Épreuve Composite

E C G

Devoir Surveillé n°6

Option économique

MATHEMATIQUES

25 Janvier 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans tout ce sujet, on suppose importés les modules

- `import math`
- `import numpy as np`
- `import numpy.random as rd`
- `matplotlib.pyplot numpy as plt`
- `import numpy.linalg as al`

Exercice n°1

Dans tout l'exercice, X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que les deux variables X et Y sont **échangeables** si :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X=i] \cap [Y=j]) = P([X=j] \cap [Y=i])$$

Résultats préliminaires

1. On suppose que X et Y sont deux variables indépendantes et de même loi. Montrer que X et Y sont échangeables.

RÉPONSE:

Si X et Y sont deux variables indépendantes et de même loi, alors, pour tout $(i,j) \in \mathbb{N}^2$,

$$\begin{aligned} P(X=i \cap Y=j) &= P(X=i)P(Y=j) && \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes)} \\ &= P(Y=i)P(X=j) && \text{(car } X \text{ et } Y \text{ ont la même loi)} \\ &= P(X=j \cap Y=i) && \text{(car } X \text{ et } Y \text{ sont indépendantes),} \end{aligned}$$

donc X et Y sont échangeables.

$* * *$

2. On suppose que X et Y sont échangeables. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad P(X = i) = P(Y = i)$$

RÉPONSE:

Soit $i \in \mathbb{N}$. Si X et Y sont échangeables, alors

- *d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(Y = j)_{j\in\mathbb{N}}$,*

$$P(X = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = i \cap Y = j) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(X = j \cap Y = i) \qquad \textit{(car } X \textit{ et } Y \textit{ sont interchangeables)\,;}$$

- *d'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X = j)_{j\in\mathbb{N}}$,*

$$P(Y = i) = \sum_{j=0}^{+\infty} P(Y = i \cap X = j).$$

- *On a donc bien :* $\forall i \in \mathbb{N}, \quad P(X = i) = P(Y = i)$.

$* * *$

Étude d'un exemple

Soient n, b et c trois entiers strictement positifs.
Une urne contient initialement n boules noires et b boules blanches. On effectue l'expérience suivante, en distinguant trois variantes.

- On pioche une boule dans l'urne.
  On définit X la variable aléatoire qui vaut 1 si cette boule est noire et 2 si elle est blanche.
- On replace la boule dans l'urne et :
  - ⋆ Variante 1 : on ajoute dans l'urne c boules de la même couleur que la boule qui vient d'être piochée.
  - ⋆ Variante 2 : on ajoute dans l'urne c boules de la couleur opposée à celle de la boule qui vient d'être piochée.
  - ⋆ Variante 3 : on n'ajoute pas de boule supplémentaire dans l'urne.
- On pioche à nouveau une boule dans l'urne.
  On définit Y la variable aléatoire qui vaut 1 si cette seconde boule piochée est noire et 2 si elle est blanche.

3. (a) Compléter la fonction Python suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant b boules blanches et n boules noires et qui retourne 1 si la boule tirée est noire, et 2 si la boule tirée est blanche.

```
def tirage(b,n):
        r = rd.rand()
        if ...:
                res = 2
        else:
                res = 1
        return(res)
```

RÉPONSE:

```python
def tirage(b,n):
    r = rd.rand()
    if  r<b/(b+n):
        res = 2
    else:
        res = 1
    return(res)
```

* * *

(b) Compléter la fonction suivante, qui effectue l'expérience étudiée avec une urne contenant initialement b boules blanches, n boules noires et qui ajoute éventuellement c boules après le premier tirage, selon le choix de la variante dont le numéro est `variante`.
Les paramètres de sortie sont :

- `x` : une simulation de la variable aléatoire X
- `y` : une simulation de la variable aléatoire Y

```python
def experience(b,n,c,variante):
    x=tirage(b,n)
    if variante == 1:
        if x==1:
            ...
        else:
            ...
    elif variante == 2:
        ...
        ...
        ...
        ...
    y=tirage(b,n)
    return([x,y])
```

RÉPONSE:

```python
def experience(b,n,c,variante):
    x=tirage(b,n)
    if variante == 1:
        if x==1:
            n=n+c
        else:
            b=b+c
    elif variante == 2:
        if x==1:
            b=b+c
        else:
            n=n+c
    y=tirage(b,n)
    return([x,y])
```

* * *

(c) Compléter la fonction suivante, qui simule l'expérience N fois (avec $N \in \mathbb{N}^*$), et qui estime la loi de X, la loi de Y et la loi du couple (X, Y).
Les paramètres de sortie sont :

- `loiX` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime [P(X=1), P(X=2)]
- `loiY` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime [P(Y=1), P(Y=2)]
- `loiXY` : un tableau bidimensionnel à deux lignes et deux colonnes qui estime :

$$\begin{bmatrix} P([X=1] \cap [Y=1]) & P([X=1] \cap [Y=2]) \\ P([X=2] \cap [Y=2]) & P([X=1] \cap [Y=2]) \end{bmatrix}$$

```
def estimation(b,n,c,variante,N):
        loiX=np.zeros(2)
        loiY=np.zeros(2)
        loiXY=np.zeros([2,2])
        for k in range(1,N+1):
                [x,y]=experience(b,n,c,variante)
                loiX[x]=loiX[x]+1
                ...
                ...
        loiX=loiX/N
        loiY=loiY/N
        loiXY=loiXY/N
        return([loiX,loiY,loiXY])
```

RÉPONSE:

```

def estimation(b,n,c,variante,N):
    loiX=np.zeros(2)
    loiY=np.zeros(2)
    loiXY=np.zeros([2,2])
    for k in range(1,N+1):
        [x,y]=experience(b,n,c,variante)
        loiX[x-1]=loiX[x-1]+1
        loiY[y-1]=loiY[y-1]+1
        loiXY[x-1][y-1]=loiXY[x-1][y-1]+1
    loiX=loiX/N
    loiY=loiY/N
    loiXY=loiXY/N
    return([loiX,loiY,loiXY])
```

* * *

(d) On exécute notre fonction précédente avec $b = 1$, $n = 2$, $c = 1$, $N = 10000$ et dans chacune des variantes. On obtient :

```
—> estimation(1,2,1,1,10000)
  [array([0.66622,0.33378]), array([0.66534,0.33466],

   array([[0.49837,0.16785],[0.16697,0.16681]])]

—> estimation(1,2,1,2,10000)
```

```
[array([0.66544,0.33456]),array([0.58289,0.41711]),

array([[0.33258,0.33286],[0.25031,0.08425]])

--> estimation(1,2,1,3,10000)
[array([0.66564,0.33436]),array([0.66778,0.33222]),

array([[0.44466,0.22098],[0.22312,0.11124]])
```

En étudiant ces résultats, émettre des conjectures quant à l'indépendance et l'échangeabilité de X et Y dans chacune des variantes.
On donne les valeurs numériques approchées suivantes :

