Corrigé Essec Eco maths 2 voie E 2010 par Pierre Veuillez

L'objet du problème est l'étude de la durée de fonctionnement d'un système (une machine, un organisme, un service...) démarré à la date $t = 0$ et susceptible de tomber en panne à une date aléatoire. Après une partie préliminaire sur les propriétés de la loi exponentielle, on introduira dans la deuxième partie, les notions permettant d'étudier des propriétés de la date de première panne. Enfin, dans une troisième partie on examinera le fonctionnement d'un système satisfaisant certaines propriétés particulières.

Les trois parties sont dans une large mesure indépendantes.

Toutes les variables aléatoires intervenant dans le problème sont définies sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbf{P})$.

Pour toute variable aléatoire Y, on notera $E(Y)$ son espérance lorsqu'elle existe.

On adoptera les conventions suivantes. On dira qu'une fonction f continue sur $\mathbb{R}_+^*$ et continue à droite en 0 est continue sur $\mathbb{R}_+$. En outre, si T est une variable aléatoire positive dont la loi admet la densité f continue sur $\mathbb{R}_+$, sa fonction de répartition $F_T(t) = P(T \leq t) = \displaystyle\int_0^t f(u)du$, est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$, et dérivable à droite en 0. On conviendra d'écrire $F_T'(t) = f(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $F_T'(0)$ désignant donc dans ce cas la dérivée à droite en 0.

1 Généralités sur la loi exponentielle

On rappelle qu'une variable aléatoire suit la loi exponentielle de paramètre $\mu(\mu > 0)$ si elle admet pour densité la fonction f_μ définie par

$$f_\mu(x) = \begin{cases} \mu \mathbf{e}^{-\mu x} & \text{si} \quad x \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

1. Soit X une variable aléatoire suivant la loi exponentielle de paramètre μ.
   a) On a $E(X) = \frac{1}{\mu}$ et $V(X) = \frac{1}{\mu^2}$.
   b) **Idée :** comparer avec une fonction de référence (Riemann ou exponentielle)
   $x^n e^{-\mu x}/x^{-2} = x^{n+2}e^{-\mu x} = x^{n+2}/e^{\mu x} \to 0$ par croissance comparée quand $x \to +\infty$.
   Donc $x^n e^{-\mu x} = o(1/x^2)$ et comme $\int_0^{+\infty} \dfrac{1}{x^2}dx$ converge, alors par comparaison de fonctions positive, $\int_0^{+\infty} x^n e^{-\mu x}dx$ converge également.
   Et comme $\int_{-\infty}^0 x^n f_\mu(x)\, dx = 0$ alors $\int_{-\infty}^{+\infty} x^n f_\mu(x)\, dx$ converge absolument et (transfert)
   Conclusion : $\boxed{X^n \text{ a bien une espérance.}}$
   On intégré $\int_0^M x^{n+1}\mu \mathbf{e}^{-\mu x}dx$ par parties
   $u(x) = x^{n+1}$: $u'(x) = (n+1)x^n$ et $v'(x) = \mu e^{-\mu x}$: $v(x) = -e^{-\mu x}$ avec u et v de classe C^1.
   $$\begin{aligned}\int_0^M x^{n+1}\mu \mathbf{e}^{-\mu x}dx &= \left[-e^{-\mu x}x^{n+1}\right]_0^M + \int_0^M (n+1)x^n \mathbf{e}^{-\mu x}dx \\ &= -e^{-\mu M}M^{n+1} + \frac{(n+1)}{\mu}\int_0^{+\infty} x^n \mu e^{-\mu x}dx\end{aligned}$$
   et quand $M \to +\infty$ on a $e^{-\mu M}M^{n+1} = M^{n+1}/e^{\mu M} \to 0$ donc $\boxed{E(X^{n+1}) = \dfrac{(n+1)}{\mu}E(X^n)}$
   c) avec $E(X^1) = \frac{1}{\mu}$ on a alors par récurrence,
   Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* : E(X^n) = \dfrac{n!}{\mu^n}}$

d) en particulier : $E\left(X^2\right) = \dfrac{2}{\mu^2}$ et $V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = \dfrac{2}{\mu^2} - \dfrac{1}{\mu^2} = \dfrac{1}{\mu^2}$ ce qui est cohérent.

2. Propriété caractéristique

a) Soient $\mu > 0$ et X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre μ.
On a pour tout $x \in \mathbb{R}^+$: $\mathrm{P}(X > x) = e^{-x} > 0$.
et pour tous réels positifs x et y,

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}_{[X>x]}(X > x+y) &= \frac{\mathrm{P}(X > x+y \cap X > x)}{\mathrm{P}(X > x)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(X > x+y)}{\mathrm{P}(X > x)} \text{ car } x+y \geq x \\
&= \frac{e^{-(x+y)}}{e^{-x}} = e^{-y} \\
&= \mathrm{P}(X > y)
\end{aligned}$$

b) Réciproquement, soit X une variable aléatoire positive admettant une densité f continue et strictement positive sur $\mathbb{R}_+$, et telle que pour tous réels positifs x et y,

$$\mathbf{P}_{[X>x]}(X > x+y) = \mathbf{P}(X > y)$$

i. Soit $R(x) = \mathbf{P}(X > x)$.
Comme la densité de f est continue sur $\mathbb{R}_+$, sa fonction de répartition F est C^1 sur $\mathbb{R}^+$ et $F' = f > 0$ donc F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$
Sa limite en $+\infty$ est 1. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$, $F(x) < 1$ et $R(x) = 1 - F(x) > 0$
Conclusion : $\boxed{R(x) > 0 \text{ pour tout } x \geq 0}$

ii. On pose $\mu = f(0)$.
On a $R(x) = 1 - F(x)$ donc R est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $R'(x) = -F'(x) = -f(x)$
On fait apparaître R dans l'égalité $\mathbf{P}_{[X>x]}(X > x+y) = \mathbf{P}(X > y)$:

$$\mathbf{P}_{[X>x]}(X > x+y) = \frac{R(x+y)}{R(x)} \text{ donc}$$
$$R(x+y) = R(x)R(y)$$

