2}y = \frac{1+3x^2}{1+x^2} \quad \Bigg| \quad 2. \quad y' - \ln(x)y = x^x$$



EXERCICE 17

Résoudre, sur $]0, 1[$, l'équation différentielle : $(1-x^2)y' + xy = \frac{1}{x} + x \ln(x) - x$



EXERCICE 18

Déterminer l'ensemble des fonctions $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \int_0^x f(t)(2x-3t)dt = \frac{x^2}{2}.$$

EXERCICE 19 — Lemme de Gronwall

Soient $c \in [0, +\infty[$ et $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue positive. Soit $u : I \rightarrow \mathbb{R}$ telle que :

$$\forall x \in \left[a, b \right], \quad |u(x)| \leq c + \int_a^x |u(t)|g(t)dt$$

1. On pose $v : x \mapsto c + \int_a^x |u(t)|g(t)dt$ et $w : x \mapsto v(x) \exp\left(-\int_a^x g(t)dt\right)$. Montrer que w est décroissante sur I .
2. En déduire : $\forall x \in [a, b], |u(x)| \leq c \exp\left(\int_a^x g(t)dt\right)$.

Hors Programme : Équations fonctionnelles



EXERCICE 20

Soit f une fonction réelle à valeurs réelles deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x)f(y)$$

1. On commence par étudier la fonction f .
 - a) Déterminer les valeurs possibles de $f(0)$.
 - b) Montrer que si $f(0) = 0$, la fonction f est la fonction identiquement nulle.
 - c) Montrer que f est paire et : $f'(0) = 0$.

2. Démontrer, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f''(x)f(y) = f(x)f''(y)$
3. En déduire que f est soit nulle, soit solution d'une équation différentielle linéaire du second ordre à coefficients constants.
4. Déterminer l'ensemble des fonctions f satisfaisant l'équation fonctionnelle.

**EXERCICE 21**

On note $\mathcal{E}$ l'ensemble des fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues telles que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(xy) = xf(y) + yf(x)$$

Dans toute la suite, f désigne une fonction de $\mathcal{E}$.

1. a) Déterminer les valeurs de $f(0)$, $f(1)$ et $f(-1)$.
b) Démontrer que la fonction f est impaire.
2. On suppose que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.
a) Montrer que f est solution, sur l'intervalle $]0, +\infty[$, de l'équation différentielle :

$$xf'(x) - f(x) = kx$$

où k est une constante réelle dépendant de f que l'on précisera.

- b) Résoudre sur $]0, +\infty[$ l'équation différentielle précédente.
- c) En déduire, en fonction de la constante k , la valeur de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
- d) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
3. On note F la primitive de f qui s'annule en 0 .
a) Montrer que, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$F(xy) = x^2F(y) + \frac{xy^2}{2}f(x)$$

- b) En déduire que la fonction f est dérivable sur $]0, +\infty[$.
4. Déterminer l'ensemble $\mathcal{E}$.

Hors Programme : Équations différentielles non linéaires**EXERCICE 22**

Soit $(a, b) \in]0, +\infty[^2$. On considère l'équation différentielle logistique (non linéaire)

$$y' = ay - aby^2$$

- (1) Déterminer les équilibres de l'équation logistique.

(2) Soit f une solution de (E) sur $[0, +\infty[$ qui ne s'annule pas (on admet qu'une telle solution existe).

(a) On pose $z = \frac{1}{f}$. Montrer que z satisfait une équation différentielle linéaire puis montrer que, pour tout $t \geq 0$, $z(t) = b + (z(0) - b)e^{-at}$.

(b) En déduire que, pour tout $t \geq 0$, $f(t) = \frac{f(0)}{bf(0) + (1 - bf(0))e^{-at}}$.

(3) Calculer $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t)$. Que remarque-t-on ?

**EXERCICE 23**

On considère l'équation différentielle : $xy' - xe^{-\frac{y}{x}} - y = 0$.

Résoudre cette équation différentielle à l'aide du changement de variable $z : x \mapsto \frac{1}{x}y(x)$.

Hors Programme : Exponentielle de matrice**EXERCICE 24**

On note N une matrice carrée nilpotente, c'est à dire telle qu'il existe un entier naturel n $N^n = 0$ On note

$$\exp(N) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} N^k$$

et on cherche à résoudre

$$X' = NX \quad X(0) = X_0$$

1. Montrer $\exp(N) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} N^k$
2. On note $f : t \mapsto \exp(tN)$ calculer $f'(t)$
3. Résoudre l'équation.
4. Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R} \forall t' \in \mathbb{R} \quad \exp((t + t')N) = \exp(tN) \exp(t'N)$$

5. On note N' une autre matrice nilpotente montrer que $\exp(N + N') = \exp(N) \exp(N')$

6. On note $A = PDP^{-1}$ une matrice diagonalisable avec $D = \begin{pmatrix} d_1 & & \\ & \ddots & \\ & & d_r \end{pmatrix}$ deviner

la valeur de $\exp(A)$