- $0.33 \times 0.33 \simeq 0.11$
- $0.33 \times 0.41 \simeq 0.14$
- $0.33 \times 0.58 \simeq 0.19$
- $0.33 \times 0.66 \simeq 0.22$
- $0.41 \times 0.66 \simeq 0.27$
- $0.58 \times 0.66 \simeq 0.38$
- $0.66 \times 0.66 \simeq 0.44$

RÉPONSE:

- **Variante 1 :**
  Comme on a l'estimation de $P(X = 1 \cap Y = 2)$ qui est très proche de celle de $P(X = 2 \cap Y = 1)$, les variables X et Y semblent échangeables.
- **Variante 2 :**
  Comme l'estimation de $P(X = 1 \cap Y = 2) \simeq 0.17$ est sensiblement différente de celle de $P(X = 1)P(Y = 2) \simeq 0.66 \times 0.33 \simeq 0.22$, les variables X et Y ne semblent pas indépendantes.
- **Variante 3 :**
  Il est inutile ici de faire des calculs pour se rendre compte que, le contenu de l'urne étant inchangé, les variables X et Y sont indépendantes, donc échangeables (cf Q1)

* * *

4. On se place dans cette question dans le cadre de la variante 1.
   (a) Donner la loi de X.

RÉPONSE:

On a $X(\Omega) = \{1, 2\}$.
De plus, $P(X = 1) = P(N_1) = \dfrac{n}{b+n}$ et $P(X = 2) = P(B_1) = \dfrac{b}{b+n}$

* * *

   (b) Déterminer la loi du couple (X, Y).

RÉPONSE:

On a $X(\Omega) = \{1, 2\}$ et $Y(\Omega) = \{1, 2\}$.
De plus, $P(X = 1 \cap Y = 1) = P(X = 1)P_{X=1}(Y = 1)$.
Or, sachant $X = 1$, on a tiré une noire et donc rajouté c noires dans l'urne qui contient au moment du second tirage $n + c$ noires et b blanches.
On a donc $P_{X=1}(Y = 1) = \dfrac{c+n}{n+b+c}$ et donc $P(X = 1 \cap Y = 1) = \dfrac{n}{b+n}\,\dfrac{n+c}{b+n+c}$.

De même, on obtient

$$\begin{aligned}
P(X=1\cap Y=2) &= \frac{n}{b+n}\,\frac{b}{b+n+c},\\
P(X=2\cap Y=1) &= \frac{b}{b+n}\,\frac{n}{b+n+c},\\
P(X=2\cap Y=2) &= \frac{b}{b+n}\,\frac{b+c}{b+n+c}.
\end{aligned}$$

* * *

(c) Déterminer la loi de Y.

RÉPONSE:

D'après la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X=1, X=2)$, *on a :*

$$\begin{aligned}
P(Y=1) &= P(X=1\cap Y=1)+P(X=2\cap Y=1)\\
&= \frac{n}{b+n}\,\frac{n+c}{b+n+c}+\frac{n}{b+n}\,\frac{b}{b+n+c}=\frac{n(n+c+b)}{(b+n)(b+n+c)}=\frac{n}{b+n}
\end{aligned}$$

et $P(Y=2)=1-P(Y=1)=\frac{n}{b+n}$.

* * *

(d) Montrer que X et Y sont échangeables mais ne sont pas indépendantes.

RÉPONSE:

On a donc $P(X=1\cap Y=2)=\frac{bn}{(b+n)(b+n+c)}$ *et*
$P(X=1)P(Y=2)=\frac{bn}{(b+n)(b+n)}\neq P(X=1\cap Y=2)$,
donc X *et* Y *ne sont pas indépendantes.*
Enfin, comme $P(X=1\cap Y=2)=P(X=2\cap Y=1)$, X *et* Y *sont échangeables.*

* * *

Exercice n°2

On souhaite étudier dans ce problème l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 :

$$(E) : \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = (-12t + 5)\mathrm{e}^{2t}$$

d'inconnue φ une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note (E_0) l'équation différentielle homogène associée :

$$(E_0) : \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = 0$$

Partie I : Étude d'une matrice

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. (a) On exécute le script Python suivant :

```
I = np.eye(3)
A = np.array([[0,1,0],[0,0,1],[2,1,-2]])
B = np.dot(A-I, A+I)
C = np.dot(B, A+2*I)
print(C)
```

et il renvoie :

```
array([[0, 0, 0],[0, 0 , 0],[0, 0, 0]])
```

Que peut-on en déduire ?

RÉPONSE:

On peut en déduire que $(A - I_3)(A + I_3)(A + 2I_3) = 0_{\mathscr{M}_3(\mathbb{R})}$.
Ainsi : le polynôme $P(x) = (x - 1)(x + 1)(x + 2)$ *est un polynôme annulateur de* A.

* * *

(b) Donner les valeurs propres possibles de A.

RÉPONSE:

D'après la question précédente, P *étant un polynôme annulateur de* A *:*

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \{ \textit{ racines de } P\} = \{-2, -1, 1\}$$

Les valeurs propres possibles de A *sont :* $-2, -1$ *et 1 .*

* * *

2. (a) Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ et une base de chacun des sous-espaces propres de A.

RÉPONSE:

Soit $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

- *Tout d'abord :*

$$\begin{aligned}
U \in E_{-2}(A) &\iff (A+2I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\\
&\iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\\ 0\\ 0 \end{pmatrix}\\
&\iff \left\{\begin{array}{r} 2x+y=0\\ 2y+z=0\\ 2x+y \quad y \end{array}\right.\\
&\iff \left\{\begin{array}{ll} 2x+y & y\\ 2y+z & =0 \end{array}\right.\\
&\iff \begin{cases} 2x = -y\\ z = -2y \end{cases}\\
&\iff \left\{ x = -\frac{1}{2}y \right.\\
&\iff \quad z = -2y
\end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned}
E_{-2}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x\\ y\\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,\middle|\, x = -\frac{1}{2}y \quad \textit{et} \quad z = -2y \right\}\\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}y\\ y\\ -2y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\}\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\\ 1\\ -2 \end{pmatrix} \right)\\
&= \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 4 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}$$

$E_{-2}(A) \neq \left\{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\right\}$ *donc -2 est valeur propre de A. De plus, la famille* $\mathcal{F}_{-2} = \left(\begin{pmatrix} 1\\ -2\\ 4 \end{pmatrix} \right)$ *:*

- *engendre* $E_{-2}(A)$
- *est libre car constituée d'un unique vecteur non nul*

donc $\mathcal{F}_{-2}$ *est une base de* $E_{-2}(A)$*.*

- *Ensuite :*

$$
\begin{aligned}
U \in E_{-1}(A) &\iff (A+I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\
&\iff \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&\iff \left\{ \begin{array}{r} x+y=0 \\ y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{r} x+y=0 \\ y+z=0 \\ -y-z=0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ll} x+y & L_3 \leftarrow L_3 - 2L_1 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ \begin{array}{ll} x+z & =0 \\ y=-y & 0=0 \end{array} \right. \\
&\iff \left\{ x=-y \right.
\end{aligned}
$$