Astuce : et en dérivant par rapport à y (x est une constante)
on a pour tout x et $y \in \mathbb{R}^+$,

$$R'(x+y) = R'(y)R(x)$$

en particulier pour $y = 0$: $R'(x) = R'(0)R(x)$ et avec $R'(0) = -f(0) = -\mu$
soit $\boxed{R'(x) + \mu R(x) = 0 \text{ pour tout } x \text{ positif.}}$

iii. Soit $G(x) = R(x)\mathbf{e}^{\mu x}$. G est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $G'(x) = R'(x)e^{\mu x} + \mu R(x)e^{\mu x} = (R'(x) + \mu R(x))e^{\mu x}0$

iv. Donc G est constante sur $\mathbb{R}_+$.
Et comme $G(0) = R(0) = 1$ (car X est positive)
alors pour tout $x \in \mathbb{R}_+$: $R(x) = e^{-\mu x}$
Finalement $\mathrm{P}(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-\mu x} & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$ *Conclusion :* $\boxed{X \hookrightarrow \varepsilon(\mu)}$

3. Soient deux réels strictement positifs μ_1 et μ_2. Soient X_1 et X_2 deux variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois exponentielles de paramètres μ_1 et μ_2 .

   a) On pose $Y = \max(X_1, X_2)$.
   Pour tout $x \in \mathbb{R}$: $(Y \leq x) = [\max(X_1, X_2) \leq x] = (X_1 \leq x \cap X_2 \leq x)$ et comme X_1 et X_2 sont indépendantes :
   $F_Y(x) = \mathrm{P}(Y \leq x) = \mathrm{P}(X_1 \leq x)\,\mathrm{P}(X_2 \leq x) = F_{X_1}(x)\,F_{X_2}(x)$
   Comme X_1 est à densité alors F_{X_1} est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et de même pour F_{X_2}
   Donc comme produit, il en est de même pour F_Y
   Donc Y est à densité et une densité est : pour $x \neq 0$:

$$\begin{aligned} f_Y(x) &= F'_{X_1}(x)\,F_{X_2}(x) + F_{X_1}(x)\,F'_{X_2}(x) \\ &= f_{X_1}(x)\,F_{X_2}(x) + F_{X_1}(x)\,f_{X_2}(x) \\ &= \begin{cases} \mu_1 e^{-\mu_1 x}\left(1 - e^{-\mu_2 x}\right) + \mu_2 e^{-\mu_2 x}\left(1 - e^{-\mu_1 x}\right) & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

   b) On pose $Z = \min(X_1, X_2)$.
   On passe par l'événement contraire :
   $(Z > x) = [\min(X_1, X_2) > x] = (X_1 > x \cap X_2 > x)$ et comme X_1 et X_2 sont indépendantes :
   $F_Z(x) = 1 - \mathrm{P}(X_1 > x)\,\mathrm{P}(X_2 > x) = 1 - (1 - F_{X_1}(x))(1 - F_{X_2}(x))$
   et comme précédemment Z est à densité.
   On simplifie alors l'écriture de $F_Z(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\mu_1 x} e^{-\mu_2 x} = 1 - e^{-(\mu_1+\mu_2)x} & \text{si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x < 0 \end{cases}$
   et on reconnaît la fonction de répartition de *Conclusion :* $\boxed{Z \hookrightarrow \varepsilon(\mu_1 + \mu_2)}$

2 Fiabilité

Soit T une variable aléatoire positive qui représente la durée de vie (c'est-à-dire le temps de fonctionnement avant la survenue d'une première panne) d'un système. On suppose que T est une variable à densité f_T continue sur $\mathbb{R}_+$ et ne s'annulant pas sur $\mathbb{R}_+^*$.
On appelle fiabilité de T la fonction R_T définie sur $\mathbb{R}_+$ par

$$R_T(t) = \mathbf{P}(T \geq t) = \mathbf{P}(T > t) = 1 - F_T(t)$$

où F_T est la fonction de répartition de T.

1. Soient t un réel positif ou nul et h un réel strictement positif.
   La dégradation du système sur l'intervalle $[t, t+h]$ est mesurée par la probabilité $\mathbf{P}(t \leq T \leq t+h)$.
   Comme $t \leq t+h$ alors $\mathbf{P}(t \leq T \leq t+h) = F_T(t+h) - F_T(t) = 1 - R_T(t+h) - 1 + R_T(t)$
   Conclusion : $\boxed{\mathbf{P}(t \leq T \leq t+h) = R_T(t) - R_T(t+h)}$
2. Pour tout réel t positif ou nul,

$$\frac{P(t \leq T \leq t+h)}{h} = \frac{F_T(t+h) - F_T(t)}{t+h-t}$$

   est le taux d'accroissement de F_T et comme f_T est continue sur $\mathbb{R}_+$ alors F_T est C^1 et le taux d'accroissement tend vers F'_T
   Conclusion : $\boxed{\lim_{h \to 0, h > 0} \frac{P(t \leq T \leq t+h)}{h} = F'_T(t) = f_T(t)}$

a) Comme $F_T'(t) = f(t) > 0$ sur $\mathbb{R}_+$ alors F_T est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. De plus $\lim_{+\infty} F_T = 1$ donc pour tout $t \in \mathbb{R}$: $F_T(t) < 1$ et $1 - F_T(t) > 0$

