Préliminaires

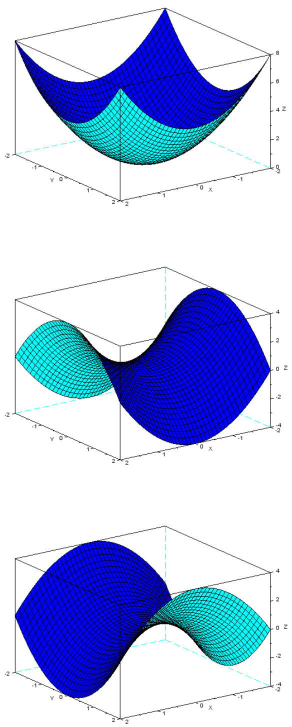
Exercice 1

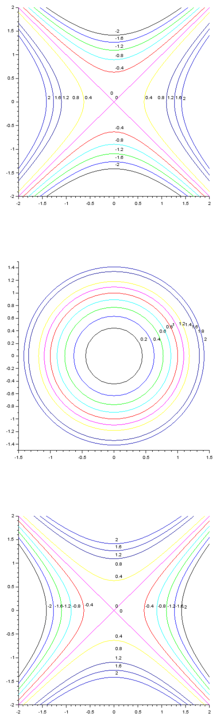
Grace à Python, on a représenté le graphe des trois fonctions suivantes

$$f_1 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,\ y) & \mapsto & x^2 - y^2 \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,\ y) & \mapsto & x^2 + y^2 \end{array}$$

$$f_3 : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,\ y) & \mapsto & -x^2 + y^2 \end{array}$$

1. Associer les trois graphes aux trois fonctions. Justifier rapidement votre réponse.
2. Nous avons tracé les lignes de niveau. Associer chaque graphe à sa fonction (x est en abscisses et y en ordonnées).





Continuité

Exercice 2

Donner l'ensemble de définition des fonctions suivantes, puis étudier leur continuité. On décomposera bien toutes les étapes en précisant bien les intervalles et les fonctions utilisés.

1. $(x,\ y) \mapsto xe^y$.
2. $(x,\ y) \mapsto x + ye^{x+y}$.
3. $(x,\ y) \mapsto \ln(x+y)$.
4. $(x,\ y) \mapsto x^\alpha y^{1-\alpha}$ avec $\alpha \in]0;\ 1[$.

Dérivabilité

Exercice 3

Calculer les deux dérivées premières des fonctions suivantes. Montrer qu'elles sont de classes $\mathcal{C}^1$ sur un ensemble que l'on déterminera.

1. $(x,\ y) \mapsto x$.
2. $(x,\ y) \mapsto y$.
3. $(x,\ y) \mapsto x + y$.
4. $(x,\ y) \mapsto x^2 - y^3$.
5. $(x,\ y) \mapsto \ln\left(1 + x^2 + y^2\right)$.
6. $(x,\ y) \mapsto \exp\left(x^2 + y^2\right)$.
7. $(x,\ y) \mapsto \exp\left(e^x + y\right)$.
8. $(x,\ y) \mapsto \sqrt{1 + x + y^2}$.
9. $(x,\ y) \mapsto x^\alpha y^{1-\alpha}$ avec $\alpha \in]0;\ 1[$.

Exercice 4

Calculer le gradient puis donner le développement limité en $(0,\ 0)$ à l'ordre 1. des fonctions suivantes Puis faire le même travail en $(1, 2)$.

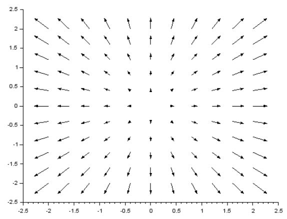
1. $(x,\ y) \mapsto xy$
2. $(x,\ y) \mapsto x^2 + y^2$
3. $(x,\ y) \mapsto x^2 - y^2 + xy$
4. $(x,\ y) \mapsto x^2y^2 + xy^3$
5. $(x,\ y) \mapsto \dfrac{1}{1 + x^2 + y^2}$
6. $(x,\ y) \mapsto \ln 1 + x^2 + y^2$

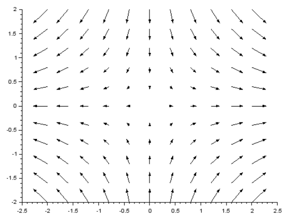
Exercice 5

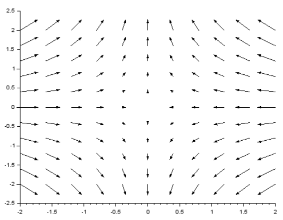
Reprendre l'exemple précédent en remplaçant $(0,\ 0)$ par $(1,\ 1)$.