On en déduit que

$$
\begin{aligned}
E_{-1}(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,\middle|\, x=-y \quad \textit{et } z=-y \right\} \\
&= \left\{ \begin{pmatrix} -y \\ y \\ -y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\} \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \\
&= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)
\end{aligned}
$$

$E_{-1}(A) \neq \left\{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\right\}$ *donc -1 est valeur propre de A. De plus, la famille* $\mathcal{F}_{-1} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ *:*

- *engendre* $E_{-1}(A)$
- *est libre car constituée d'un unique vecteur non nul*
  donc $\mathcal{F}_{-1}$ *est une base de* $E_{-1}(A)$*.*

- *Enfin :*

$$\begin{aligned} U \in E_1(A) &\Longleftrightarrow (A-I)U = 0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})} \\ &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} -x+y=0 \\ -y+z=0 \\ 2x+y-3z=0 \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} -x+y &= 0 \\ -y+z &= 0 \\ 3y-3z &= 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3+2L_1 \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} -x+y &= 0 \\ -y+z &= 0 \\ 0 &= 0 \end{cases} \quad L_3 \leftarrow L_3+3L_2 \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} x=y \\ z=y \end{cases} \end{aligned}$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} E_1(A) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,\middle|\, x=y \quad \text{et} \quad z=y \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} y \\ y \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R}) \,\middle|\, y \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \end{aligned}$$

$E_1(A) \neq \left\{0_{\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})}\right\}$ *donc 1 est valeur propre de A. De plus, la famille* $\mathcal{F}_1 = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$:

- *engendre* $E_1(A)$
- *est libre car constituée d'un unique vecteur non nul*

donc $\mathcal{F}_1$ *est une base de* $E_1(A)$.
Les valeurs propres possibles de A sont $-2, -1, 1$ *et on a vérifié que chacune d'elles est une valeur propre de A. Donc*

$$\operatorname{Sp}(A) = \{-2, -1, 1\}$$

* * *

(b) Justifier que A est diagonalisable puis expliciter une matrice $P \in \mathcal{M}_3$ inversible, dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et une matrice $D \in \mathcal{M}_3$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient $A = PDP^{-1}$.

RÉPONSE:

La matrice A est carrée d'ordre 3 et admet trois valeurs propres distinctes donc A est diagonalisable. Ainsi, il existe :

- *une matrice* $P \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ *inversible, obtenue en concaténant les bases des sous-espaces propres de A*

- *une matrice $D \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont les valeurs propres de A telles que $A = PDP^{-1}$.*

  On pose alors $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ *et* $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

  D'après la formule de changement de base, on a bien $A = PDP^{-1}$.

$* * *$

Partie II : Calcul des solutions générales de (E)

On note S l'ensemble des solutions de (E) et S_0 l'ensemble des solutions de (E_0).

On note $X : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \end{pmatrix}$ où φ est une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que φ est solution de (E_0) si et seulement si $X' = AX$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned} X' = AX &\iff \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \varphi'''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \end{pmatrix} \\ &\iff \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ \varphi'''(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \\ 2\varphi(t) + \varphi'(t) - 2\varphi''(t) \end{pmatrix} \\ &\iff \varphi'''(t) = 2\varphi(t) + \varphi'(t) - 2\varphi''(t) \\ &\iff \varphi \textit{ est solution de } (E_0) \end{aligned}$$

$* * *$

4. (a) Déterminer les solutions générales du système différentiel linéaire $X' = AX$. (On utilisera les notations C_1, C_2 et C_3 pour nommer les constantes indéterminées)

RÉPONSE:

D'après la partie I, la matrice A est diagonalisable, $\mathrm{Sp}(A) = \{-2, -1, 1\}$ et la famille $(U_{-2}, U_{-1}, U_1) = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ est une base de $\mathscr{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ formée de vecteurs propres de A (pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(A), U_\lambda$ est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ).

- *On pose $Y = P^{-1}X$. On a $X' = AX \Leftrightarrow Y' = DY$.*
- *Les matrices Y sont de la forme*

$$Y : t \mapsto \begin{pmatrix} C_1 e^{-2t} \\ C_2 e^{-t} \\ C_3 e^{t} \end{pmatrix} \qquad (C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$$

- *On en déduit que les solutions générales du système différentiel linéaire $X' = AX$ sont de la forme :*

$$\varphi : t \mapsto C_1 e^{-2t} U_{-2} + C_2 e^{-t} U_{-1} + C_3 e^{t} U_1$$

  où $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$.

$$* * *$$

(b) Expliciter l'ensemble S_0.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
\varphi \in S_0 &\iff \varphi \textit{ est solution de } (E_0)\\
&\iff X' = AX\\
&\iff \exists\,(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \begin{pmatrix} C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2\mathrm{e}^{-t} + C_3\mathrm{e}^{t} \\ -2C_1\mathrm{e}^{-2t} - C_2\mathrm{e}^{-t} + C_3\mathrm{e}^{t} \\ 4C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2\mathrm{e}^{-t} + C_3\mathrm{e}^{t} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

(en ne garès la question 4.a))

$$\iff \exists\,(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3, \forall t \in \mathbb{R}, \varphi(t) = C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2\mathrm{e}^{-t} + C_3\mathrm{e}^{t}$$

$S_0 = \{t \mapsto$ (

Dremière coordont que láé la

$$* * *$$

5. (a) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $g : t \mapsto (at+b)\mathrm{e}^{2t}$ soit solution particulière de (E). (On commencera par calculer et mettre sous forme factorisée $g'(t), g''(t)$ et $g'''(t)$.)

RÉPONSE:

Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ et soit $g : t \mapsto (at+b)\mathrm{e}^{2t}$. La fonction g est dérivable trois fois sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables trois fois sur $\mathbb{R}$.
Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
g'(t) &= a\mathrm{e}^{2t} + 2(at+b)\mathrm{e}^{2t} = (2at + a + 2b)\mathrm{e}^{2t}\\
g''(t) &= 2a\mathrm{e}^{2t} + 2(2at + a + 2b)\mathrm{e}^{2t} = (4at + 4a + 4b)\mathrm{e}^{2t}\\
g'''(t) &= 4a\mathrm{e}^{2t} + 2(4at + 4a + 4b)\mathrm{e}^{2t} = (8at + 12a + 8b)\mathrm{e}^{2t}
\end{aligned}$$

Il suit :

$$\begin{aligned}
g'''(t) + 2g''(t) - g'(t) - 2g(t) = &- 2(at+b)\mathrm{e}^{2t}\\
&- (2at + a + 2b)\mathrm{e}^{2t}\\
&+ 2(4at + 4a + 4b)\mathrm{e}^{2t}\\
&+ (8at + 12a + 8b)\mathrm{e}^{2t}\\
=&(12at + 19a + 12b)\mathrm{e}^{2t}
\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}
g'''(t) + 2g''(t) - g'(t) - 2g(t) = (-12t+5)\mathrm{e}^{2t} &\iff (12at + 19a + 12b)\mathrm{e}^{2t} = (-12t+5)\mathrm{e}^{2t}\\
&\iff (12at + 19a + 12b) = (-12t+5)
\end{aligned}$$

On en déduit, par identification des coefficients :

$$\begin{aligned}
g \textit{ est une solution particulière de } (E) &\iff \begin{cases} 12a = -12 \\ 19a + 12b = 5 \end{cases}\\
&\iff \begin{cases} a = -1 \\ b = 2 \end{cases}
\end{aligned}$$

La fonction $g : t \mapsto (-t+2)\mathrm{e}^{2t}$ est une solution particulière de (E).