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout réel } t \text{ positif, } R_T(t) > 0}$

ce qui permet de définir le « taux de défaillance »la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par le rapport $\lambda(t) = \dfrac{f_T(t)}{R_T(t)}$.

b) $R_T = 1 - F_T$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $R_T'(t) = -F_T'(t) = -f_T(t)$

et comme $R_T(t) \neq 0$ alors $t \to \dfrac{1}{R_T(t)}$ est dérivable et

$$\frac{d}{dt}\ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right) = -\frac{R_T'(t)}{R_T(t)} = \frac{f_T(t)}{R_T(t)} = \lambda(t)$$

c) En intégrant (fonction continue car R_T est C^1) de 0 à $x \geq 0$ on a donc

$$\begin{aligned}\int_0^x \frac{d}{dt}\ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right) dt = \left[\ln\left(\frac{1}{R_T(t)}\right)\right]_{t=0}^x &= -\ln(R_T(x)) + \ln(R_T(0)) \\ &= -\ln(R_T(x))\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\ln(R_T(x)) &= -\int_0^x \lambda(t)\,dt \text{ et} \\ R_T(x) &= \exp\left(-\int_0^x \lambda(t)\,dt\right)\end{aligned}$$

3. Soit Z une variable aléatoire réelle positive de densité g continue sur $\mathbb{R}_+$, admettant une espérance. On pose $R_Z(t) = \mathbf{P}(Z > t)$ pour $t \geq 0$.
N.B. par rapport à la question 2. on n'a plus l'hypothèse « densité non nulle sur $\mathbb{R}_+$ »

a) Soit v la fonction définie sur $\mathbb{R}_+$ par $v(t) = tR_Z(t)$.
g est continue sur $\mathbb{R}_+$ donc $R_T = 1 - F_T$ est C^1 et $R_T'(t) = -g(t)$.
v est donc dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\begin{aligned}v'(t) &= R_Z(t) + tR_Z'(t) \\ &= R_Z(t) - tg(t) \text{ donc} \\ tg(t) &= R_Z(t) - v'(t)\end{aligned}$$

b) On a $v(t) = tR_Z(t)$ .Montrer que $\lim\limits_{t\to+\infty} v(t) = 0$.
N.B. si on n'a pas déjà rencontré cette astuce, il faut plus de 4h pour la trouver !
Idée : utiliser l'existence de l'espérance et chercher le lien avec $R_Z(x) = \int_x^{+\infty} g(t)\,dt$
$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty} \int_{-\infty}^x tg(t)\,dt$
donc (astuce) $E(Z) - \int_{-\infty}^x tg(t)\,dt = \int_x^{+\infty} tg(t)\,dt \to 0$ et on y est presque :
Pour tout $t \geq x$, $tg(t) \geq xg(t)$ car $g(t) \geq 0$ et, puisque les intégrales convergent :

$$\int_x^{+\infty} tg(t)\,dt \geq \int_x^{+\infty} xg(t)\,dt = xR_Z(x) \geq 0$$

et par encadrement $xR_Z(x) \to 0$ quand $x \to +\infty$.

c) Z a une espérance donc $E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\,dt$ converge $\int_{-\infty}^{0} tg(t)\,dt = 0$ car Z est positive donc sa densité sur $\mathbb{R}_-$ est nulle.
et donc $\int_0^{+\infty} tg(t)\,dt$ converge et vaut $E(Z)$

$$\begin{aligned}
\int_0^M R_Z(t) &= \int_0^M tg(t) + v'(t)\,dt \\
&= \int_0^M R_Z(t)\,dt - \int_0^M v'(t)\,dt \\
&= \int_0^M tg(t)\,dt - [v(t)]_0^M \\
&= \int_0^M tg(t)\,dt - v(M) - v(0) \\
&\to \int_0^{+\infty} tg(t)\,dt
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{E(Z) = \int_0^{+\infty} R_Z(t)dt}$

4. On suppose désormais que T admet une espérance. Soit t un réel positif fixé ; le système ayant fonctionné sans panne jusqu'à la date t, on appelle durée de survie la variable aléatoire $T_t = T - t$ représentant le temps s'écoulant entre la date t et la première panne.
On a donc, pour tout réel x positif

$$R_{T_t}(x) = \mathbf{P}(T_t > x) = \mathbf{P}_{[T>t]}(T > t + x)$$

Je ne comprends pas .... la probabilité pour T_t n'est-elle pas conditionnelle ?

a) Pour tout réel x positif,

$$\begin{aligned}
R_{T_t}(x) &= \mathrm{P}_{[T>t]}(T > t + x) \\
&= \frac{\mathrm{P}(T > t + x \cap T > t)}{\mathrm{P}(T > t)} \\
&= \frac{\mathrm{P}(T > t + x)}{\mathrm{P}(T > t)} \text{ car } t + x \geq t \\
&= \frac{R_T(t+x)}{R_T(t)}
\end{aligned}$$

b) On réutilise alors le 3.c) puisque ses hypothèses (T_t positive, densité continue sur $\mathbb{R}_+$ et ayant une espérance) sont satisfaites par T_t

$$\begin{aligned}
E(T_t) &= \int_0^{+\infty} R_{T_t}(x)dx \\
&= \int_0^{+\infty} \frac{R_T(t+x)}{R_T(t)} dt \\
&= \frac{1}{R_T(t)} \int_0^{+\infty} R_T(t+x)dt
\end{aligned}$$

et par changement de variable
$u = t + x : dt = dx : x = 0 \Longleftrightarrow u = t$ et $x \to +\infty \Longleftrightarrow u \to +\infty$

$$E(T_t) = \frac{1}{R_T(t)} \int_t^{+\infty} R_T(u)du$$

Les questions suivantes illustrent les notions introduites précédemment pour des systèmes simples.

