Exercice 1 — Manipulation de valeurs absolues

Enlever les valeurs absolues dans les événements suivants, exemple :
$[|X| = 1] = [X = 1] \cup [X = -1]$

1. $[|X| \leqslant 3]$
2. $[|X| \geqslant 4]$
3. $[|X - 1| \leqslant 2]$
4. $[|X + 2| \leqslant 1]$
5. $[|X - 1| \geqslant 1]$

Inégalité de Markov et loi faible des grands nombres

Exercice 2

On veut répondre à la question « Combien faut il faire de lancers (indépendants) d'une pièce non truquée pour que la fréquence d'apparition de pile ne s'écarte pas de plus de 0,05 de 1/2 avec une probabilité de 99% » ?

On note X_n la variable aléatoire de Bernouilli liée au n-ième lancer, et

$$Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$

1. Que représente Y_n ?
2. Calculer $E(Y_n)$ et $V(Y_n)$.
3. Écrire « pour que la fréquence d'apparition de pile ne s'écarte pas de plus de 0,05 de 1/2 avec une probabilité de 99% »sous la forme

$$\mathrm{P}(\cdots - \cdots) \geqslant \cdots$$

4. En utilisant un théorème du cours répondre à la question.

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire suivant la loi normale réduite centrée. On note Φ sa fonction de répartition.Soit $x > 0$.

1. Montrer que $\mathrm{P}(|X| \geqslant x) = 2 - 2\Phi(x)$
2. À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev Montrer que

$$\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2/2}\,\mathrm{d}t \geqslant \sqrt{2\pi}\left(1 - \frac{1}{2x^2}\right)$$

Exercice 4

Soit X une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p et e > 0. On pose $q = 1 - p$

1. Montrer que $\mathrm{P}\left(\left|X - \frac{1}{p}\right| \geqslant \epsilon\right) \leqslant \frac{q}{p^2\epsilon^2}$.
2. En déduire que $\mathrm{P}\left(X \geqslant \frac{2}{p}\right) \leqslant q$

Exercice 5

Soit (X_i) une suite de variable aléatoires indépendantes suivant toutes la loi $\mathcal{B}(p_i)$.

1. On pose $\overline{X_n} = \frac{X_1 + \cdots X_n}{n}$. Calculer $E(\overline{X_n})$ et $V(\overline{X_n})$.
2. Montrer que $V(\overline{X_n}) \leqslant \frac{1}{n}$
3. Écrire l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev pour $\overline{X_n}$
4. En déduire que $\forall \varepsilon > 0 \lim\limits_{n \to +\infty} \mathrm{P}\left(\left|\overline{X_n} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_k\right| < \varepsilon\right) = 1$.

Convergence

Exercice 6

Soit $X_n \hookrightarrow \mathcal{P}(1/n)$

1. Rappeler la loi de X_n.
2. Montrer que X_n converge en loi vers une variable aléatoire quasi-certaine.

Exercice 7

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoire réelles suivant toutes une loi uniforme sur $]0; 1[$ et indépendantes. On note pour $n \in \mathbb{N}$

$$M_n = \max(X_1, \ldots X_n)$$

1. Calculer la fonction de répartition de M_n.
2. Montrer que M_n est une variable à densité et calculer une densité de M_n.
3. On pose $Y_n = n(1 - M_n)$
   (a) Quelles sont les valeurs prises par Y_n.
   (b) Trouver la fonction de répartition de Y_n.
   (c) Montrer que Y_n converge en loi vers une variable usuelle

Exercice 8

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi de Rademacher de paramètre $p \in]0;1[$ si

$$X(\Omega) = \{-1, 1\} \qquad \mathrm{P}(X = 1) = p$$

On note alors

$$X \hookrightarrow \mathcal{R}ad(p)$$

1. Donner la loi (complète) de X, son espérance et sa variance.
2. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoire suivant toute la loi $\mathcal{R}ad(p)$ et indépendantes. On note pour $n \in \mathbb{N}^*$
$$V_n = \prod_{k=1}^{n} X_k$$
   (a) Quel est le support de V_n ? La loi de V_n peut-elle être calculer simplement ?
   (b) Calculer $E(V_n)$.
   (c) On pose pour $n \in \mathbb{N}$
   $$\alpha_n = \mathrm{P}(V_n = 1)$$
   Donner la loi de V_n en fonction de α_n ainsi que son espérance en fonction de α_n.
   (d) à l'aide des deux questions précédentes calculer α_n. En déduire la loi de V_n
   (e) Montrer que $(V_n)_{n\in_N^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire simple.
3. Reprendre l'exercice précédent avec $X_i \hookrightarrow \mathcal{R}ad\left(\frac{1}{n}\right)$.