* * *

(b) Montrer que φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de $(\ E_0\ )$, où g est la solution particulière déterminée à la question précédente.

RÉPONSE:

Raisonnons par double implication.

- *Supposons que φ soit solution de (E).*
  Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}(\varphi-g)'''(t)+2(\varphi-g)''(t)-(\varphi-g)'(t)-2(\varphi-g)(t) =&\varphi'''(t)+2\varphi''(t)-\varphi'(t)-2\varphi(t)\\ &-\big(g'''(t)+2g''(t)-g'(t)-2g(t)\big)\\ =&(-12t+5)\mathrm{e}^{2t}-(-12t+5)\mathrm{e}^{2t}\\ =&0\end{aligned}$$

et donc $\varphi - g$ est solution de (E_0).

- *Supposons que $\varphi - g$ soit solution de (E_0).*
  Alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$(\varphi-g)'''(t)+2(\varphi-g)''(t)-(\varphi-g)'(t)-2(\varphi-g)(t)=0$$

  et donc, en utilisant le fait que g est solution de (E) :

$$\varphi'''(t)+2\varphi''(t)-\varphi'(t)-2\varphi(t)=g'''(t)+2g''(t)-g'(t)-2g(t)=(-12t+5)\mathrm{e}^{2t}$$

  ceci permet de conclure que φ est solution de $(\ E\ )$.

* * *

(c) En déduire l'ensemble S.

RÉPONSE:

En traduisant le résultat de la question 5.b), on a

$$\varphi \in S \iff \varphi - g \in S_0$$

Ainsi, d'après la question 4.b),

$$\begin{aligned}\varphi \in S &\iff \exists\,(C_1,C_2,C_3)\in\mathbb{R}^3, \forall t\in\mathbb{R}, \varphi(t)-g(t)=C_1\mathrm{e}^{-2t}+C_2\mathrm{e}^{-t}+C_3\mathrm{e}^{t}\\ &\iff \exists\,(C_1,C_2,C_3)\in\mathbb{R}^3, \forall t\in\mathbb{R}, \varphi(t)=C_1\mathrm{e}^{-2t}+C_2\mathrm{e}^{-t}+C_3\mathrm{e}^{t}+(-t+2)\mathrm{e}^{2t}\end{aligned}$$

D'où : $S=\left\{t\mapsto C_1\mathrm{e}^{-2t}+C_2\mathrm{e}^{-t}+C_3\mathrm{e}^{t}+(-t+2)\mathrm{e}^{2t} \mid (C_1,C_2,C_3)\in\mathbb{R}^3\right\}$

* * *

Partie III : Etude d'une famille de problèmes de Cauchy

On s'intéresse dans cette partie aux problèmes de Cauchy de la forme :

$$(P_{u,v}) : \begin{cases} \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = (-12t+5)\mathrm{e}^{2t} \\ \varphi(0) = 1 \\ \varphi'(0) = u \\ \varphi''(0) = v \end{cases} \qquad \text{où } (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

6. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.

   (a) Montrer qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy $(P_{u,v})$ et qu'il s'agit de la fonction :
   $\varphi_{u,v} : t \mapsto \left(\frac{1}{3}v - 1\right)\mathrm{e}^{-2t} + \left(-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{-t} + \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t}$

RÉPONSE:

Soit φ une solution de (E). Il existe $(C_1, C_2, C_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que, pour tout $t \in \mathbb{R}$,

$$\varphi(t) = C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2\mathrm{e}^{-t} + C_3\mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t}$$

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi'(t) &= -2C_1\mathrm{e}^{-2t} - C_2\mathrm{e}^{-t} + C_3\mathrm{e}^{t} - \mathrm{e}^{2t} + 2(-t+2)\mathrm{e}^{2t} \\ &= -2C_1\mathrm{e}^{-2t} - C_2\mathrm{e}^{-t} + C_3\mathrm{e}^{t} + (-2t+3)\mathrm{e}^{2t} \\ \varphi''(t) &= 4C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2\mathrm{e}^{-t} + C_3\mathrm{e}^{t} - 2\mathrm{e}^{2t} + 2(-2t+3)\mathrm{e}^{2t} \\ &= 4C_1\mathrm{e}^{-2t} + C_2\mathrm{e}^{-t} + C_3\mathrm{e}^{t} + (-4t+4)\mathrm{e}^{2t} \end{aligned}$$

D'où :

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= C_1 + C_2 + C_3 + 2 \\ \varphi'(0) &= -2C_1 - C_2 + C_3 + 3 \\ \varphi''(0) &= 4C_1 + C_2 + C_3 + 4 \end{aligned}$$

Il vient alors :

$$\varphi \text{ est solution de } (P_{u,v}) \iff \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + 2 = 1 \\ -2C_1 - C_2 + C_3 + 3 = u \\ 4C_1 + C_2 + C_3 + 4 = v \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = -1 \\ -2C_1 - C_2 + C_3 = u - 3 \\ 4C_1 + C_2 + C_3 = v - 4 \end{cases}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2 + 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - 4L_1}}{\iff} \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = -1 \\ C_2 + 3C_3 = u - 5 \\ -3C_2 - 3C_3 = v \end{cases} \underset{L_3 \leftarrow L_3 + 3L_2}{\iff} \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = -1 \\ C_2 + 3C_3 = u - 5 \\ 6C_3 = 3u + v - 15 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow 6L_1 - L_3}{\iff} \begin{cases} 6C_1 + 6C_2 = -3u - v + 9 \\ 2C_2 = -u - v + 5 \\ 6C_3 = 3u + v - 15 \end{cases}$$

$$\underset{L_1 \leftarrow L_1 - 3L_2}{\iff} \begin{cases} 6C_1 = 2v - 6 \\ 2C_2 = -u - v + 5 \\ 6C_3 = 3u + v - 15 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 = \frac{1}{3}v - 1 \\ C_2 = -\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2} \\ C_3 = \frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2} \end{cases}$$

Ceci démontre qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy $(P_{u,v})$ et qu'il s'agit de la fonction :

$$\varphi_{u,v} : t \mapsto \left(\frac{1}{3}v - 1\right)\mathrm{e}^{-2t} + \left(-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{-t} + \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t}$$

$$\ast\ast\ast$$

(b) Calculer $\lim\limits_{t\to+\infty} \varphi_{u,v}(t)$.