Exercice 6

Pour les fonctions de l'exercice 1 nous avons tracé les gradients. Associer chaque gradient à sa fonction.







Dérivées d'ordre 2

Exercice 7

Reprendre l'exercice 3 et calculer les dérivées partielles secondes des fonctions.

Exercice 8

Reprendre l'exercice 4 et calculer la matrice hessienne en $(1, 1)$ ainsi que le développement limité à l'ordre 2.

Ouverts et fermés

Exercice 9

Dessiner les ensembles suivants. Lorsque la frontière n'appartient pas à l'ensemble la dessiner en pointillés. Deviner si c'est un ouvert, un fermé ou aucun des deux.

1. $\mathcal{E}_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x \geqslant 0\}$
2. $\mathcal{E}_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x < y\}$
3. $\mathcal{E}_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x > 0, y > 0\}$
4. $\mathcal{E}_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / y > x^2\}$
5. $\mathcal{E}_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 4\}$

Exercice 10 — DL et points critiques

Soit f une fonction de deux variables de classe $\mathcal{C}^2$ au voisinage de (x_0, y_0). On suppose que (x_0, y_0) est un point critique pour f et que la matrice hessienne de f en (x_0, y_0) est

$$\nabla^2(f)(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

avec λ et μ deux réels.

1. Écrire le DL à l'ordre deux de f au voisinage de $(x_0\ , y_0)$ en fonction de μ et λ.
2. On suppose que l'on peut assimiler f à son DL sans le terme en $\mathrm{e}(h, k)$, et que λ et μ sont positifs. Que se passe-t'il ?
3. Étudier les deux autres cas vus en cours.

Étude de points critiques

Exercice 11

Trouver les points critiques des fonctions suivantes et étudier leur nature.

1. $f(x, y) = x^2 + 2(y-1)^2$
2. $f(x, y) = 2x^3 - 2xy + y^2$
3. $f(x, y) = (x^2 + y^2)e^{x-y}$
4. $f(x, y) = x^3 + y^3 - xy$

Problèmes

Exercice 12

Soit

$$\begin{array}{rccl} f : & [0;\, 1]^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (x, y) & \mapsto & \dfrac{x + y}{(1 + x^2)(1 + y^2)} \end{array}$$

1. On pose $K = [0;\, 1]^2$. On admet que K est fermé, montrez qu'il est borné.
2. En déduire que f atteint un minimum et un maximum global sur K.
3. On note $\mathcal{O} =]0;\, 1[^2$ l'intérieur de K et on admet que $\mathcal{O}$ est ouvert. Trouver le seul point critique de f à l'intérieur de $\mathcal{O}$ et montrez que c'est un maximum local.

   Montrer que la valeur de ce maximum local est $\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

4. On pose pour $t \in [0;\, 1]$
$$\varphi(t) = f(t, 0)$$
   (a) Montrer que pour tout $t \in [0;\, 1]$ $f(t, 0) = \varphi(t)$
   (b) Calculer $\varphi(t)$ pour $t \in [0;\, 1]$.
   (c) Montrer que tout $t \in [0;\, 1]$ on a $\varphi(t) \leqslant \dfrac{1}{2}$.
   (d) En déduire que le maximum global dont on a prouvé l'existence à la question 2, ne peut pas être sur le bord à gauche ou en bas du carré K.
5. On pose pour $t \in [0;\, 1]$, $\psi(t) = f(1, t)$
   (a) Étudier les variations de ψ et en déduire que son maximum est $\dfrac{\sqrt{2}+1}{4}$.
   (b) En déduire que f ne peut pas atteindre son maximum ni sur le bord droit, ni sur le bord haut de K.
6. Ou se trouve le maximum de f ?

Exercice 13 — EDHEC 2006

Soit f la fonction définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :
$$f(x, y) = 2x^2 + 2y^2 + 2xy - x - y$$

1. (a) Calculer les dérivées partielles premières de f.
   (b) En déduire que le seul point critique de f est $A = \left(\dfrac{1}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles secondes de f.
   (b) Montrer que f présente un minimum local en A et donner la valeur m de ce minimum.
3. (a) Développer $2(x + \dfrac{y}{2} - \dfrac{1}{4})^2 + \dfrac{3}{2}\left(y - \dfrac{1}{6}\right)^2$.
   (b) En déduire que m est le minimum global de f sur $\mathbb{R}^2$.
4. On considère la fonction g définie pour tout couple (x, y) de $\mathbb{R}^2$ par :
$$g(x, y) = 2e^{2x} + 2e^{2y} + 2e^{x+y} - e^x - e^y$$
   (a) Utiliser la question 3) pour établir que : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, g(x, y) \geqslant -\dfrac{1}{6}$.
   (b) En déduire que g possède un minimum global sur $\mathbb{R}^2$ et préciser en quel point ce minimum est atteint.