Exercice 9

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a > 0$. On considère une suite de v.a. (X_n) dont la fonction de répartition est donnée par

$$F_{X_n}(x) = \begin{cases} 0, \text{ si } x < 0 \\ 1 - \exp\left(-ax - \dfrac{x^2}{2n}\right), \text{ si } 0 \leqslant x < 2n \\ 1, \text{ si } x \geqslant 2n \end{cases}$$

Montrer que (X_n) converge en loi vers une v.a dont on précisera la loi.

Exercice 10

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction f_n définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} (n+1)(1-x)^n, \text{ si } x \in [0;1] \\ 0, \text{ sinon} \end{cases}$$

1. Montrer que f_n peut être considérée comme une densité de probabilité.
   On note alors X_n une variable de densité f_n et on pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*, Y_n = nX_n$.
2. Calculer la fonction de répartition F_n de la variable Y_n.
3. Étudier la convergence en loi de la suite de variables aléatoires (Y_n).

Théorème limite central

Exercice 11

Chaque année, un professeur effectue, deux fois par jour, 5 jours par semaine et pendant 46 semaines, un trajet en voiture dont la durée est une variable aléatoire X qui suit une loi d'espérance 45 minutes et d'écart-type 10 minutes. On suppose que les durées des trajets sont mutuellement indépendantes.

On veut répondre à la question Quelle est la probabilité pour qu'il passe au moins 350 heures dans sa voiture au cours de l'année ? *Données*

$$\frac{21000 - 45 \times 460}{\sqrt{46000}} \approx 1.4 \qquad \Phi(1.4) \approx 0.9192$$

1. On note X_i la durée en minutes du trajets numéro i. Exprimer la probabilité recherchée à l'aide des $X_1, X_2, \ldots, X_n$
2. En se ramenant à une approximation avec la loi normale centrée réduite répondre à la question posée.

Exercice 12

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de variable aléatoire réelles suivant toutes une loi géométrique de même paramètre $p \in]0;1[$.

On pose $\overline{X_n} = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

1. Calculer l'espérance μ et l'écart type σ de $\overline{X_n}$.
2. En utilisant le bon théorème du cours montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \mathrm{P}(0 \leqslant \overline{X_n} - \mu \leqslant \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^1 \exp(-t^2/2)\,\mathrm{d}t$$

Exercice 13

Exercice 1205. Soit (X_n) une suite de v.a. indépendante de même loi $\mathcal{P}(1)$. On pose $S_n = X_1 + \ldots + X_n$.

1. Quelle est la loi de S_n ?

2. Exprimer $P(S_n \leqslant n)$ en fonction de n, à l'aide d'une somme que l'on ne cherchera pas à calculer.
3. En utilisant le théorème central limite, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} e^{-n}\sum_{k=0}^{n}\frac{n^k}{k!}=\frac{1}{2}$$

Approximations à l'aide de la loi normale

Exercice 14 — Approximation d'une loi binomiale par une loi normale :application

On admet que si n grand (plus grand que 20) et p proche de $0,5$, on peut approcher la loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$ par une loi $\mathcal{N}(np,npq)$

1. Pourquoi les coefficients choisis pour la loi normale sont-ils "cohérent" ?
2. Soit X_1, X_2, X_3 trois variables indépendantes suivant la loi $\mathcal{B}(10;0,5)$. On note $S = X_1+X_2+X_3$
   (a) Quel est la loi de S ? Donner son espérance m et sa variance σ^2.
   (b) On veut approcher Spar une loi normale , donner les paramètres de cette loi.
   (c) On assimile maintenant S à cette loi normale , quelle est la loi suivie par $\dfrac{S-m}{\sigma}$.
   (d) On admet que $\Phi\left(\dfrac{3}{\sqrt{7.5}}\right)\approx 0,86$. Donner une valeur approchée de $\mathrm{P}(S\geqslant 12)$

Exercice 15

Dans ce qui suit, tous les résultats seront arrondis deux chiffres après la virgule. On reprendre le cadre de l'exercice

Pour les valeurs approchées de la fonction de répartition on cherchera sur internet « table loi normale ».

Dans une revue on peut lire : « On estime à 60,5% le pourcentage de Français partant au moins une fois en vacances dans le courant de l'année ». On considère 100 personnes prises au hasard avec remise dans la population française. On désigne par X la variable aléatoire mesurant, parmi ces 100 personnes, le nombre de celles qui ne partent pas en vacances dans le courant de l'année.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Calculer une valeur approchée de l'événement « au moins 45 personnes parmi les 100 ne partent pas en vacances dans le courant de l'année »
3. Calculer une valeur approchée de l'événement « au plus 30 personnes parmi les 100 ne partent pas en vacances dans le courant de l'année »

Exercice 16

Approximation d'une loi de Poisson par une loi normale On admet que si λ grand (plus grand que 15) , on peut approcher la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ par une loi $\mathcal{N}(\lambda,\lambda)$.

1. Pourquoi les coefficients choisis pour la loi normale sont-ils "cohérent" ?
2. Soit X_1, X_2, X_3 trois variables indépendantes suivant la loi $\mathcal{P}(30)$. On note $S = X_1+X_2+X_3$
   (a) Quel est la loi de S ? Donner son espérance m et sa variance μ.
   (b) On veut approcher $\dfrac{S-m}{\sigma}$ par une loi normale, donner les paramètres de cette loi.
   (c) On admet que $\Phi\left(\sqrt{10}\right)\approx 0,99$. Donner une valeur approchée de $\mathrm{P}(S\geqslant 60)$

Pour aller plus loin

Exercice 17

On considère une suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ de variables aléatoires toutes définies sur un même espace probabilisé $(\Omega,\mathcal{A},\mathrm{P})$, indépendantes, strictement positives et suivant toute la même loi exponentielle d'espérance 1. On pose $T_0=0$ et pour tout entier naturel non nul

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}\Delta_k$$

1. Déterminer l'espérance et la variance de T_n.
2. Soit t un réel positif ou nul
   (a) Justifier que
   $$\forall n>t \qquad [T_n<t]\subset[|T_n-n|\geqslant n-t]$$
   (b) En déduire à l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebichev la valeur de
   $$\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(T_n<t)$$
   (c) Montrer que l'évènement $\cap_{k=0}^{+\infty}[T_n<t]$ est de probabilité nulle.

Exercice 18

Soit (X_n) une suite de variables aléatoires toutes indépendantes et qui suivent $\mathcal{P}(1)$

1. On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}X_k$ rappeler la loi de S_n.Donner $E(S_n)$ et $V(S_n)$.

2. Montrer que
$$\mathrm{P}(S_n - E(S_n) \leqslant 0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-n} n^k}{k!}$$
3. En utilisant le théorème centrale limite montrer que
$$\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{\mathrm{e}^{-n} n^k}{k!} = \frac{1}{2}$$

Exercice 19

Soit X une variable dont la fonction de répartition est notée F et une densité f. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note $X_n = X\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}$

1. Calculer la fonction de répartition de X_n en fonction de F.
2. Montrer que X_n admet une densité et la calculer en fonction de F
3. Montrer que (X_n) converge en loi vers X

Exercice 20

On dit qu'une variable aléatoire Y suit une loi de Gumbel si elle admet pour densité $f(x) = \mathrm{e}^{-x-\mathrm{e}^{-x}}$.

1. Vérifier que f est une densité, et calculer la fonction de répartition de Y.
2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées de loi exponentielle de paramètre 1. On pose $M_n = \max(X_1, \dots, X_n)$. Démontrer que la suite $(M_n - \ln n)$ converge en loi vers Y suivant une loi de Gumbel.
3. Écrire un script Scilab permettant d'illustrer ce résultat !,

Exercice 21

Pour tout entier naturel n non nul, on considère la fonction f_n définie par
$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 x \exp\left(-n^2x^2/2\right) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

1. Montrer que f_n est la densité d'une variable aléatoire dont on calculera la fonction de répartition.
2. Soit (X_n) une suite de variables aléatoires telle que, pour tout entier $n \geqslant 1$, X_n admet pour densité f_n. Démontrer que la suite (X_n) converge en loi vers une variable aléatoire X que l'on précisera.

Exercice 22

Soit X une variable aléatoire suivant la loi $\mathcal{U}([a;\, b])$. On note m son espérance et σ son écart type.

1. Calculer $\mathrm{P}(X \in [m-\sigma;\, m+\sigma])$
2. Calculer $\mathrm{P}(|X-m| \leqslant \sigma)$
3. Calculer $\mathrm{P}(|X-m| > \sigma)$

Types Concours

Exercice 23 — EDHEC 2013

On considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \dots X_n, n \geqslant 2$, toutes définies sur$(\Omega; \mathcal{A}, P)$ indépendantes et suivant la loi uniforme sur $[0;1]$. On pose $I_n = \min(X_1, X_2, \dots, X_n)$. Déterminer la fonction de répartition de I_n et montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge en loi vers une variable aléatoire dont on précisera la loi.