RÉPONSE:

Soit $t \in \mathbb{R}$.

$$\varphi_{u,v}(t) = \mathrm{e}^{2t}\left(\left(\frac{1}{3}v-1\right)\mathrm{e}^{-4t} + \left(-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v+\frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{-3t} + \left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}v-\frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{-t} + (-t+2)\right)$$

Tout d'abord :

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\frac{1}{3}v-1\right)\mathrm{e}^{-4t} + \left(-\frac{1}{2}u-\frac{1}{2}v+\frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{-3t} + \left(\frac{1}{2}u+\frac{1}{6}v-\frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{-t} = 0$$

Ensuite :

$$\lim_{t\to+\infty}(-t+2) = -\infty$$

Enfin :

$$\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{2t} = +\infty$$

$$\textit{Par somme et produit : } \lim_{t\to+\infty}\varphi_{u,v}(t) = -\infty$$

$$\ast\ast\ast$$

7. (a) Expliciter, pour tout $t \geq 0, \varphi_{0,1}(t)$.

RÉPONSE:

Soit $t \geqslant 0$.

$$\begin{aligned}\varphi_{0,1}(t) &= \left(\frac{1}{3}-1\right)\mathrm{e}^{-2t} + \left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{-t} + \left(\frac{1}{6}-\frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t}\\ &= -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-2t} + 2\mathrm{e}^{-t} - \frac{7}{3}\mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t}\end{aligned}$$

$$\ast\ast\ast$$

(b) En déduire une fonction Python, d'en-tête def phi (t), qui prend en entrée un réel $t \geq 0$ et renvoie le réel $\varphi_{0,1}(t)$.

RÉPONSE:

On propose la fonction Python suivante :

```
def phi(t):
    return - (2/3) * np.exp (-2*t) + 2 * np.exp(-t)
    -(7/3)* np.exp(t) + (-t+2)*np.exp (2*t)
```

$$\ast\ast\ast$$

(c) Dire, parmi les quatre représentations graphiques de fonctions ci-dessous, laquelle correspond au graphe de $\varphi_{0,1}$. On expliquera son raisonnement en notant ψ_i la fonction associée au tracé numéro i.

Figure 1

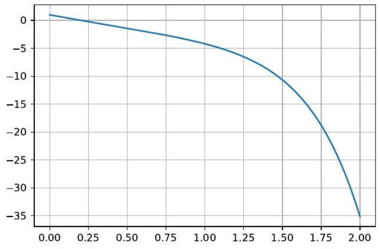


Figure 2

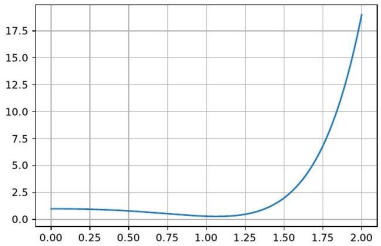


Figure 3

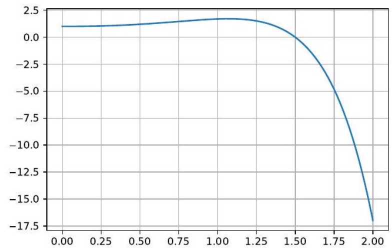
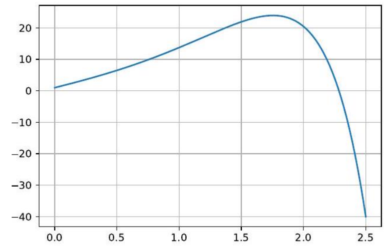


Figure 4



RÉPONSE:

- *La fonction* ψ_2 *vérifie :* $\lim\limits_{t \to +\infty} \psi_2(t) = +\infty$. *Ainsi, d'après la question* **6**.*b), le tracé numéro 2 ne correspond pas à* $\varphi_{0,1}$.
- *Par définition,* $\varphi_{0,1}'(0) = 0$. *Or, on remarque que* $\psi_1'(0) < 0$ *et* $\psi_4'(0) > 0$. *Donc les tracés numéros 1 et 4 ne peuvent pas correspondre à* $\varphi_{0,1}$.

On en déduit que c'est le tracé numéro 3 qui correspond au graphe de $\varphi_{0,1}$.

* * *

(d) Montrer : $\varphi_{0,1}(2) = \mathrm{e}^2 \left(\dfrac{6 - 7\mathrm{e}^4}{3\mathrm{e}^4} - \dfrac{2}{3}\mathrm{e}^{-6} \right)$. En déduire qu'il existe $t \in]0,2[$ tel que $\varphi_{0,1}(t) = 0$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
\varphi_{0,1}(2) &= -\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-4} + 2\mathrm{e}^{-2} - \frac{7}{3}\mathrm{e}^2 \\
&= \mathrm{e}^2 \left(-\frac{2}{3}\mathrm{e}^{-6} + 2\mathrm{e}^{-4} - \frac{7}{3} \right) \\
&= \mathrm{e}^2 \left(\frac{2}{\mathrm{e}^4} - \frac{7}{3} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-6} \right) \\
&= \mathrm{e}^2 \left(\frac{6 - 7\mathrm{e}^4}{\mathrm{e}^4} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-6} \right)
\end{aligned}$$

- *Par définition,* $\varphi_{0,1}(0) = 1 > 0$.
- *D'après le calcul précédent, en utilisant le fait que* $\mathrm{e}^4 > 2 > \dfrac{6}{7}$, *on a également* $\varphi_{0,1}(2) < 0$. *De plus, la fonction* $\varphi_{0,1}$ *est continue sur* $[0,2]$.

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un réel $t \in]0,2[$ *tel que* $\varphi_{0,1}(t) = 0$.

* * *

(e) Recopier et compléter la fonction en langage Python suivante, prenant en entrée un réel strictement positif eps, et renvoyant une valeur approchée d'un zéro de la fonction $\varphi_{0,1}$ à eps près en appliquant l'algorithme de dichotomie.

```
def dichotomie(eps):
    a = 0
    b =...
    while ...:
        c=(a+b)/2
        if ...
            b = ...
        else:
              ...
    return ...
```

RÉPONSE:

```
def dichotomie(eps):
    a = 0
    b = 2
    while b-a > eps :
        c = (a+b)/2
        if phi(c) < 0:
                            b = c
        else:
            a = c
    return (a+b)/2
```

* * *

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables - Partie réservée aux cubes

On considère le fermé $F = [0,1]^2$ et l'ouvert $U =]0,1[^2$.
On note f la fonction de deux variables définie sur F par :

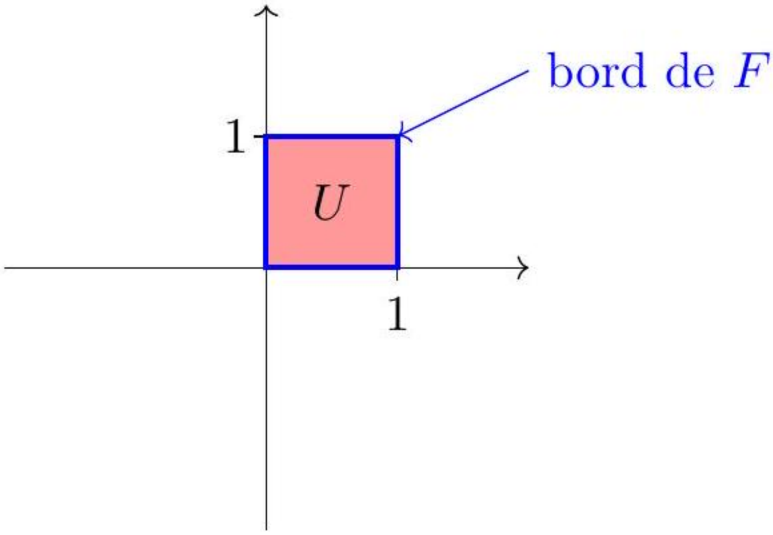
$$\forall (x,y) \in F, f(x,y) = \varphi_{x,y}(1)$$

(On s'intéresse ici à l'évolution au temps 1 des solutions des problèmes de Cauchy étudiés à la partie précédente.)

8. Représenter l'ouvert U ainsi que le bord de F sur un même graphique, dans un repère orthonormé.

RÉPONSE:

On représente U en rouge et le bord de F en bleu.



$* * *$

9. Montrer qu'il existe trois constantes α, β et γ (que l'on explicitera) telles que :

$$\forall (x,y) \in F, f(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma$$

RÉPONSE:

Soit $(x,y) \in F$.

$$\begin{aligned} f(x,y) &= \varphi_{x,y}(1) \\ &= \left(\frac{1}{3}y - 1\right) \mathrm{e}^{-2} + \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{-1} + \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{6}y - \frac{5}{2}\right) \mathrm{e}^{1} + (-1+2)\mathrm{e}^{2} \\ &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right) x + \left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{6}\mathrm{e}\right) y - \mathrm{e}^{-2} + \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1} - \frac{5}{2}\mathrm{e} + \mathrm{e}^{2} \\ &= \alpha x + \beta y + \gamma \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2}\left(\mathrm{e} - \mathrm{e}^{-1}\right) \\ \beta &= \left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{6}\mathrm{e}\right) \\ \gamma &= -\mathrm{e}^{-2} + \frac{5}{2}\mathrm{e}^{-1} - \frac{5}{2}\mathrm{e} + \mathrm{e}^{2} \end{aligned}$$

$* * *$

10. Démontrer que f admet un maximum global sur F.

RÉPONSE:

La fonction f est continue sur F (car polynomiale) et F est un fermé borné.
D'après le cours, on en déduit que f admet un maximum global sur F.

$* * *$

11. (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

RÉPONSE:

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U car polynomiale (d'après la question **9** *).*

$* * *$

(b) La fonction f admet-elle des points critiques sur U ? Si oui, les donner.

RÉPONSE:

Soit $(x,y) \in U$.

$$\begin{aligned}(x,y) \text{ est un point critique de } f &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\partial_1(f)(x,y)=0\\ \partial_2(f)(x,y)=0\end{array}\right.\\ &\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l}\alpha=0\\ \beta=0\end{array}\right.\end{aligned}$$

Or, $\alpha \neq 0$ (car $\mathrm{e}>2$ donc $\mathrm{e} \neq \mathrm{e}^{-1}$) donc f n'admet aucun point critique sur U.

$* * *$

(c) En déduire que le maximum global de f sur F ne peut pas être atteint sur U. (Il est donc nécessairement atteint sur le bord de F.)

RÉPONSE:

Notons $(x_0,y_0) \in F$ un point où f atteint son maximum global sur F.
Supposons que $(x_0,y_0) \in U$.
L'ensemble U étant un ouvert et f étant de classe $\mathcal{C}^1$ sur U, le point (x_0, y_0) est nécessairement un point critique de f. Or, d'après la question 11.b), f n'admet aucun point critique sur U. C'est absurde.
On peut conclure que $(x_0,y_0) \notin U$ et donc $(x_0,y_0) \in F \backslash U$ (c'est-à-dire le bord de F).

$* * *$

12. (a) Montrer : $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

RÉPONSE:

- *On sait que $\mathrm{e}>2$ et donc $\mathrm{e}^{-1} < 1 < \mathrm{e}$.*

$$D'où : \alpha = \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}\right) > 0.$$

- *On remarque que :*

$$\beta = \left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{-2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-1} + \frac{1}{6}\mathrm{e}\right) = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2}\left(2+\mathrm{e}^3-3\mathrm{e}\right) = \frac{1}{6}\mathrm{e}^{-2}\left(2+\mathrm{e}\left(\mathrm{e}^2-3\right)\right)$$

Or, $\mathrm{e}^2 > 4 > 3$.

$$D'où : \beta > 0.$$

$* * *$

(b) En déduire que le maximum global de f sur F est atteint en un unique point (x_0, y_0) dont on explicitera les coordonnées.

RÉPONSE:

Soit $(x, y) \in F$. On a $0 \leqslant x \leqslant 1$ et $0 \leqslant y \leqslant 1$ donc $0 \leqslant \alpha x \leqslant \alpha$ et $0 \leqslant \beta y \leqslant \beta$. En sommant ces deux inégalités, on obtient :

$$\alpha x + \beta y \leqslant \alpha + \beta$$

D'où

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma \leqslant \alpha + \beta + \gamma = f(1, 1)$$

Ceci prouve que f atteint son maximum global sur F au point $(1, 1)$.
De plus, si $x < 1$ ou $y < 1$, alors

$$f(x, y) = \alpha x + \beta y + \gamma < \alpha + \beta + \gamma = f(1, 1)$$

Ceci prouve que le maximum global de f sur F est atteint uniquement en $(1, 1)$.

* * *

(c) Parmi les deux tracés de lignes de niveaux ci-dessous, lequel correspond à la fonction f ?

Figure 5

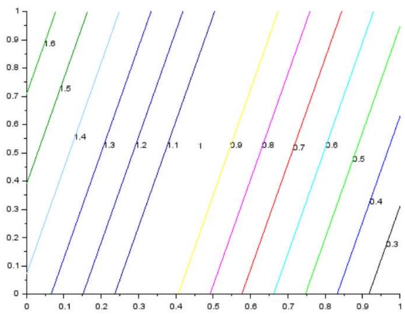
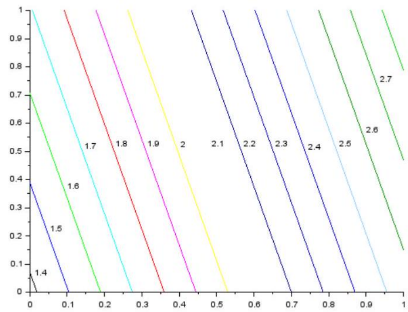


Figure 6



RÉPONSE:

Il s'agit du tracé numéro 2, car on remarque que la valeur inscrite sur les lignes de niveaux augmente lorsque l'on se rapproche du point $(1, 1)$, contrairement à ce que l'on peut observer sur le tracé numéro 1 .