Exercice 14 — EDHEC 2005

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par : $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\,(x, y) = x\, e^{x\left(y^2+1\right)}$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Déterminer les dérivées partielles premières de f
   (b) En déduire que le seul point en lequel f est susceptible de présenter un extremum local est $A = (-1, 0)$.
3. (a) Déterminer les dérivées partielles secondes de f.
   (b) Montrer qu'effectivement, f présente un extremum local en A. En préciser la nature et la valeur.
4. (a) Montrer que : $\forall\, (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ f\,(x, y) \geqslant x\, e^x$.
   (b) En étudiant la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g\,(x) = x\, e^x$, conclure que l'extremum trouvé à la question 2b) est un extremum global de f sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 15 — ECRICOM 2009 (adapté)

On considère l'application φ définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :
$$\varphi\,(x) = 2\ln\left(\frac{x}{2}\right) + \frac{1}{x}$$
ainsi que la fonction numérique f des variables réelles x et y définie par :
$$\forall\, (x, y) \in \,]0;\, +\infty[\, \times \,]0;\, +\infty[, \quad f\,(x, y) = e^{x+4y} \ln\,(xy)$$
On admet que l'ensemble de définition de f est un ouvert de $\mathbb{R}^2$.

Etude des zéros de φ.

1. Déterminer la limite de $\varphi\,(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
2. Déterminer la limite de $\varphi\,(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$, ainsi que la limite de $\dfrac{\varphi\,(x)}{x}$ lorsque x tend vers $+\infty$. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Justifier la dérivabilité de φ sur $\mathbb{R}_+^*$, déterminer sa dérivée.
4. Dresser le tableau de variation de φ, faire apparaître les limites de φ en 0^+ et $+\infty$.
5. On rappelle que $\ln(2) \simeq 0,7$. Montrer l'existence de deux réels positifs α et β tels que :
$$\varphi\,(\alpha) = \varphi\,(\beta) = 0$$
6. Proposer un programme en python permettant d'encadrer α dans un intervalle d'amplitude 10^{-2}. On utilisera le procédé de dichotomie.

Extrema de f sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$

1. Justifier que f est de classe C^2 sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.
2. Calculer les dérivées partielles premières et prouver que pour x, et y strictement positifs
$$\begin{cases} \partial_1 f(x,y) = f(x,y) + \dfrac{1}{x}e^{x+4y} \\ \partial_2 f(x,y) = 4f(x,y) + \dfrac{1}{y}e^{x+4y} \end{cases}$$
3. Montrer que les points de coordonnées respectives $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$ et $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$ sont des points critiques de f sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$.
4. Calculer les dérivées partielles secondes sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ et établir que :
$$\begin{cases} \partial_1^2 f\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}e^{2\alpha} \\ \partial_2^2 f\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = 16\dfrac{\alpha-1}{\alpha^2}e^{2\alpha} \\ \partial_{1,2}^2 f\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right) = \dfrac{4}{\alpha}e^{2\alpha} \end{cases}$$
5. La fonction f présente-t-elle un extremum local sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ au point de coordonnées $\left(\alpha, \dfrac{\alpha}{4}\right)$? Si oui, en donner sa nature (maximum on minimum)
6. De même, f présente-t-elle un extremum local sur $]0;+\infty[\times]0;+\infty[$ au point de coordonnées $\left(\beta, \dfrac{\beta}{4}\right)$?

Exercice 16 — D'après EDHEC 2015

On considère la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2, f(x,y) = 2x^2 + y^2 + 12x + 4y + 2xy + 24$$

1. Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. (a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 puis déterminer le seul point critique (a,b) de f.
   (b) Calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de f et écrire la matrice hessienne $\nabla^2(f)(a,b)$ de f en son point critique.
   (c) Déterminer les valeurs propres de $\nabla^2(f)(a,b)$ et en déduire que f admet un extremum local m au point (a,b) dont on précisera la nature (minimum ou maximum) et la valeur.
3. Le but de cette question est de montrer qu'en fait cet extremum est global.
   Compléter le membre de droite de l'égalité suivante
$$2x^2 + 2xy + 12x = 2\left(x + \frac{y}{2} + 3\right)^2 - \dots$$
   (b) Compléter de même l'égalité : $\dfrac{y^2}{2} - 2y + 6 = \dfrac{1}{2}(y-2)^2 + \dots$
   (c) En déduire une autre écriture de $f(x,y)$ montrant que l'extremum trouvé plus haut est global.

Exercice 17 — D'après EML 2011

On considère les fonctions

$$f :]0;+\infty[\to\mathbb{R},\quad x\longmapsto (x+\ln(x))e^{x-1} \quad \text{et} \quad F :]0;+\infty[\to\mathbb{R},\quad x\longmapsto F(x) = \int_1^x f(t)\mathrm{d}t.$$

1. Étudier f.
2. Montrer que F est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $]0;+\infty[$ et pour tout $x\in]0;+\infty[$, exprimer $F'(x)$ à l'aide de $f(x)$.
   On considère l'application de classe $\mathcal{C}^2$
$$G :]0;+\infty[^2\to\mathbb{R},\quad (x,y)\longmapsto G(x,y) = F(x) + F(y) - 2e^{\frac{x+y}{2}}$$
3. Pour tout $(x,y)\in]0;+\infty[^2$, exprimer les dérivées partielles premières $\partial_1(G)(x,y)$ et $\partial_2(G)(x,y)$ à l'aide de $f(x), f(y)$ et $e^{(x+y)/2}$.
4. (a) Montrer que f est bijective.
   (b) Établir que, pour tout $(x,y)\in]0;+\infty[^2$, (x,y) est un point critique de G si et seulement si
$$x = y \quad \text{et} \quad x + \ln x = e.$$
5. Montrer que l'équation $x+\ln x = e$ d'inconnue $x\in]0;+\infty[$ admet une unique solution, que l'on notera α, et montrer que : $1<\alpha<e$.
6. En déduire que G admet comme unique point critique le point (α,α) et montrer que la matrice Hessienne de G au point (α,α) s'écrit :
$$H = \nabla^2(G)(\alpha,\alpha) = \begin{pmatrix} f'(\alpha) - \dfrac{e^\alpha}{2} & -\dfrac{e^\alpha}{2} \\ -\dfrac{e^\alpha}{2} & f'(\alpha) - \dfrac{e^\alpha}{2} \end{pmatrix} = f'(\alpha)I_2 - \frac{e^\alpha}{2}M$$
   où
$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

7. (a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(M)$ et X un vecteur propre de M associé à λ. Montrer que
$$HX = \left(f'(\alpha) - \frac{e^\alpha}{2}\lambda\right) X$$
et en déduire que
$$\mathrm{Sp}(H) = \left\{f'(\alpha), f'(\alpha) - e^\alpha\right\}.$$
   (b) Montrer que $f'(\alpha) > e^\alpha$.
   (c) En déduire que G admet un extremum local et préciser sa nature.

Exercice 18 — Extrait de ECRICOME 2020

Pour tout entier naturel non nul, on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}_+$par :
$$\forall x \geqslant 0, f_n(x) = \int_0^x \frac{t^{2n}-1}{t+1}\,\mathrm{d}t$$

1. Démontrer que la fonction f_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+$et que, pour tout $x > 0$, $f_n'(x) = \dfrac{x^{2n}-1}{x+1}$.
2. Étudier les variations de f_n.
3. Démontrer que f_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+$, et calculer sa dérivée seconde.
   En déduire que f_n est convexe sur $\mathbb{R}_+$.
4. (a) Démontrer : $\forall t \geqslant 1, t^{2n} - 1 \geqslant n\left(t^2-1\right)$.
   (b) Montrer alors : $\forall x \geqslant 1, f_n(x) \geqslant f_n(1) + \dfrac{n}{2}(x-1)^2$.
   (c) En déduire la limite de $f_n(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.
5. Calculer $f_n(0)$, puis démontrer : $f_n(1) < 0$.
6. Démontrer que l'équation $f_n(x) = 0$ admet une unique solution strictement positive, et que cette solution est strictement supérieure à 1 .
   On note x_n cette solution.
   Dans toute la suite de l'exercice, on s'intéresse à la fonction G_n définie sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par :
$$G_n : (x,y) \mapsto f_n(x) \times f_n(y)$$
7. Justifier que la fonction G_n est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ et calculer ses dérivées partielles premières.
8. Déterminer l'ensemble des points critiques de G_n.
9. Calculer la matrice hessienne de G_n au point (x_n, x_n) puis au point $(1,1)$.
10. La fonction G_n admet-elle un extremum local en (x_n, x_n) ? Si oui, donner la nature de cet extremum.
11. La fonction G_n admet-elle un extremum local en $(1,1)$? Si oui, donner la nature de cet extremum.