5. a) On suppose que T suit la loi exponentielle de paramètre μ.
   la fiabilité est $R_T(t) = \mathbf{P}(T \geq t) = \mathbf{P}(T > t) = 1 - F_T(t) = e^{-\mu t}$ si $t \geq 0$
   le taux de défaillance est $\lambda(t) = \dfrac{f_T(t)}{R_T(t)} = \dfrac{\mu e^{-\mu t}}{e^{-\mu t}} = \mu$ qui est donc constant.

   b) On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en série, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne dès que l'un d'eux tombe en panne. On note T_i la durée de vie de l'organe i, f_{T_i} la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre μ_i.
   La durée de fonctionnement du système est donc $T = \min(T_1, T_2)$ et d'après le I3a) $\hookrightarrow \varepsilon(\mu_1 + \mu_2)$ et donc sa fiabilité est celle du a)
   Conclusion : $\boxed{R_T(t) = e^{-(\mu_1+\mu_2)t} \text{ et son taux de défaillance } \mu_1 + \mu_2}$

   c) On suppose que le système est composé de deux organes 1 et 2 montés en parallèle, dont les durées de vie sont supposées indépendantes, ce qui implique qu'il tombe en panne quand les deux organes sont en panne. On note T_i la durée de vie de l'organe i, f_{T_i} la densité de sa loi qu'on suppose exponentielle de paramètre μ_i.
   On a vu qu'alors $T = \max(T_1, T_2)$ sa fonction de répartition $F_T(x) = F_{T_1}(x) F_{T_2}(x)$
   Donc sa fiabilité est $R_T(x) = 1 - F_{T_1}(x) F_{T_2}(x) = 1 - (1 - e^{-\mu_1 x})(1 - e^{-\mu_2 x})$ si $x \geq 0$

6. Soit $\varphi_{n,\beta}$ la fonction définie par

$$\varphi_{n,\beta}(t) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{(n-1)!}(\beta t)^{n-1}\mathbf{e}^{-\beta t} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{si} \quad t < 0 \end{cases}$$

où $\beta > 0$ est une constante strictement positive et n un entier naturel non nul.

   a) $\varphi_{n,\beta}$ est positive sur $\mathbb{R}$ et continue sur $\mathbb{R}^*$
   On montre par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$: $\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\, dt = 1$:
   Pour $n = 1$: $\displaystyle\int_0^M \varphi_{n,\beta}(t)\, dt = \int_0^{+\infty} \beta \mathbf{e}^{-\beta t} dt = 1$ densité de $\varepsilon(\beta)$
   Soit $n \geq 1$ tel que $\int_0^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\, dt$ converge et vaut 1 alors par parties on a

$$\int_0^M \frac{\beta}{n!}(\beta t)^n \mathbf{e}^{-\beta t} dt \text{ par IPP}$$

$$u(t) = \frac{(\beta t)^{n-1}}{n!} : u'(t) = \beta n \frac{(\beta t)^{n-1}}{n!} = \beta \frac{(\beta t)^{n-1}}{(n-1)!}$$

$$v'(t) = \beta e^{-\beta t} : v(t) = -e^{-\beta t} \text{ et } u \text{ et } v \text{ de classe } C^1$$

$$= \left[-e^{-\beta t}\frac{(\beta t)^{n-1}}{n!}\right]_0^M - \int_0^M -e^{-\beta t}\beta\frac{(\beta t)^{n-1}}{(n-1)!} dt$$

$$\to \int_0^{+\infty} \beta \frac{(\beta t)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\beta t} dt = 1$$

   Donc pour tout entier n : $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_{n,\beta}(t)\, dt = 1$
   Conclusion : $\boxed{\varphi_{n,\beta} \text{ est une densité de probabilité (loi d'Erlang)}}$

b) On suppose que T a pour densité la fonction $\varphi_{n,\beta}$.
Sa fiabilité est à l'instant t est $R_T(t) = 1 - F(t)$

On vérifie $\Phi(t) = 1 - \mathbf{e}^{-\beta t} \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}$ est la primitive de $\varphi_{n,\beta}$ s'annulant en 0

Φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et

$$\begin{aligned}
\Phi'(t) &= \beta \mathbf{e}^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} - \mathbf{e}^{-\beta t} \sum_{k=1}^{n-1} \beta k \frac{(\beta t)^{k-1}}{k!} \\
&= \beta \mathbf{e}^{-\beta t} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(\beta t)^{k-1}}{(k-1)!} - 0 \right) \\
&= \beta \mathbf{e}^{-\beta t} \left(\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!} - \sum_{h=0}^{n-2} \frac{(\beta t)^h}{h!} \right) \\
&= \beta \mathbf{e}^{-\beta t} \frac{(\beta t)^{n-1}}{(n-1)!} \\
&= \varphi_{n,\beta}(t)
\end{aligned}$$

et

$$\Phi(0) = 1 - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(0)^k}{k!} = 1 - 1 - \sum_{k=1}^{n-1} 0 = 0$$