* * *

Exercice n°3

Partie 1 : propriété d'une loi de probabilité

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.
   On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.

RÉPONSE:

On vérifie les différents points :

- *La fonction f est continue sur $]-\infty;1[$ car elle est constante sur cette intervalle, et elle continue sur $]1;+\infty[$ comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas. Ainsi, elle est continue sur $\mathbb{R}\setminus\{1\}$, qui est $\mathbb{R}$ privé d'un nombre fini de points.*
- *La fonction f est positive ou nulle sur $]-\infty;1[$ (car nulle). De plus, comme $c>0$, on a également $f(x)\geq 0$ pour tout $x\geq 1$. Donc f est positive ou nulle sur $\mathbb{R}$.*
- *Reste à vérifier que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$, c'est-à-dire que $\int_1^{+\infty} f(x)dx = 1$ (puisque f est nulle sur $]-\infty;1[$). Or, pour tout $A\geq 1$, on a :*

$$\begin{aligned}\int_1^A f(x)dx &= \int_1^A \frac{c}{x^{1+c}}dx \\ &= \left[\frac{-1}{x^c}\right]_1^A \\ &= \frac{-1}{A^c}+1\end{aligned}$$

Et $\frac{-1}{A^c}+1 \underset{A}{\longrightarrow} +\infty 1$ car $c>0$. Ainsi $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ est convergente et vaut 1, et donc $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ aussi.

Conclusion : la fonction f est une densité de probabilité.

* * *

2. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c.

RÉPONSE:

Pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt$. Ainsi, si $x<1$, on a $F(x)=0$ (car f est nulle sur $]-\infty;x]$). Et si $x\geq 1$, on a :

$$
\begin{aligned}
F(x) &= \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \\
&= \int_{1}^{x} f(t)dt \quad car\ f\ est\ nulle\ sur\ ]-\infty;1[\\
&= \int_{1}^{x} \frac{c}{t^{1+c}}dt \\
&= \left[\frac{-1}{t^c}\right]_1^x \\
&= \frac{-1}{x^c}+1
\end{aligned}
$$

Conclusion : la fonction de répartition F de X est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$
\boxed{F(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^c}+1 & si\ x \geq 1 \\ 0 & si\ x < 1 \end{cases}}
$$

* * *

3. Soit t un réel strictement supérieur à 1.
   (a) Déterminer, en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$, la probabilité conditionnelle $P_{(X>t)}(X \leqslant tx)$.

RÉPONSE:

On calcule avec la définition de la probabilité conditionnelle :

$$
P_{(X>t)}(X \leqslant tx) = \frac{P\Big((X>t)\cap(X \leqslant tx)\Big)}{P(X>t)}
$$

Si $x<1$, alors $tx<t$. Ainsi, $P\Big((X>t)\cap(X\leqslant tx)\Big)=0$ (on ne peut pas avoir à la fois $X>t$ et $X \leq tx$), donc $P_{(X>t)}(X\leqslant tx)=0$.
Maintenant, si $x \geq 1$, alors :

$$
\begin{aligned}
P_{(X>t)}(X \leqslant tx) &= \frac{P(X \in]t;tx])}{P(X>t)} \\
&= \frac{F(tx)-F(t)}{1-F(t)} \\
&= \frac{\left(1-\frac{1}{(tx)^c}\right)-\left(1-\frac{1}{t^c}\right)}{1-\left(1-\frac{1}{t^c}\right)} \quad car\ tx \geq t > 1 \\
&= \frac{-\frac{1}{t^c x^c}+\frac{1}{t^c}}{\frac{1}{t^c}} \\
&= -\frac{1}{x^c}+1
\end{aligned}
$$

Conclusion : pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$
P_{(X>t)}(X \leqslant tx) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x^c}+1 & si\ x \geq 1 \\ 0 & si\ x < 1 \end{cases}
$$

Autrement dit, $P_{(X>t)}(X \leqslant tx) = F(x)$ pour tout x réel.

$* * *$

(b) En déduire que la loi de $\dfrac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $(X > t)$, est la loi de X.

RÉPONSE:

Posons $X_t = \dfrac{X}{t}$. *On cherche sa loi (sa fonction de répartition) conditionnellement à l'événement* $(X > t)$. *Pour tout* $x \in \mathbb{R}$ *:*

$$\begin{aligned} P_{(X>t)}(X_t \leq x) &= P_{(X>t)}\left(\frac{X}{t} \leq x\right) \\ &= P_{(X>t)}(X \leqslant tx) \quad \textit{car } t > 0 \\ &= F(x) \quad \textit{d'après la question précédente} \\ &= P(X \leq x) \end{aligned}$$

$\boxed{\textit{Conclusion : la loi de } \dfrac{X}{t}\textit{, conditionnellement à l'événement } (X > t)\textit{, est la loi de } X.}$

$* * *$

Partie 2 : réciproque de la propriété précédente

On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty; 1[$, strictement positive et continue sur $[1; +\infty[$.
On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y.
Dans toute la suite, on suppose que, pour tout réel t strictement supérieur à 1, on a :

- $P(Y > t) > 0$
- La loi de $\dfrac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $(Y > t)$, est la loi de Y.

On veut alors montrer que Y suit la loi de Pareto de paramètre c.

4. Justifier que $G(1) = 0$.

RÉPONSE:

On a $G(1) = \displaystyle\int_{-\infty}^{1} g(t)dt$. *Or, la fonction* g *est nulle sur* $]-\infty; 1[$, *d'où* $\boxed{G(1) = \displaystyle\int_{-\infty}^{1} 0dt = 0}$.

$* * *$

5. (a) Établir l'égalité :

$$\forall x \geqslant 1, \forall t > 1, \quad G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$

RÉPONSE:

C'est le même genre de calcul qu'à la question 3.(a). Pour tout $x \geq 1$ *et pour tout* $t > 1$,

$$\begin{aligned} G(x) &= P(Y \leqslant x) \\ &= P_{(Y>t)}\left(\frac{Y}{t} \leq x\right) \quad \textit{par hypothèse sur } Y \\ &= P_{(Y>t)}(Y \leqslant tx) \quad \textit{car } t > 0 \\ &= \frac{P\Big((Y > t) \cap (Y \leqslant tx)\Big)}{P(Y > t)} \quad (P(Y > t) \neq 0 \textit{ par hypothèse}) \\ &= \frac{P(Y \in]t; tx])}{P(Y > t)} \end{aligned}$$

Ce qui donne bien (comme $tx \geq t$) : $\boxed{G(x) = \dfrac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}}$.

$$* * *$$

(b) Justifier que G est de la classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1; +\infty[$ et en déduire que :

$$\forall x > 1, \forall t > 1, \quad G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$$

RÉPONSE:

La variable aléatoire Y a pour fonction de répartition G, et pour densité g, qui est continue sur $]1; +\infty[$ par hypothèse.
Par conséquent, $\boxed{G \text{ est de classe } \mathcal{C}^1 \text{ sur }]1; +\infty[}$ *(et $G'(x) = g(x)$ pour tout $x > 1$).*
Maintenant, soit $t > 1$ fixé. La fonction $x \mapsto G(tx)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1; +\infty[$ comme composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ (pour tout $x > 1$, on a $tx \in]1; +\infty[$). On peut donc dériver membre à membre l'égalité de la question précédente (par rapport à x) sur $]1; +\infty[$. On obtient, pour tout $x > 1$: $\boxed{G'(x) = \dfrac{tG'(tx)}{1 - G(t)}}$.

$$* * *$$

(c) Montrer enfin la relation :

$$\forall t > 1, \quad G(t) + \frac{t}{c} G'(t) = 1$$

RÉPONSE:

D'après la question précédente, pour tout $t > 1$ et pour tout $x > 1$, on a :

$$G'(x)(1 - G(t)) = tG'(tx)$$

soit

$$g(x)(1 - G(t)) = tG'(tx)$$

On passe à la limite dans cette inégalité lorsque x tend vers 1. Par continuité (à droite) de g en 1, et par continuité de G' en t, on obtient :

$$g(1)(1 - G(t)) = tG'(t)$$

Or, $g(1) = c$ par hypothèse. Donc, pour tout $t > 1$, on a :

$$c(1 - G(t)) = tG'(t)$$

c'est-à-dire :

$$1 - G(t) = \frac{t}{c} G'(t)$$

D'où le résultat :

$$\boxed{\forall t > 1, \quad G(t) + \frac{t}{c} G'(t) = 1}$$

$$* * *$$

6. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1; +\infty[$ qui, à tout réel t de $]1; +\infty[$, associe $y(t)$.
   On note (E_1) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c} y' = 0$ et (E_2) l'équation différentielle $y + \frac{t}{c} y' = 1$.
   Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.

(a) Soit z la fonction définie par $z(t) = t^c y(t)$. Montrer que y est solution de l'équation différentielle (E_1) si, et seulement si, z est constante sur $]1;+\infty[$.

RÉPONSE:

Pour tout $t > 1$, on a

$$z'(t) = ct^{c-1}y(t) + t^c y'(t) = ct^{c-1}\left(y(t) + \frac{t}{c}y'(t)\right)$$

Comme $ct^{c-1} > 0$, on en déduit :

$$\begin{aligned} \forall t > 1,\ z'(t) = 0 &\iff \forall t > 1,\ y(t) + \frac{t}{c}y'(t) = 0 \\ &\iff y \text{ est solution de l'équation différentielle } (E_1) \end{aligned}$$

$\boxed{\text{Autrement dit, } y \text{ est solution de l'équation différentielle } (E_1) \text{ si et seulement si } z \text{ est constante sur }]1;+\infty[.}$

* * *

(b) En notant K la constante évoquée à la question 6.(a), donner toutes les solutions de (E_1).

RÉPONSE:

Pour tout $t > 1$, on a $y(t) = \dfrac{z(t)}{t^c}$.

$\boxed{\text{Ainsi, les solutions de l'équation différentielle } (E_1) \text{ sont les fonctions } y \text{ de la forme } y : t \mapsto \dfrac{K}{t^c}, \text{ avec } K \text{ constante réell}}$

* * *

(c) Trouver une fonction u, constante sur $]1;+\infty[$, et solution de l'équation différentielle (E_2).

RÉPONSE:

Soit u constante sur $]1;+\infty[$. Alors $u' = 0$. Par conséquent, pour tout $t > 1$, $u(t) + \dfrac{t}{c}u'(t) = u(t)$. Ainsi, u est solution de (E_2) si et seulement si $\boxed{u(t) = 1 \text{ pour tout } t > 1}$.

* * *

(d) Montrer l'équivalence : h est solution de $(E_2) \iff h - u$ est solution de (E_1).

RÉPONSE:

On montre l'équivalence :

$$\begin{aligned} h - u \text{ est solution de } (E_1) &\iff \forall t > 1,\ \Big(h(t) - u(t)\Big) + \frac{t}{c}\Big(h'(t) - u'(t)\Big) = 0 \\ &\iff \forall t > 1,\ h(t) - u(t) + \frac{t}{c}h'(t) - \frac{t}{c}u'(t) = 0 \\ &\iff \forall t > 1,\ h(t) + \frac{t}{c}h'(t) = u(t) + \frac{t}{c}u'(t) \\ &\iff \forall t > 1,\ h(t) + \frac{t}{c}h'(t) = 1 \quad \text{car } u \text{ est solution de } (E_2) \end{aligned}$$

Autrement dit :

$$\boxed{h - u \text{ est solution de } (E_1) \iff h \text{ est solution de } (E_2)}$$

* * *

(e) En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par :

$$\forall t > 1, \quad h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$$

RÉPONSE:

D'après ce qui précède, h est solution de (E_2) si et seulement si $h = u + y$ où y est solution de (E_1). Donc, d'après les questions 6.(b) et 6.(c) :

la fonction h est solution de (E_2) si et seulement s'il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t > 1$, $h(t) = 1 +$

* * *

7. (a) Montrer finalement que l'on a :

$$\forall t > 1, \quad G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$$

RÉPONSE:

D'après la question 5.(c), la fonction G est solution de (E_2), donc, d'après ce qui précède, il existe une constante $K \in \mathbb{R}$ telle que, pour tout $t > 1$, $G(t) = 1 + \dfrac{K}{t^c}$. Or, G est la fonction de répartition d'une variable aléatoire à densité. Elle est donc continue sur $\mathbb{R}$. En particulier, en 1 (à droite), on a $\lim\limits_{t \to 1^+} G(t) = G(1)$, ce qui donne $1 + K = 0$ (cf question 4), donc $K = -1$.

Conclusion : pour tout $t > 1$, on a $G(t) = 1 - \dfrac{1}{t^c}$.

* * *

(b) Vérifier que cette relation s'étend à $[1; +\infty[$ puis conclure quant à la loi de Y.

RÉPONSE:

Pour $t = 1$, on a $G(t) = G(1) = 0$ (question 4) et $1 - \dfrac{1}{t^c} = 1 - \dfrac{1}{1^c} = 1 - 1 = 0$. L'égalité ci-dessus est donc encore vraie pour $t = 1$.

Conclusion : la relation de la question précédente s'étend à $[1; +\infty[$.

Ensuite, comme g est une densité de Y et G est la fonction de répartition de Y, on a, pour tout $t < 1$, $G(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} g(t)dt$, c'est-à-dire $G(t) = 0$, car g est nulle sur $]-\infty; 1[$ par hypothèse.

Par conséquent, la fonction de répartition G de Y est la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$G(t) = \begin{cases} 1 - \dfrac{1}{t^c} & si\ t \geq 1 \\ 0 & si\ t < 1 \end{cases}$$

On reconnaît alors la la fonction de répartition de la loi de Pareto de paramètre c (cf question 2).

Conclusion : Y suit la loi de Pareto de paramètre c.

* * *

Partie 3 : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c

8. On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note H sa fonction de répartition.

(a) