Épreuve Composite

E C G

Concours Blanc n°2

Option économique

MATHEMATIQUES

6 Janvier 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.
Les questions précédées de (*) sont réservées aux cubes.

Exercice n°1

On note $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel réel des matrices carrées d'ordre trois à éléments réels, I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, 0 la matrice nulle de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
On considère, pour toute matrice A de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, les ensembles $E_1(A)$ et $E_2(A)$ suivants :

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,;\, AM = M\} \\ E_2(A) &= \left\{M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})\,;\, A^2M = AM\right\} \end{aligned}$$

Partie I

1. Montrer que $E_1(A)$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   On admettra que $E_2(A)$ est aussi un sous-espace vectoriel de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
2. (a) Établir : $E_1(A) \subset E_2(A)$
   (b) Montrer que, si A est inversible, alors $E_1(A) = E_2(A)$
3. (a) Établir que, si $A - I$ est inversible, alors $E_1(A) = \{0\}$
   (b) Un exemple : Soit $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Déterminer $E_1(B)$ et $E_2(B)$

Partie II

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ et le polynôme $P(X) = X^3 - 3X^2 + 2X$.

4. Factoriser le polynôme P et montrer que c'est un polynôme annulateur de C.
5. Calculer les valeurs propres et les sous-espaces propres de C.

6. En déduire une matrice diagonale D, dont les termes diagonaux sont dans l'ordre croissant, et une matrice inversible P, dont les éléments de la première ligne sont égaux à 1, telles que $C = P\,D\,P^{-1}$.
7. Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M$.
   Montrer : $\quad M \in E_1(C) \iff N \in E_1(D)$.
8. Montrer que $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
9. En déduire l'expression générale des matrices de $E_1(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_1(C)$.
10. Donner l'expression générale des matrices de $E_2(C)$ et déterminer une base et la dimension de $E_2(C)$.
    Est-ce que $E_1(C) = E_2(C)$?

RÉPONSE:

Partie I

1. *on vérifie les critères :*
   - $E_1(A) \subset \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   - *Comme* $A\,0 = 0$ *alors* $0 \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
   - *Si* M *et* N *sont deux matrices de* $E_1(A)$ *et* α *et* β *deux réels alors*
     $\alpha M + \beta N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *et*
     $A(\alpha M + \beta N) = \alpha AM + \beta AN = \alpha M + \beta N$ *car* M *et* N *sont dans* $E_1(A)$
     Donc $\alpha M + \beta N \in E_1(A)$

   Donc $E_1(A)$ *est bien un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
   On admet que $E_2(A)$ *est aussi un sous-espace vectoriel de* $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$
2. (a) *Pour montrer l'inclusion on montre que* ***si*** $M \in E_1(A)$ ***alors*** $M \in E_2(A)$:
   Si $M \in E_1(A)$ *alors* $AM = M$ *donc* $A^2M = A(AM) = AM$ *et donc* $M \in E_2(A)$
   (on avait aussi $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ *)*

   (b) *Si* A *est inversible, pour montrer l'égalité des deux ensembles, on doit montrer l'inclusion réciproque et donc que :*
   Si $M \in E_2(A)$ *alors* $A^2M = AM$ *et* $A^{-1}A^2M = A^{-1}AM$ *d'où* $AM = M$
   Alors $M \in E_1(A)$
   Donc $E_2(A) \subset E_1(A)$ *et finalement* $E_1(A) = E_2(A)$
3. (a) *Comme on a déjà* $0 \in E_1(A)$, *si* $A - I$ *est inversible il reste à montrer que*
   si $M \in E_1(A)$ *alors* $AM = M$ *d'où* $AM - M = 0$ *et* $(A - I)M = 0$
   et comme $A - I$ *est inversible* ***alors*** $M = 0$
   Donc $E_1(A) = \{0\}$ *si* $A - I$ *est inversible.*

   (b) *Soit* $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   Comme B *est diagonale à coefficients diagonaux non nuls,* B *est inversible donc* $E_1(B) = E_2(B)$
   Comme $B - I = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *est également inversible alors* $E_1(B) = \{0\} = E_2(B)$

Partie II

On considère la matrice $C = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$

1. *On recherche les valeurs propres et les sous-espaces propres de C : soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.*

$$(C - \alpha I)\, U = 0 \iff \left\{ \begin{array}{c} (3-\alpha)\, x - 2y - z = 0 \\ x - \alpha y - z = 0 \\ 2x - 2y - \alpha z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{c} (3-\alpha)\,(\alpha y + z) - 2y - z = 0 \\ x = \alpha y + z \\ 2\,(\alpha y + z) - 2y - \alpha z = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{c} \left(-\alpha^2 + 3\alpha - 2\right) y + (2-\alpha)\, z = 0 \quad L_1 - L_3 \\ x = \alpha y + z \\ (2\alpha - 2)\, y + (2-\alpha)\, z = 0 \end{array} \right. \iff (1) \left\{ \begin{array}{c} \left(-\alpha^2 + \alpha\right) y = 0 \\ x = \alpha y + z \\ (2\alpha - 2)\, y + (2-\alpha)\, z = 0 \end{array} \right.$$

Or $-\alpha^2 + \alpha = 0$ a pour solutions $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ donc

- *si $\alpha \neq 0$ et $\alpha \neq 1$ alors* $(1) \iff (2) \left\{ \begin{array}{c} y = 0 \\ x = z \\ (2-\alpha)\, z = 0 \end{array} \right.$
  - *si de plus $\alpha \neq 2$ alors* $(1) \iff \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = 0 \\ z = 0 \end{array} \right.$
  - *si $\alpha = 2$ alors* $(2) \iff \left\{ \begin{array}{l} y = 0 \\ x = z \end{array} \right.$ *et donc 2 est valeur propre associé au sous espace propre :* $\mathrm{Vect}\,((1, 0, 1))$
- *si $\alpha = 0$ alors* $(1) \iff \left\{ \begin{array}{c} x = z \\ -2y + 2z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = z \\ y = z \end{array} \right.$ *et donc 0 est valeur propre associé au sous espace propre :* $\mathrm{Vect}\,((1, 1, 1))$
- *si $\alpha = 1$ alors* $(1) \iff \left\{ \begin{array}{c} x = z + y \\ z = 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{l} x = y \\ z = 0 \end{array} \right.$ *et donc 1 est valeur propre associé au sous espace propre :* $\mathrm{Vect}\,((1, 1, 0))$

2. *Comme on a trois valeurs propre distinctes, on a une base de vecteurs propres en concaténant 3 vecteur propre associés à chacune des valeurs propres.*

   Donc avec $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ *et* $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ *on a* $C = P\, D\, P^{-1}$.

   (Les conditions d'ordre des terme de D et de première ligne de P étant bien respectées)

3. *Soit $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$. On note $N = P^{-1}M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.*

   On a alors :

$$\begin{aligned} M \in E_1(C) &\iff CM = M \iff CPN = PN \iff P^{-1}CP = N \\ &\iff DN = N \iff N \in E_1(D)\,. \end{aligned}$$

4. *Soit $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$, dont les coefficients sont :* $\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix}$ *alors*

$$\begin{aligned} N \in E_1(D) &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{ \begin{array}{l} 0 = x \\ 0 = y \\ 0 = z \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} a = a \\ b = b \\ c = c \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} 2u = u \\ 2v = v \\ 2w = w \end{array} \right. \\ &\iff N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

   Donc $N \in E_1(D)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que $N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

5. *Donc une matrice M est dans $E_1(C)$ si et seulement s'il existe trois réels a, b, c tels que*

$$\begin{aligned} M &= P\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= a\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc une famille génératrice de $E_1(C)$ et libre (échelonnée) est $\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$
qui est donc une base de $E_1(C)$ qui a finalement une dimension de 3.

6. *Comme D donc C n'est pas inversible on ne peut pas utiliser les résultats de la question **I**2.a)*
Par contre on peut refaire le même raisonnement que précédemment :
$M \in E_2(C) \iff C^2M = CM \iff PD^2P^{-1}N = PDP^{-1}M \iff D^2N = DN \iff N \in E_2(D)$
Comme D est diagonale, on a son carré sur les coefficients diagonaux et
Et avec les mêmes coefficients que précédemment

$$\begin{aligned} N \in E_2(D) &\iff \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ u & v & w \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} a = a \\ b = b \\ c = c \end{cases} \text{ et } \begin{cases} 4u = 2u \\ 4v = 2v \\ 4w = 2w \end{cases} \\ &\iff N = \begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Donc les matrices de $E_2(C)$ sont celles qui s'écrivent
$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y & z \\ a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+a & y+b & z+c \\ x+a & y+b & z+c \\ x & y & z \end{pmatrix}$ *et une famille génératrice et libre (échelonnée) de $E_2(C)$ est :*

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right)$$

donc une base de $E_2(C)$
La dimension de $E_2(C)$ est donc 6.
Donc comme $E_1(C)$ et $E_2(C)$, n'ont pas la même dimension, ils ne peuvent pas être égaux.

* * *

Exercice n°2

On considère, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, les fonctions

$$f_n : x \mapsto 1 + \ln(x+n), \quad \text{et} \quad h_n : x \mapsto x - f_n(x)$$

Partie I - Étude de f_1

1. Donner le domaine de définition $\mathcal{D}_{f_1}$ de la fonction f_1.

2. Justifier que f_1 est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathcal{D}_f$, exprimer $f_1'(x)$ puis dresser le tableau de variations de la fonction f_1. On ne justifiera pas les limites.

3. (a) Déterminer l'équation de la tangente en 0 au graphe de f_1.

   (b) Montrer que, pour tout $x \in \mathcal{D}_{f_1}, f_1(x) \leq x + 1$.

4. Tracer la courbe représentative de f_1. (On y fera figurer la tangente en 0.)

Partie II - Étude d'une suite implicite

5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   Montrer que l'équation $f_n(x) = x$ admet une unique solution dans $]0, +\infty\,[$, notée α_n.

6. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$h_n\left(\alpha_{n+1}\right) = \ln\left(\frac{\alpha_{n+1} + n + 1}{\alpha_{n+1} + n}\right)$$

   (b) En déduire que la suite (α_n) est strictement monotone. On précisera son sens de variations.

7. (a) Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \alpha_n > 1 + \ln(n)$.

   (b) En déduire la limite de la suite (α_n).

8. (a) Montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} h_n(\ln(n) + 2) = 1$$

   (F) On admet alors qu'il existe un rang $n_0 \geq 2$ tel que,

$$\forall n \geq n_0, \quad h_n(\ln(n) + 2) > 0$$

   (b) Montrer que, pour tout $n \geq n_0, \alpha_n < \ln(n) + 2$.

   (c) En déduire un équivalent simple de α_n lorsque n tend vers $+\infty$.

9. $(*)$ Déterminer la nature des séries $\sum \frac{\alpha_n}{n}$ et $\sum \frac{\alpha_n}{n^2}$.

Partie III - Valeur approchée de α_1 par dichotomie

10. Montrer que $1 < \alpha_1 < 3$. On pourra utiliser la Question (7a).

11. Recopier et compléter la fonction Python suivante afin qu'elle renvoie un couple $[c, n\ ]$ où c est une valeur approchée de α_1 à eps près, obtenue à l'aide de la méthode par dichotomie et n le nombre d'étapes nécessaires à la recherche de la valeur approchée.

```
import numpy as np
def alpha_1(eps):
    a=1
    b=3
    n=1
    while b-a > eps :
        c=(a+b)/2
```

```
        if ...:
            b=c
        else :
         ...
        n=...
    return [c,n]
```

Partie IV : Valeur approchée de α_1 par la méthode du point fixe

On définit la suite (u_n) par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = f_1(u_n) \end{cases}$$

12. Démontrer que la suite (u_n) est bien définie et que, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.
13. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_{n+1} - \alpha_1| \leq \frac{1}{2} |u_n - \alpha_1| .$$

14. En déduire que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|u_n - \alpha_1| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

15. Conclure quant à la limite de la suite (u_n).
16. Écrire une fonction Python d'en-tête def alpha_1_bis(eps) : prenant en argument un réel eps > 0 qui renvoie un couple (u_n, n) tel que

$$|u_n - \alpha_1| < \text{ eps.}$$

RÉPONSE:

1. *On a* $\mathcal{D}_{f_1} =]-1, +\infty[$.

2. *La fonction* f_1 *est dérivable sur* $]-1, +\infty[$ *comme somme et composée de fonctions dérivables.*
   Soit $x > -1$.

$$f_1'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$$

   d'où le tableau de variations :

x	-1	$+\infty$
$f(x)$	$-\infty$ $\nearrow$	$+\infty$

3. (a) *On a* $f_1'(0) = 1$ *et* $f_1(0) = 1$ *donc l'équation de la tangente en 0 au graphe de* f_1 *est*

$$y = x + 1$$

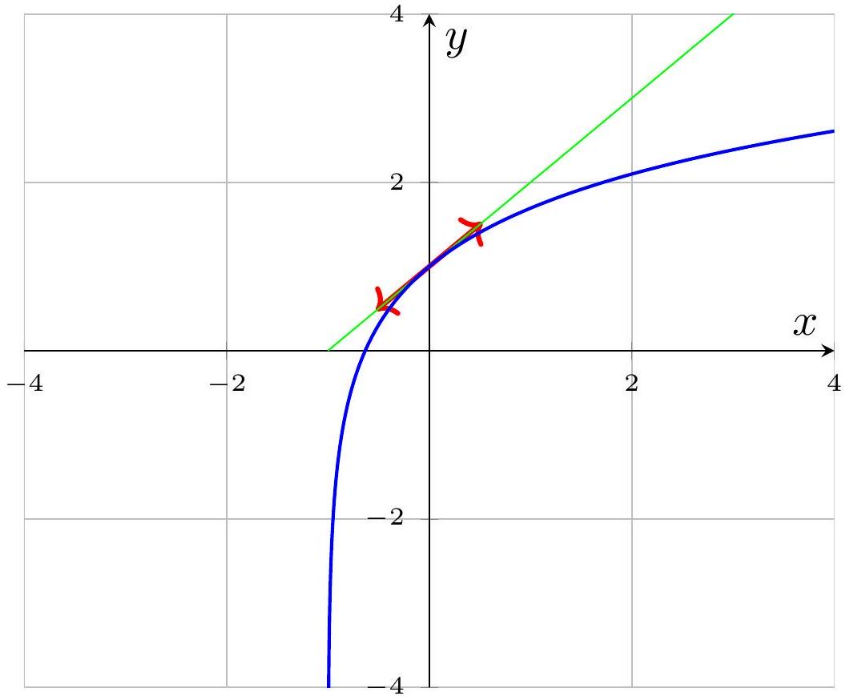
(b) *La fonction f_1 est deux fois dérivable sur $]-1,+\infty[$. Soit $x > -1$.*

$$f_1''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} < 0$$

Donc la fonction f_1 est concave sur $]\,1,+\infty[$. Ainsi, son graphe est en dessous de sa tangente en 0 . Autrement dit, pour tout $x > -1$,

$$f_1(x) \leqslant x+1$$

4.



Etude d'une suite implicite

5. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soit $x > 0$.*

$$f_n(x) = x \iff x - f_n(x) = 0 \iff h_n(x) = 0$$

La fonction h_n est dérivable sur $]0,+\infty[$ comme somme et composée de fonctions dérivables. Soit $x > 0$.

$$h_n'(x) = 1 - \frac{1}{x+n} = \frac{x+n-1}{x+n} > 0 \quad \text{car } n \geqslant 1 \text{ et } x > 0$$

d'où le tableau de variations :

x	0	$+\infty$
$h_n(x)$	$-h_n(0)$ $\nearrow$	$+\infty$

Précisons :

- $h_n(0) = 0 - f_n(0) = -(1+\ln(n)) < 0($ *car* $n \geqslant 1)$.
- $h_n(x) = x - (1+\ln(x+n)) \underset{x\to+\infty}{\sim} x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ *par croissances comparées.*

Ainsi, la fonction h_n est

- *continue sur* $]0,+\infty[$
- *strictement croissante sur* $]0,+\infty[$
donc elle réalise une bijection de $]0,+\infty[$ *sur* $h_n(]0,+\infty[)=]h_n(0),+\infty[$.
Or, $h_n(0)<0$ *donc* $0\in]h_n(0),+\infty[$.
On en déduit que l'équation $h_n(x)=0$ *(et donc l'équation* $f_n(x)=x$ *) admet une unique solution sur* $]0,+\infty[$*, que l'on note* α_n.

6. (a) *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
h_n(\alpha_{n+1}) &= \alpha_{n+1}-f_n(\alpha_{n+1})\\
&= \alpha_{n+1}-(1+\ln(\alpha_{n+1}+n))\\
&= f_{n+1}(\alpha_{n+1})-(1+\ln(\alpha_{n+1}+n)) && \textit{par définition de } \alpha_{n+1}\\
&= (1+\ln(\alpha_{n+1}+n+1))-(1+\ln(\alpha_{n+1}+n))\\
&= \ln(\alpha_{n+1}+n+1)-\ln(\alpha_{n+1}+n)\\
&= \ln\left(\frac{\alpha_{n+1}+n+1}{\alpha_{n+1}+n}\right)
\end{aligned}$$

(b) *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$.

$$h_n(\alpha_{n+1})=\ln\left(\frac{\alpha_{n+1}+n+1}{\alpha_{n+1}+n}\right)$$

Or, $\alpha_{n+1}+n+1>\alpha_{n+1}+n>0$ *donc* $\dfrac{\alpha_{n+1}+n+1}{\alpha_{n+1}+n}>1$ *donc* $h_n(\alpha_{n+1})>0$.
On en déduit que

$$h_n(\alpha_{n+1})>h_n(\alpha_n)$$

Donc, en composant par h_n^{-1}*, la bijection réciproque de* h_n *(de même stricte monotonie, c'est-àdire strictement croissante), on a*

$$\begin{aligned}
& h_n^{-1}(h_n(\alpha_{n+1}))>h_n^{-1}(h_n(\alpha_n))\\
\textit{donc}\quad & \alpha_{n+1}>\alpha_n
\end{aligned}$$

Donc la suite (α_n) *est strictement croissante.*

7. (a) *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$*. Par définition,*

$$\alpha_n=f_n(\alpha_n)=1+\ln(\alpha_n+n)$$

Or,

$$\alpha_n\in]0,+\infty[$$

donc

$$\alpha_n+n>n$$

donc $\quad\ln(\alpha_n+n)>\ln(n)\quad$ *(par stricte croissance de la fonction* $x\mapsto\ln(x)$ *sur* $]0,+\infty[$ *)*
donc $\quad\alpha_n>1+\ln(n)$

(b) *On a* $1+\ln(n)\underset{n\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty$ *donc, par théorème de comparaison,* $\alpha_n\underset{n\to+\infty}{}+\infty$.

8. (a) *Soit* $n\in\mathbb{N}^*$.

$$\begin{aligned}
h_n(\ln(n)+2) &= \ln(n)+2-f_n(\ln(n)+2)\\
&= \ln(n)+2-(1+\ln(\ln(n)+2+n))\\
&= 1+\ln(n)-\ln(\ln(n)+2+n)\\
&= 1+\ln(n)-\ln\left(n\left(1+\frac{\ln(n)+2}{n}\right)\right)\\
&= 1+\ln(n)-\ln(n)-\ln\left(1+\frac{\ln(n)+2}{n}\right)\\
&= 1-\ln\left(1+\frac{\ln(n)+2}{n}\right)
\end{aligned}$$

Or, $\dfrac{\ln(n)+2}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *par croissances comparées, donc* $\ln\left(1+\dfrac{\ln(n)+2}{n}\right) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
D'où $h_n(\ln(n)+2) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.

(b) *Soit* $n \geqslant n_0$. *D'après la question 8.a),*

$$\begin{aligned}
& h_n(\ln(n)+2) > 0\\
\text{donc}\quad & h_n(\ln(n)+2) > h_n(\alpha_n)\\
\text{donc}\quad & h_n^{-1}(h_n(\ln(n)+2)) > h_n^{-1}(h_n(\alpha_n))\\
\text{donc}\quad & \ln(n)+2 > \alpha_n
\end{aligned}$$

(c) *Soit* $n \geqslant n_0$. *D'après les questions 7.a) et* 8.b *),*

$$\begin{aligned}
& 1+\ln(n) < \alpha_n < \ln(n)+2\\
\text{donc}\quad & \frac{1}{\ln(n)}+1 < \frac{\alpha_n}{\ln(n)} < 1+\frac{2}{\ln(n)}
\end{aligned}\Bigg)\ \ln(n) > 0 \text{ car } n \geqslant n_0 \geqslant 2$$

Or, $\dfrac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *et* $\dfrac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *donc, par théorème d'encadrement,* $\dfrac{\alpha_n}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$.
On en déduit que $\alpha_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \ln(n)$.

9. - *pour tout* $n \geqslant 1$, $\dfrac{\alpha_n}{n} \geqslant 0$ *et* $\dfrac{\ln(n)}{n} \geqslant 0$(cf *question 5)*
   - $\dfrac{\alpha_n}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{\ln(n)}{n}$ *(cf question 8.c)*

   Donc, par critère d'équivalence pour les séries à termes positifs, les séries $\sum \dfrac{\alpha_n}{n}$ *et* $\sum \dfrac{\ln(n)}{n}$ *ont même nature. Or,*

   pour tout $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n} \geqslant 0$ *et* $\dfrac{\ln(n)}{n} \geqslant 0$

   - $\dfrac{1}{\ln(n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *donc* $\dfrac{1}{n} = \underset{n\to+\infty}{o}\left(\dfrac{\ln(n)}{n}\right)$
   - *la série* $\sum \dfrac{1}{n}$ *diverge (série de Riemann d'exposant 1)*

   Donc, par critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série $\sum \dfrac{\ln(n)}{n}$ *diverge et finalement,*

   $$\text{la série } \sum \frac{\alpha_n}{n} \text{ diverge.}$$

   Par un raisonnement analogue à la question précédente, on obtient que les séries $\sum \dfrac{\alpha_n}{n^2}$ *et* $\sum \dfrac{\ln(n)}{n^2}$ *ont même nature. Or,*

   (a) *pour tout* $n \geqslant 1$, $\dfrac{1}{n^{3/2}} \geqslant 0$ *et* $\dfrac{\ln(n)}{n^2} \geqslant 0$

- $\frac{\ln(n)}{n^{1/2}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *par croissances comparées donc* $\frac{\ln(n)}{n^2} \underset{n\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$
- *la série* $\sum \frac{1}{n^{3/2}}$ *converge (série de Riemann d'exposant* $\frac{3}{2} > 1$ *)*

Donc, par critère de négligeabilité pour les séries à termes positifs, la série $\sum \frac{\ln(n)}{n^2}$ *converge et finalement,*

$$\text{la série } \sum \frac{\alpha_n}{n^2} \text{ converge.}$$

Valeur approchée de α_1 par dichotomie

10. *Démonstration.*

    - *D'après la question 7 a, on a* $\alpha_1 > 1 + \ln(1) = 1$.
    -
    $$\begin{aligned} h_1(3) &= 3 - (1 + \ln(3+1)) \\ &= 2 - \ln(4) \\ &= 2 - 2\ln(2) \\ &= 2(1 - \ln(2)) > 0 \qquad \text{car } \ln(2) \simeq 0,69 \end{aligned}$$

    d'où, $h_1(3) > h_1(\alpha_1)$ *et, en composant par* h_1^{-1} *qui est strictement croissante, on obtient* $3 > \alpha_1$.

11.
```
import numpy as np
a,b = 1,3
while b-a > 10**(-4) :
        c = (a + b) / 2
        if c-1-np.log(c+1) > 0 :
         b = c
        else :
         a = c
print (c)
```

12. *Montrons par récurrence :* $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$
    où $P(n) : \begin{cases} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n \geqslant 1 \end{cases}$

    - **Initialisation :**
      Par définition, $u_0 = 1$ *donc* u_0 *est bien défini et* $u_0 \geqslant 1$. *D'où* $P(0)$.

    - **Hérédité :**
      soit $n \in \mathbb{N}$. *Supposons* $P(n)$. *Montrons* $P(n+1)$.
      Par hypothèse de récurrence, u_n *existe et* $u_n \geqslant 1$. *La fonction* f_1 *est bien définie sur* $]-1,+\infty[$ *donc* $u_{n+1} = f_1(u_n)$ *est bien défini.*
      De plus, la fonction f_1 *est strictement croissante sur* $]-1,+\infty[$ *donc*

      $$u_{n+1} = f_1(u_n) \geqslant f_1(1) = 1 + \ln(2) \geqslant 1$$

      D'où $P(n+1)$.

    - **Conclusion :**
      $\forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n \text{ est bien défini} \\ u_n \geqslant 1 \end{cases}.$

Initialisation :

13. *Soit* $x \geqslant 1$. *D'après la question 2,*

$$f_1'(x) = \frac{1}{x+1} > 0$$

donc

$$\left|f_1'(x)\right| = \frac{1}{x+1} \leqslant \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

D'après l'inégalité des accroissements finis, on a, pour tout $(x, y) \in \left[1, +\infty\right[^2$,

$$|f_1(x) - f_1(y)| \leqslant \frac{1}{2}|x-y|$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. *En posant* $x = u_n \in [1, +\infty[$ (*cf question 12) et* $y = \alpha_1 \in [1, +\infty[$ (*cf question 10), on obtient :*

$$\left|f_1\left(u_n\right) - f_1\left(\alpha_1\right)\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \alpha_1\right|$$

d'où

$$\left|u_{n+1} - \alpha_1\right| \leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \alpha_1\right|$$

14. *Montrons par récurrence :* $\forall n \in \mathbb{N}, P(n)$ *où* $P(n) : \left|u_n - \alpha_1\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

- **Initialisation :**

  - *D'une part,* $u_0 = 1$ *et* $1 < \alpha_1 < 3$ *(cf question 10) donc* $\left|u_0 - \alpha_1\right| = \alpha_1 - 1 < 2$.
  - *D'autre part,* $\left(\frac{1}{2}\right)^{0-1} = 2$.

- **Hérédité :**
  soit $n \in \mathbb{N}$. *Supposons* $P(n)$. *Montrons* $P(n+1)$.
  On a

$$\begin{aligned}\left|u_{n+1} - \alpha_1\right| &\leqslant \frac{1}{2}\left|u_n - \alpha_1\right| && \text{(cfquestion13)}\\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\\ &\leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{(n+1)-1}\end{aligned}$$

  (par question 13)
  D'où $P(n+1)$.

- **Conclusion :**
  $\forall n \in \mathbb{N}, \left|u_n - \alpha_1\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

15. *Soit* $n \in \mathbb{N}$. *D'après la question 14 , on a*

$$0 \leqslant \left|u_n - \alpha_1\right| \leqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Or, $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ *car* $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$. *Donc, par théorème d'encadrement,*

$$|u_n - \alpha_1| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

et donc

$$u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \alpha_1$$

16. *Recopier et compléter la fonction Python suivante pour qu'elle*

```
import numpy as np
def ApprocheAlpha(epsilon) :
    n=0
    u = 1
    while 1 /(2 * *(n-1)) > epsilon :
        n=n+1
        u=1+np.log(u+1)$
    return [n,u]
```

* * *

Exercice n°3

Une personne envoie chaque jour un courrier électronique par l'intermédiaire de deux serveurs : le serveur A ou le serveur B.
On constate que le serveur A est choisi dans 70% des cas et donc que le serveur B est choisi dans 30% des cas. (Ce qui revient à dire que la probabilité pour que le serveur A soit choisi est de 0.7). Les choix des serveurs sont supposés indépendants les uns des autres.

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de 0.1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de 0.05.

   (a) Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de transmission lors de l'envoi d'un courrier.

   (b) Si le courrier a subi une erreur de transmission, quelle est la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A ?

2. Un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisé par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite $AABBBA\ldots$ signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3. 4 et 5 il a choisi le le serveur B, et le jour 6 le serveur A. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série $BBAAAB\ldots$)

   On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.

   Ainsi, pour $k \geqslant 1$, dire que $L_1 = k$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jours suivant l'autre serveur.

   (a) Justifier soigneusement la formule :

   $$\forall k \geq 1 \quad P(L_1 = k) = (0.3)^k (0.7) + (0.7)^k (0.3)$$

   (b) Vérifier par le calcul que

   $$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1$$

   (c) Déterminer l'espérance mathématique de L_1.

   (d) Déterminer la loi du couple aléatoire (L_1, L_2).

   (e) En déduire la loi de L_2

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. A partir d'un jour donné, que l'on appellera le jour 1, on note : N_n la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'ordinateur choisit le serveur A pendant les n premiers jours, T_1 le numéro du jour où pour la première fois le serveur A est choisi et T_2 le numéro du jour où pour la deuxième fois le serveur A est choisi.

   (a) Déterminer la loi de N_n, son espérance mathématique et sa variance.

   (b) Déterminer la loi de T_1, son espérance mathématique et sa variance.

   (c) Montrer que

   $$\forall k \geqslant 2, \quad P(T_2 = k) = (k-1)(0.7)^2 (0.3)^{k-2}$$

4. Le temps de transmission en seconde d'un message par le serveur A est une variable aléatoire Z qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.

   Le prix en euros W de cette transmission, est calculé de la façon suivante : on multiplie la durée de transmission en seconde par 0.1 euro, auquel on ajoute une somme forfaitaire de 1 euro.

   (a) Rappeler une densité f_Z de Z ainsi que sa fonction de répartition F_Z.

(b) Quel est le temps moyen (en seconde) de la transmission d'un message par le serveur A ?

(c) Exprimer W en fonction de Z.

(d) Montrer que W est une variable aléatoire à densité. En déterminer une densité f_W.

(e) Déterminer l'espérance de la variable W.

5. On suppose que le temps de transmission d'un message en seconde par le serveur B est représenté par la variable aléatoire X dont une densité de probabilité f est donnée par :

$$\begin{cases} f(t) = te^{-t^2/2} \text{ si } t \geq 0 \\ f(t) = 0 \quad \text{si } t < 0 \end{cases}$$

(On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$)

(a) Vérifier que f est bien une densité de probabilité.

(b) Déterminer la fonction de répartition F_X de X.

(c) Calculer l'espérance de la variable X.

RÉPONSE:

1. Dans cette question, on suppose que la probabilité d'une erreur de transmission avec le serveur A est de 0.1, alors que la probabilité d'erreur de transmission avec le serveur B est de 0.05.

(a) Passer par le serveur A ou B forme un système complet d'événement. En notant E "il y a une erreur de transmission"

$$\begin{aligned} P(E) &= p_A(E)\, P(A) + P_B(E)\, P(B) = 0.1 \times 0.7 + 0.05 \times 0.3 \\ &= 0.0\,85 \end{aligned}$$

*(b) "**si** le courrier a subi une erreur de transmission" pose une condition..*
On demande donc ici $P(A/E)$ alors que la probabilité donnée est $P(E/A)$

$$\begin{aligned} P(A/E) &= \frac{P(A \cap E)}{P(E)} = \frac{P_A(E)\, P(A)}{P(E)} \\ &= \frac{0.1 \times 0.7}{0.085} = \frac{70}{85} = \frac{14}{17} \end{aligned}$$

Donc, si le courrier a subi une erreur de transmission, la probabilité pour que le serveur utilisé soit le serveur A vaut $\frac{14}{17}$.

2. Un jour donné, appelé le jour 1, on note les différents serveurs utilisé par l'ordinateur par une suite de lettres. Par exemple, la suite $AABBBA\dots$ signifie que les deux premiers jours l'ordinateur a choisi le serveur A, les jours 3. 4 et 5 il a choisi le le serveur B, et le jour 6 le serveur A. Dans cet exemple, on dit que l'on a une première série de longueur 2 et une deuxième série de longueur 3 (Ce qui est également le cas de la série $BBAAAB\dots$)
On note L_1 la variable aléatoire représentant la longueur de la première série et L_2 la variable aléatoire représentant la longueur de la deuxième série.
Ainsi, pour $k \geq 1$, dire que $L_1 = k$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jours suivant l'autre serveur.

(a) *$L_1 = k$ signifie que pendant les k premiers jours, c'est le même serveur qui a été choisi et le jours suivant l'autre serveur.*
Ce serveur peut-être le A ou le B.
Donc $(L_1 = k) = (A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap B_{k+1}) \cup (B_1 \cap \cdots \cap B_k \cap A_{k+1})$
Les deux parenthèses étant incompatibles
$P(L_1 = k) = P(A_1 \cap \cdots \cap A_k \cap B_{k+1}) + P(B_1 \cap \cdots \cap B_k \cap A_{k+1})$
et les choix de serveurs sont indépendants donc

$$\begin{aligned} P(L_1 = k) &= P(A_1) \dots P(A_k) P(B_{k+1}) + P(B_1) \dots P(B_k) P(A_{k+1}) \\ &= (0.3)^k (0.7) + (0.7)^k (0.3) \end{aligned}$$

(b) *On passe par la somme partielle :*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} P(L_1 = k) &= \sum_{k=1}^{N} (0.3)^k (0.7) + (0.7)^k (0.3) \\ &= (0.7) \sum_{k=1}^{N} (0.3)^k + (0.3) \sum_{k=1}^{N} (0.7)^k \\ &= (0.7) \left(\sum_{k=0}^{N} (0.3)^k - 1 \right) + (0.3) \left(\sum_{k=1}^{N} (0.7)^k - 1 \right) \\ &\to 0.7 \left(\frac{1}{1-0.3} - 1 \right) + 0.3 \left(\frac{1}{1-0.7} - 1 \right) = 1 \end{aligned}$$

la convergence venant de $|0.3| < 1$ et $|0.7| < 1$. Donc

$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(L_1 = k) = 1$$

(c) *L_1 a une espérance si $\sum_{k=1}^{+\infty} k\, P(L_1 = k)$ est absolument convergente. ($\Longleftrightarrow$ convergente car $k\, P(L_1 = k) \geq 0$)*

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{N} |k\, P(L_1 = k)| &= \sum_{k=1}^{N} k\, P(L_1 = k) \\ &= \sum_{k=1}^{N} k\, (0.3)^k (0.7) + k\, (0.7)^k (0.3) \\ &= (0.7) \sum_{k=1}^{N} (0.3)^k + (0.3) \sum_{k=1}^{N} (0.7)^k \\ &= (0.7) \left(\sum_{k=0}^{N} k\, (0.3)^k - 0 \right) + (0.3) \left(\sum_{k=1}^{N} k\, (0.7)^k - 0 \right) \\ &\to 0.7 \frac{0.3}{(1-0.3)^2} + 0.3 \frac{0.7}{(1-0.7)^2} = \frac{0.3}{0.7} + \frac{0.7}{0.3} = \frac{0.58}{0.21} \end{aligned}$$

donc $\sum_{k=1}^{+\infty} k\, P(L_1 = k)$ est absolument convergente et sa somme vaut $E(L_1) = \dfrac{58}{21}$

(d) *Les valeurs possibles de* L_1 *et de* L_2 *sont* $[1,+\infty[$

Comme précédemment on décompose $(L_1 = i \cap L_2 = j)$ *suivant que le premier serveur choisi a été* A *ou* B *:*

$$(L_1 = i \cap L_2 = j) = \left(\bigcap_{k=1}^{i} A_k \bigcap_{k=i+1}^{i+j} B_k \cap A_{i+j+1}\right) \bigcup \left(\bigcap_{k=1}^{i} B_k \bigcap_{k=i+1}^{i+j} A_k \cap B_{i+j+1}\right)$$

les deux parenthèses étant incompatibles et les choix de serveurs indépendants

$$\begin{aligned} P(L_1 = i \cap L_2 = j) &= \prod_{k=1}^{i} P(A_k) \prod_{k=i+1}^{i+j} P(B_k) \times P(A_{i+j+1}) + \prod_{k=1}^{i} P(B_k) \prod_{k=i+1}^{i+j} P(A_k) \times P(B_{i+j+1}) \\ &= 0.7^i \times 0.3^j \times 0.7 + 0.3^i \times 0.7^j \times 0.3 \\ &= 0.7^{i+1} \times 0.3^j + 0.3^{i+1} \times 0.7^j \end{aligned}$$

(e) *donc pour tout* $(i,j) \in \mathbb{N}_*^2 : P(L_1 = i \cap L_2 = j) = 0.7^{i+1} \times 0.3^j + 0.3^{i+1} \times 0.7^j$

(f) *La loi de* L_2 *est la loi marginale :*

$L_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *et pour tout* $j \in \mathbb{N}^* : P(L_2 = j) = \sum_{i=1}^{+\infty} P(L_1 = i \cap L_2 = j)$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{N} P(L_1 = i \cap L_2 = j) &= \sum_{i=1}^{N} \left(0.7^{i+1} \times 0.3^j + 0.3^{i+1} \times 0.7^j\right) \\ &= 0.3^j \sum_{i=1}^{N} 0.7^{i+1} + 0.7^j \sum_{i=1}^{N} 0.3^{i+1} \\ \text{réindexé } k = i-1 \qquad &= 0.3^j \sum_{k=0}^{N-1} 0.7^{k+2} + 0.7^j \sum_{k=0}^{N-1} 0.3^{k+2} \\ &\to 0.3^j \frac{0.7^2}{1-0.7} + 0.7^j \frac{0.3^2}{1-0.3} \end{aligned}$$

quand N *tend vers* $+\infty$, *convergentes car* $|0.3| < 1$ *et* $|0.7| < 1$

donc $P(L_2 = j) = 0.3^j \dfrac{49}{30} + 0.7^j \dfrac{9}{70}$ *pour* $j \in L_2(\Omega) = \mathbb{N}^*$

3. *Soit* $n \in \mathbb{N}^*$. *A partir d'un jour donné, que l'on appellera le jour 1, on note :* N_n *la variable aléatoire représentant le nombre de fois où l'ordinateur choisit le serveur* A *pendant les* n *premiers jours,* T_1 *le numéro du jour où pour la première fois le serveur* A *est choisi et* T_2 *le numéro du jour où pour la deuxième fois le serveur* A *est choisi.*

(a) N_n *est le* ***nombre de*** *choix du serveur* A *en* **n** *choix* ***indépendants*** *qui ont tous la* ***même probabilité*** *0.7,*

Donc $N_n \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 0.7)$ *et* $E(N_n) = 0.7n$ *et* $V(X) = 0.21n$

(b) T_1 *est le rang du* ***premier*** *choix de* A *dans une* ***suite*** *de choix indépendants qui ont tous la* ***même*** *probabilité 0.7,*

Donc $T_1 \hookrightarrow \mathcal{G}(0.7)$ *et* $E(T_1) = \dfrac{1}{0.7}$ *et* $V(T_1) = \dfrac{0.3}{0.49} = \dfrac{30}{49}$

(c) *Pour* $k \geq 2$, $(T_2 = k)$ *signifie que on a eu* A *au* $k^{ième}$ *et que c'était le second. Donc qu'il n'y en avait eu qu'un seul avant.*

Donc $(T_2 = k) = (N_{k-1} = 1) \cap A_k$ *indépendants et* $\forall k \geq 2$,

$$\begin{aligned} P(T_2 = k) &= P(N_{k-1} = 1)\, P(A_k) \\ &= \binom{k-1}{1} 0.7^1 0.3^{k-1-1} \times 0.7 \\ &= (k-1)(0.7)^2 (0.3)^{k-2} \end{aligned}$$

4. *Le temps de transmission en seconde d'un message par le serveur A est une variable aléatoire Z qui suit une loi exponentielle de paramètre 1.*
Le prix en euros W de cette transmission, est calculé de la façon suivante : on multiplie la durée de transmission en seconde par 0.1 euro, auquel on ajoute une somme forfaitaire de 1 euro.
   (a) *Une densité f_Z de Z est* $\begin{cases} f_Z(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ f_Z(t) = e^{-t} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$ *et sa fonction de répartition est :*
   $\begin{cases} F_Z(t) = 0 \text{ si } t < 0 \\ F_Z(t) = 1 - e^{-t} \text{ si } t \geq 0 \end{cases}$
   (b) *Le temps moyen de transmission est l'espérance de Z soit $E(Z) = 1/1 = 1$*
   (c) *D'après l'énoncé on a $W = 0.1 \times Z + 1$*
   (d) *La fonction de répartition de W est donnée par :*

$$\begin{aligned} F_W(t) &= P(W \leq t) = P(0.1 \times Z + 1 \leq t) \\ &= P(Z \leq 10t - 10) \\ &= F_Z(10t - 10) \end{aligned}$$

   Comme Z est à densité, F_Z est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}^*$ (là où f_Z est continue)
   Donc F_W est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe C^1 sur $\mathbb{R}-\{1\}$
   Donc W est à densité et une densité de W est donnée par $f_W(t) = F_W'(t) = 10 f_Z(10t - 10)$

$$\begin{cases} f_W(t) = 0 \text{ si } t < 1 \\ f_Z(t) = 10e^{-10t-10} \text{ si } t \geq 1 \end{cases}$$

   (e) *Comme Z a une espérance, alors $W = W = 0.1 \times Z + 1$ également et*

$$\begin{aligned} E(W) &= 0.1E(Z) + 1 = 0.1 + 1 \\ &= 1.1 \end{aligned}$$

   Déterminer l'espérance de la variable W.

5. *On suppose que le temps de transmission d'un message en seconde par le serveur B est représenté par la variable aléatoire X dont une densité de probabilité f est donnée par :*

$$\begin{cases} f(t) = te^{-t^2/2} \text{ si } t \geq 0 \\ f(t) = 0 \quad \text{si } t < 0 \end{cases}$$

(On rappelle que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t^2/2} dt = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ *)*
   (a) *f est positive sur $\mathbb{R}$, continue par morceaux et on étudie la convergence de son intégrale :*
   $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f = \int_{-\infty}^0 0 = 0$ *(converge)*

$$\begin{aligned} \int_0^M f &= \int_0^M te^{-t^2/2} dt \\ &= \left[-e^{-t^2/2}\right]_0^M \\ &= 1 - e^{-M^2/2} \\ &\to 1 \end{aligned}$$

   quand M tend vers $+\infty$
   Donc $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f$ *converge et vaut 1 donc f est bien une densité de probabilité.*

(b) La fonction de répartition F_X de X est donnée par

- *si* $x \leqslant 0 : F_Z(t) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{x} 0 = 0$
- *si* $x > 0 : F_Z(t) = \int_{-\infty}^{0} 0 + \int_{0}^{x} te^{-t^2/2} = 1 - e^{-x^2/2}$

(c) X *a une espérance si* $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ *converge.*

- $\int_{-\infty}^{0} tf(t)\,dt$ *converge et est nulle.*
- *pour* $M \geqslant 0 : \int_0^M tf(t)\,dt = \int_0^M t^2e^{-t^2/2}dt$ *que l'on intègre par parties.*
  $u(t) = t : u'(t) = 1 : v'(t) = te^{-t^2/2} : v(t) = -e^{-t^2/2}$ *avec* u *et* v *de classe* C^1 *sur* $\mathbb{R}$

$$\begin{aligned}\int_0^M tf(t)\,dt &= \left[-te^{-t^2/2}\right]_0^M - \int_0^M e^{-t^2/2}dt \\ &= -Me^{-M^2/2} - \int_0^M e^{-t^2/2}dt\end{aligned}$$

La forme indéterminée $Me^{-M^2/2}$ *peut se lever en posant* $x = M^2 \to +\infty$*et* $Me^{-M^2/2} = xe^{-x/2} = x/\left(\sqrt{e}^x\right) \to 0$ *car* x *est négligeable devant* $\sqrt{e}^x$ *avec* $\sqrt{e} > 1$

Donc $\int_0^M tf(t)\,dt \to \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ *quand* M *tend vers* $+\infty$

Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} tf(t)\,dt$ *converge et vaut* $\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ *donc* X *a une espérance et* $E(X) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

* * *