Donc Φ est la primitive de $\varphi_{n,\beta}$ s'annulant en 0 et

$$\begin{aligned}
F_T(x) &= \int_{-\infty}^{x} \varphi_{n,\beta}(t)\, dt = \int_0^x \varphi_{n,\beta}(t)\, dt \\
&= \Phi(x)
\end{aligned}$$

Finalement,

$$R_T(t) = 1 - F(t) = \mathbf{e}^{-\beta t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^k}{k!}$$

7. Soit $\psi_{\beta,\eta}$ la fonction définie par

$$\psi_{\beta,\eta}(t) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\eta}(\dfrac{t}{\eta})^{\beta-1} \mathbf{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} & \text{si} \quad t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où $\beta \geq 1, \eta > 0$

a) $\psi_{\beta,\eta}$ est continue sur $\mathbb{R}^*$ et positive sur $\mathbb{R}$

On remarque que $\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$ est la dérivée $\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}$ donc

$$\begin{aligned}
\int_0^M \psi_{\beta,\eta}(t) dt &= \left[-\mathbf{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \right]_0^M \\
&= -\mathbf{e}^{-\left(\frac{M}{\eta}\right)^\beta} + 1 \\
&\to 1 \text{ quand } M \to +\infty
\end{aligned}$$

Donc $\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{\beta,\eta}(t)\, dt$ converge et vaut 1

Conclusion : $\boxed{\psi_{\beta,\eta} \text{ est une densité de probabilité (loi de Weibull).}}$

b) On suppose que T a pour densité la fonction $\psi_{\beta,\eta}$.
On a alors pour $t \in \mathbb{R}_+$:

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \int_0^t \psi_{\beta,\eta}(t)dt \\ &= 1-\mathbf{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \text{ et donc} \\ R_T(t) &= \mathbf{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta} \end{aligned}$$

et le taux de défaillance $\lambda(t)$ à la date t :

$$\begin{aligned} \lambda(t) &= \frac{f_T(t)}{R_T(t)} \\ &= \frac{\frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}\mathbf{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}}{\mathbf{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^\beta}} \\ &= \frac{\beta}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \end{aligned}$$

c) Donc
– si $\beta > 1$ alors $\lambda(t) \to +\infty$ quand $t \to +\infty$
– si $\beta = 1$ on retrouve une loi $\varepsilon\left(\frac{1}{\eta}\right)$alors $\lambda(t) = \dfrac{1}{\eta}$ est constante.

3 Système Poissonien

On considère maintenant un système dont le fonctionnement est défini comme suit : pour tout réel t positif, la variable aléatoire N_t à valeurs entières représente le nombre de pannes qui se produisent dans l'intervalle $[0,t]$. On considère que le système est réparé immédiatement après chaque panne.
On notera en particulier que pour $s \leq t$, on a $N_s \leq N_t$.
On suppose qu'on a les quatre propriétés suivantes

- $N_0 = 0$ et $0 < P(N_t = 0) < 1$ pour tout $t > 0$.
- Pour tous réels $t_0, t_1, \ldots, t_n$ tels que $0 \leq t_0 < t_1 < \cdots < t_n$ les variables $N_{t_0}, N_{t_1} - N_{t_0}, N_{t_2} - N_{t_1}, \ldots, N_{t_n} - N_{t_{n-1}}$ sont mutuellement indépendantes (accroissements indépendants)
- Pour tous réels s et t tels que $0 < s < t$, $N_t - N_s$ suit la même loi que N_{t-s} (accroissements stationnaires)
- $\lim\limits_{h\to 0, h>0} \dfrac{P(N_h > 1)}{h} = 0$

On pose, sous réserve d'existence, pour tout $u \geq 0$ et pour tout s dans [0,1], $G_u(s) = E(s^{N_u})$, avec la convention $0^0 = 1$.

1. a) Pour tout $u \geq 0$,
$G_u(s) = E(s^{N_u}) = \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \operatorname{P}(N_u = k)$ (transfert si absolue convergence) et comme $0 \leq s \leq 1$ alors $s^k \operatorname{P}(N_u = k) \leq \operatorname{P}(N_u = k)$
La série $\sum_{k=0}^{+\infty} \operatorname{P}(N_u = k)$ converge, donc par majoration de termes positifs $\sum_{k=0}^{+\infty} s^k \operatorname{P}(N_u = k)$ converge, et donc absolument puisque les termes sont positifs..
Conclusion : $\boxed{\text{Pour tout } s \in [0,1] : G_u(s) = E\left(s^{N_u}\right) \text{ existe}}$

b) On recycle :
pour tous réels u et v positifs ou nuls, et pour tout réel s tel que $0 \leq s \leq 1$, on a

$$\begin{aligned} G_{u+v}(s) &= E\left(s^{N_{u+v}}\right) \\ &= E\left(s^{N_u+(N_{u+v}-N_u)}\right) \\ &= E\left(s^{N_u} s^{N_{u+v}-N_u}\right) \\ &= E\left(s^{N_u}\right) E\left(s^{N_{u+v}-N_u}\right) \end{aligned}$$

car N_u et $N_{i+v} - N_u$ sont indépendantes, et comme $N_{u+v} - N_u$ a la même loi que N_v
Conclusion : $\boxed{G_{u+v}(s) = E\left(s^{N_u}\right) E\left(s^{N_v}\right) = G_u(s)\, G_v(s) \text{ pour tout } s \in [0,1]}$

2. On fixe s tel que $0 \leq s \leq 1$.

a) $G_1(s) = E\left(s^{N_1}\right)$ et comme $0 < P(N_1 = 0) < 1$ alors

$$\begin{aligned} E\left(s^{N_1}\right) &= \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \,\mathrm{P}(N_1 = k) \\ &\geq s^0 \,\mathrm{P}(N_1 = 0) > 0 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{G_1(s) > 0}$
On pose $\theta(s) = -\ln G_1(s)$ et, pour $u \geq 0$, $\psi(u) = G_u(s)$.

b) Recycler : $G_{u+v}(s) = ...$
On a donc $\psi(k) = G_k(s)$ et on a alors par récurrence :
- Pour $k = 0$: $\psi(0) = G_0(s) = E\left(s^{N_0}\right)$ avec $\mathrm{P}(N_0 = 0) = 1$ on a donc $\psi(0) = s^0 = 1$ et $\mathbf{e}^{-0\theta(s)} = 1$ CQFD
- Soit $k \in \mathbb{N}$ tel que $G_k(s) = \mathbf{e}^{-k\theta(s)}$ alors $G_{k+1}(s) = G_k(s)\, G_1(s)$
  avec $\boxed{\theta(s) = -\ln G_1(s)}$ on a $G_1(s) = e^{-\theta(s)}$ et donc
  $G_{k+1}(s) = e^{-k\theta(s)} e^{-\theta(s)} = e^{-(k+1)\theta(s)}$
- *Conclusion :* $\boxed{\text{Pour tout } k \in \mathbb{N} : G_k(s) = \mathbf{e}^{-k\theta(s)}}$

c) Soit q un entier naturel non nul.
On a (récurrence) $G_{k\frac{1}{q}}(s) = \left(G_{\frac{1}{q}}(s)\right)^k$ donc avec $k = q$ on a $G_1(s) = \left(G_{\frac{1}{q}}(s)\right)^q$
et donc $G_{\frac{1}{q}}(s) = (G_1(s))^{1/q} = \mathbf{e}^{-\frac{1}{q}\theta(s)}$
Conclusion : $\boxed{\psi(\frac{1}{q}) = \mathbf{e}^{-\frac{1}{q}\theta(s)}.}$

d) Et on a à nouveau par récurrence pour tout $p \in \mathbb{N}$:

$$\psi\left(\frac{p}{q}\right) = \left(\psi(\frac{1}{q})\right)^p = \left(\mathbf{e}^{-\frac{1}{q}\theta(s)}\right)^p = \mathbf{e}^{-\frac{p}{q}\theta(s)}$$

Conclusion : $\boxed{\text{si } r \in \mathbb{Q}_+ \text{ alors } \psi(r) = \mathbf{e}^{-r\theta(s)}}$

e) **Astuce introuvable si on ne l'a pas déja vue :** on encadre tout réel u par deux suites de rationnels tendants vers u ($s_n = \dfrac{\lfloor nu \rfloor}{n}$ et $r_n = \dfrac{\lfloor nu \rfloor + 1}{n}$)

$s_n \leq u \leq r_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et on regarde le sens de variaation de ψ pour encadrer les images :

Si $0 \leq u \leq v$ alors $N_u \leq N_v$ et comme $s \in [0,1]$, la fonction $x \to s^x$ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ donc $s^{N_u} \geq s^{N_v}$ et $E\left(s^{N_u}\right) \geq E\left(s^{N_v}\right)$ soit $\psi(u) \geq \psi(v)$.
Donc la fonction ψ est décroissante sur $\mathbb{R}_+$ d'où $\psi(s_n) \geq \psi(u) \geq \psi(r_n)$
et quand $n \to +\infty$ on a $s_n \to u$ donc $\psi(s_n) = \mathbf{e}^{-s_n\theta(s)} \to \mathbf{e}^{-u\theta(s)}$ et de même pour $\psi(r_n)$
Donc par apssage à la limte dans l'inégalité précédente : $\psi(u) = \mathbf{e}^{-u\theta(s)}$

Conclusion : $\boxed{\text{que pour tout réel positif } u,\ G_u(s) = \mathbf{e}^{-u\theta(s)}}$

f) Comme $e^x - 1 \sim x$ quand $x \to 0$ alors $\mathbf{e}^{-h\theta(s)} - 1 \sim -h\theta(s)$ quand $h \to 0^+$ et donc $\dfrac{\mathbf{e}^{-h\theta(s)} - 1}{-h\theta(s)} \to 1$ et

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } s \in [0,1],\ \lim_{h \to 0, h>0} \dfrac{G_h(s) - 1}{h} = -\theta(s)}$

3. Par ailleurs que pour tout $s \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} G_h(s) - 1 &= \sum_{k=0}^{+\infty} s^k \,\mathrm{P}(N_h = k) - 1 \\ &= \mathrm{P}(N_h = 0) + s^1\,\mathrm{P}(N_h = 1) + \sum_{k=2}^{+\infty} s^k\,\mathrm{P}(N_h = k) \end{aligned}$$

et d'autre part

$$\begin{aligned} &\mathrm{P}(N_h = 1)(s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(N_h = k)\left(s^k - 1\right) \text{ si converge} \\ &= s\,\mathrm{P}(N_h = 1) - \mathrm{P}(N_h = 1) + \sum_{k=2}^{+\infty} s^k\,\mathrm{P}(N_h = k) - \sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(N_h = k) \\ &= s\,\mathrm{P}(N_h = 1) + \sum_{k=2}^{+\infty} s^k\,\mathrm{P}(N_h = k) - \sum_{k=1}^{+\infty} \mathrm{P}(N_h = k) \text{ qui convergent} \\ &= \mathrm{P}(N_h = 0) + s\,\mathrm{P}(N_h = 1) + \sum_{k=2}^{+\infty} s^k\,\mathrm{P}(N_h = k) - \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}(N_h = k) \\ &= G_h(s) - 1 \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{G_h(s) - 1 = \mathrm{P}(N_h = 1)(s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty}\left(s^k - 1\right)\mathrm{P}(N_h = k)}$

4. On pense alors à

$$\frac{1}{h}\sum_{k=2}^{+\infty}\left(s^k - 1\right)\mathrm{P}(N_h = k) = \frac{G_h(s) - 1}{h} - \frac{\mathrm{P}(N_h = 1)}{h}(s-1)$$

mais la limite de $\dfrac{\mathrm{P}(N_h = 1)}{h}$ doit être déduite à la question suivante ...

– Deux cas à considérer : si $s = 1$: $\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}(N_h = k)(s^k - 1) = 0$ d'où la limite.
– Et si $s \in [0,1[$, on va utiliser l'hypothèse : $\lim_{h \to 0, h>0} \dfrac{P(N_h > 1)}{h}$ en majorant.
Pour tout $k \geq 2$: $(N_h = k) \subset (N_h > 1)$ donc $\mathrm{P}(N_h = k) \leq \mathrm{P}(N_h > 1)$ et (séries convergentes)

$$0 \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(N_h = k)\,s^k \leq \sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}(N_h > 1)\,s^k = \mathrm{P}(N_h > 1)\,\frac{s^2}{1-s} d\prime o\grave{u}$$

$$0 \leq \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}\left(N_h = k\right) s^k}{h} \leq \frac{\mathrm{P}\left(N_h > 1\right)}{h} \frac{s^2}{1-s}$$

et par encadrement $\dfrac{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}\left(N_h = k\right) s^k}{h} \to 0$

Enfin, $\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}\left(N_h = k\right) \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}\left(N_h = k\right) = 1$ donc

$$0 \leq \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}\left(N_h = k\right)}{h} \leq \frac{1}{h}$$

et $\dfrac{\sum_{k=2}^{+\infty} \mathrm{P}\left(N_h = k\right)}{h} \to 0$ par encadrement.

Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } s \in [0,1],\ \displaystyle\lim_{h\to 0, h>0} \frac{\displaystyle\sum_{k=2}^{+\infty} \mathbf{P}(N_h = k)(s^k - 1)}{h} = 0}$

5. a) On réutilise $G_h(s) - 1 = \mathrm{P}\left(N_h = 1\right)(s-1) + \sum_{k=2}^{+\infty} \left(s^k - 1\right) \mathrm{P}\left(N_h = k\right)$ pour en extraire

$$\mathrm{P}\left(N_h = 1\right) = \left[G_h(s) - 1 - \sum_{k=2}^{+\infty} \left(s^k - 1\right) \mathrm{P}\left(N_h = k\right)\right] / (s-1) \text{ et}$$

$$\frac{\mathrm{P}\left(N_h = 1\right)}{h} = \left[\frac{G_h(s) - 1}{h} - \frac{\sum_{k=2}^{+\infty} \left(s^k - 1\right) \mathrm{P}\left(N_h = k\right)}{h}\right] / (s-1)$$
$$\to \frac{-\theta(s) + 0}{s-1}$$

et avec $\alpha = \dfrac{-\theta(s)}{s-1} \geq 0$ (car une probabilité l'est)

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} \alpha = \displaystyle\lim_{h\to 0, h>0} \frac{\mathbf{P}(N_h = 1)}{h} \geq 0 \text{ et} \\ \text{et pour tout } s \in [0,1],\ \theta(s) = -\alpha\,(s-1) = \alpha(1-s) \end{array}}$

b) On a en particulier $\alpha = \theta(0) = -\ln G_1(0)$.
Et comme $G_1(0) = E\left(0^{N_1}\right) = 0^0\, \mathrm{P}\left(N_1 = 0\right) + 0 = \mathrm{P}\left(N_1 = 0\right) < 1$ par hypothèse (pour tout $t > 0 : 0 < \mathrm{P}\left(N_t = 0\right) < 1$)
alors $\mathrm{P}\left(G_1(0)\right) < 0$ et *Conclusion :* $\boxed{\alpha > 0.}$

6. a) On a vu que pour tout réel positif u, $G_u(s) = \mathbf{e}^{-u\theta(s)}$.au 2e)
et $\theta(s) = -\alpha\,(s-1) = \alpha(1-s)$ au 5a)
donc $G_u(s) = \mathbf{e}^{-u\alpha(1-s)}$
D'autre part :

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \left[\mathbf{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}\right] s^k = e^{-\alpha u} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(\alpha u s)^k}{k!}$$
$$= e^{-\alpha u} e^{\alpha u s}$$
$$= e^{-\alpha u(1-s)}$$
$$= G_u(s)$$

et finalement pour tout $s \in [0,1]$,

$$\begin{aligned} G_u(s) &= \sum_{k=0}^{+\infty} \mathrm{P}\left(N_u = k\right) s^k \text{ .(transfert)} \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} \left[\mathbf{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}\right] s^k \end{aligned}$$

b) Si la somme était finie, on aurait une égalité depolynômes pour une infinité de valeur, d'où identification des coefficients.
Mais on ne dispose pas au programme d'un tel théorème sur les sommes de séries.
On montre alors par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}$: $\mathrm{P}\left(N_u = k\right) = \mathbf{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}$
La récurrence a besoin de tous les termes précédent (récurrence généralisée)

- Pour $n = 0$ on utilise l'égalité pour $s = 0$ et il ne reste que le terme où la puissance de s est nulle : $\mathrm{P}\left(N_u = 0\right) = \mathbf{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^0}{0!}$
- Soit $n \geq 0$ tel que pour tout $k \leq n$: $\mathrm{P}\left(N_u = k\right) = \mathbf{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}$
  alors, on simplifie de part et d'autre ces $n+1$ premiers termes égaux et il reste.