Exercice 24 — HEC 2003

Soient n un entier naturel non nul, N un entier supérieur ou égal à 2 , et p un réel strictement compris entre 0 et 1 .

Une compagnie aérienne a vendu n billets à cent euros pour le vol 714 (pour Sydney) qui peut accueillir jusqu'à N passagers. La probabilité pour qu'un acheteur se présente à l'embarquement est p et les comportements des acheteurs sont supposés indépendants les uns des autres.

Un acheteur qui ne se présente pas à l'embarquement est remboursé à 80%, tandis qu'un acheteur qui se présente à l'embarquement mais n'obtient pas de place, le vol étant déjà complet, est remboursé à 200%.

Soit X la variable aléatoire désignant le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant à l'embarquement, soit Y la variable aléatoire désignant le nombre d'acheteurs d'un billet se présentant à l'embarquement mais n'obtenant pas de place et soit G la variable aléatoire désignant le montant en centaines d'euros du chiffre d'affaire de la compagnie sur le vol considéré.

1. Quelle est la loi de X ? Donner son espérance et sa variance.
2. Préciser, pour tout élément ω de Ω, la valeur de $Y(\omega)$ en fonction de N et de $X(\omega)$, en distinguant les cas $X(\omega) > N$ et $X(\omega) \leqslant N$.
3. Écrire l'expression de G en fonction de n, X, Y.
4. On suppose, dans cette question seulement, que n est inférieur ou égal à N. Calculer alors l'espérance $E(G)$ de la variable aléatoire G.

   La compagnie cherche alors à évaluer la probabilité $P([X \geqslant N])$ et à savoir si le nombre n aurait pu être choisi de façon à optimiser son chiffre d'affaire.
5. On suppose, dans cette question, que p est égal à 0,5 .

(a) Soit X^* la variable aléatoire définie par :

$$X^* = \frac{2X - n}{\sqrt{n}}.$$

Donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X^*.

(b) Par quelle loi approcher la loi de X^* si n est assez grand ? Montrer qu'alors une valeur approchée de la probabilité $P([X \geqslant N])$ est

$$\Phi\left(\frac{n+1-2N}{\sqrt{n}}\right)$$

où Φ désigne la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

(c) Pour tout réel x supérieur ou égal à 1 , on pose

$$f(x) = \frac{x+1-2N}{\sqrt{x}}$$

Montrer que la fonction f est croissante.

(d) On suppose que N est égal à 320 et on donne

$$\Phi\left(\frac{7}{\sqrt{646}}\right) \approx 0,609; \quad \Phi\left(\frac{6}{\sqrt{645}}\right) \approx 0,592$$

Que peut-on en déduire pour $P([X \geqslant N])$ si n est inférieur ou égal à 645 , puis si n est supérieur ou égal à 646 ?

6. Pour tout entier naturel non nul m, on considère la fonction g_m définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$g_m(x) = e^{-x} \sum_{k=0}^{m} \frac{x^k}{k!}$$

(a) Montrer que la fonction dérivée de g_m est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $g_m'(x) = -e^{-x}\dfrac{x^m}{m!}$

Montrer qu'elle vérifie la double inégalité $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad -e^{-m}\dfrac{m^m}{m!} \leqslant g_m'(x) \leqslant 0.$

(b) En déduire que, si a et b sont deux réels vérifiant $0 < a < b$, on a

$$0 \leqslant g_m(a) - g_m(b) \leqslant (b-a)e^{-m}\frac{m^m}{m!}$$

7. On suppose, dans cette question, que p est égal à 0,99 et que n est strictement supérieur à N.

(a) Préciser la loi de la variable aléatoire $n - X$.

(b) On supposera, dans les prochains calculs, que la loi de la variable aléatoire $n-X$ peut être remplacée par la loi de Poisson de paramètre $0,01n$ dont on note F la fonction de répartition.

Que vaut alors $P([X \geqslant N])$?

(c) Exprimer le nombre $F(n-N)$ à l'aide d'une fonction g_m particulière de la Question 6 ?

(d) On suppose que N est égal à 300 .

Pour tout réel strictement positif α, on note F_α la fonction de répartition de la loi de Poisson de paramètre α et on donne :

$$F_3(2) \approx 0,423; \quad F_3(3) \approx 0,647; \quad e^{-3}\frac{3^3}{3!} \approx 0,224$$

Montrer que, si n est égal à 302, $P([X \geqslant N])$ est au plus égal à 0,5 et que, si n est égal à 303, $P([X \geqslant N])$ est strictement supérieur à 0,6 .

Exercice 25 — ESSEC II 2013

Pour tout entier n strictement positif, on se donne un réel p_n strictement positif et n variables aléatoires (X_n) indépendantes et suivant une loi de Bernoulli de paramètre p_n. On suppose que np_n a une limite finie strictement positive et on pose

$$\lim_{n \to +\infty} np_n = \lambda$$

1. Quelle est la loi de $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$?

2. Soit k un entier naturel.

(a) Donner l'expression de $P(S_n = k)$ pour n supérieur ou égal à k.

(b) Que peut-on dire de la limite de p_n quand n tend vers l'infini ? Étudier la limite de $(1-p_n)^n$ quand n tend vers l'infini.

(c) Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} P(S_n = k) = e^{\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$$

3. On pose $N_n = \max(X_1, \ldots, X_n)$.

(a) Quelles sont les valeurs que peut prendre la variable aléatoire N_n ?

(b) Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} P(N_n = 0)$$

(c) En déduire la limite en loi de la suite $(N_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$.

Exercice 26 — EML 2014

Pour tout entier n supérieur ou égal à 2 , on considère une urne contenant n boules numérotées de 1 à n, dans laquelle on effectue une succession de $(n+1)$ tirages d'une boule avec remise et l'on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du tirage où, pour la première fois, on a obtenu un numéro supérieur ou égal au numéro précédent.

Ainsi, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 , la variables X_n prend ses valeurs dans $[\![2; n+1]\!]$. Par exemple, si $n=5$ et si les tirages amènent successivement les numéros 5,3,2,2,6,3, alors $X_5=4$. Pour tout k de $[\![1; n+1]\!]$, on note N_k la variable aléatoire égale au numéro obtenu au k-ième tirage.

Partie I : Étude du cas $n=3$

1. (a) Exprimer l'évènement $(X_3=4)$ à l'aide des variables N_1, N_2, N_3. En déduire $P(X_3=4)$.
   (b) Montrer que $P(X_3=2)=2/3$, et en déduire $P(X_3=3)$.
2. Calculer l'espérance de X_3.

Partie II : Cas général $n \geqslant 2$

3. Pour tout k de $[\![1; n+1]\!]$, reconnaître la loi de N_k et rappeler son espérance et sa variance.
4. Calculer $P(X_n=n+1)$.
5. Montrer, pour tout i de $[\![1; n]\!]$:
$$P_{(N_1=i)}(X_n=2)=\frac{n-i+1}{n}.$$
6. En déduire une expression simple de $P(X_n=2)$.
7. Soit $k \in [\![2; n]\!]$. Justifier l'égalité d'événements suivante : $(X_n>k)=(N_1>N_2>\ldots>N_k)$. En déduire que
$$P(X_n>k)=\frac{1}{n^k}\binom{n}{k}$$
Vérifier que cette dernière égalité reste valable pour $k=0$ et pour $k=1$.
8. Exprimer, pour tout $k \in [\![2; n+1]\!], P(X_n=k)$ à l'aide de $P(X_n>k-1)$ et de $P(X_n>k)$.
9. En déduire que
$$\mathrm{E}(X_n)=\sum_{k=0}^{n} P(X_n>k)$$
Calculer ensuite $\mathrm{E}(X_n)$.
10. Montrer que, pour tout $k \in [\![2; n+1]\!], P(X_n=k)=\frac{k-1}{n^k}\binom{n+1}{k}$.

Partie III : Une convergence en loi

11. Soit k un entier fixé supérieur ou égal à 2. Montrer
$$\lim_{n \rightarrow+\infty} P(X_n=k)=\frac{k-1}{k!}$$
12. Montrer que la série $\sum_{k \geqslant 2} \frac{k-1}{k!}$ converge et calculer sa somme.
On admet qu'il existe une variable aléatoire Z à valeurs dans $\mathbb{N} \backslash\{0; 1\}$ telle que
$$\forall k \geqslant 2, \quad P(Z=k)=\frac{k-1}{k!}$$
13. Montrer que Z admet une espérance et la calculer. Comparer $\mathrm{E}(Z)$ et
$$\lim_{n \rightarrow+\infty} \mathrm{E}(X_n)$$