  $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{P}\left(N_u = k\right) s^k = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left[\mathbf{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}\right] s^k \text{ que l'on factorise et simlifie par } s^{n+1}$$

  $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{P}\left(N_u = k\right) s^{k-n-1} = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \left[\mathbf{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}\right] s^{k-n-1}$$

  et en particulier pour $s = 0$ il ne reste que $\mathrm{P}\left(N_u = n+1\right) = \mathbf{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^{n+1}}{(n+1)!}$
  N.B. il y a ici une erreur : pour simplifier par s^{n+1}, il faut que s soit non nul. On ne peut donc pas utliser la formule pour $s = 0$...
  Il faut procéder par apassage à la limite :

  $$\sum_{k=n+1}^{+\infty} \mathrm{P}\left(N_u = k\right) s^{k-n-1} = \mathrm{P}\left(N_u = n+1\right) + s \sum_{k=n+2}^{+\infty} \mathrm{P}\left(N_u = k\right) s^{k-n-2}$$

  et comme $\mathrm{P}\left(N_u = k\right) s^{k-n-2} \leq s^{k-n-2}$ alors

  $$0 \leq s \sum_{k=n+2}^{+\infty} \mathrm{P}\left(N_u = k\right) s^{k-n-2} \leq s \sum_{k=n+2}^{+\infty} s^{k-n-2} = s \frac{1}{1-s}$$

  et quand $s \to 0^+$, par encadrement, $\displaystyle\sum_{k=n+2}^{+\infty} \mathrm{P}\left(N_u = k\right) s^{k-n-2} \to 0$ et de même pour la seconde somme où $\left[\mathbf{e}^{-\alpha u} \frac{(\alpha u)^k}{k!}\right]$ est une probabilité de $\mathcal{P}\left(\alpha u\right)$ et donc inférieur à 1.
- *Conclusion :* $\boxed{\begin{array}{l} \mathrm{P}\left(N_u = k\right) = \frac{(\alpha u)^k}{k!} \mathbf{e}^{-\alpha u} \text{ pour tout } k \in \mathbb{N} \\ \text{et donc } N_u \hookrightarrow \mathcal{P}\left(\alpha u\right) \end{array}}$

Une famille de variables aléatoires ayant les mêmes caractéristiques que la famille $(N_t)_{t \geq 0}$ est un **processus de Poisson** et la constante α s'appelle le **paramètre** du processus de Poisson.

7. Soit T la variable aléatoire désignant la date de la première panne. Soit $t > 0$.
   $T > t$ signifie que la première panne survient après t, c'est à dire qu'il n'y a pas eu de panne dans $[0,t]$ donc

$(T > t) = (N_t = 0)$ et $\mathrm{P}(T > t) = \mathrm{P}(N_t = 0) = \dfrac{(\alpha t)^0}{0!}\mathbf{e}^{-\alpha t} = \mathbf{e}^{-\alpha t}$ et elle vaut 1 si $t < 0$.

Donc $\mathrm{P}(T \leq t) = 1 - e^{-\alpha t}$ et

Conclusion : $\boxed{T \hookrightarrow \varepsilon(\alpha)}$

8. Pour t positif fixé, on pose pour h réel positif, $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$.

   a) N_{t+h} est le nombre de panne dans $[0, t+h]$ et N_t.dans l'intervalle $[0, t]$ donc $N_{t+h} - N_t = \tilde{N}_h$ est la variable aléatoire qui représente le nombre de pannes survenues dans l'intervalle de temps $]t, t+h]$.

   b) Or $\tilde{N}_h = N_{t+h} - N_t$ a la même loi que N_h donc on liste les 4 propriétés :
   - $\tilde{N}_{h_2} - \tilde{N}_{h_1} = N_{t+h_2} - N_t - (N_{t+h_1} - N_t) = N_{t+h_2} - N_{t+h_1}$ a la même loi que $N_{h_2-h_1}$ donc que $\tilde{N}_{h_2-h_1}$
   - et de la même façon pour l'indépendance de $\tilde{N}_{h_0}$, $\tilde{N}_{h_1} - \tilde{N}_{h_0}$...
   - $\tilde{N}_0 = N_t - N_t = 0$ et $\mathrm{P}\left(\tilde{N}_h = 0\right) = \mathrm{P}(N_{t+h} - N_t = 0) = \mathrm{P}(N_h = 0)$ est donc compris dans $]0, 1[$ pour tout $h > 0$.
   - et de même pour le a limite où l'on retombe sur celle de N_h

   donc la famille $(\tilde{N}_h)_{h \geq 0}$ est un processus de Poisson de paramètre α.

   c) Donc en notant T la date de la première panne après t on retrouve d'après 7) que $T \hookrightarrow \varepsilon(\alpha)$

   d) Le taux de défaillance après t pour une loi exponentielle est (fiabilité 5 a)) le paramètre de la loi donc

   pour un processus de Poisson et pour chaque date t donnée, le taux de défaillance du système après t est constant.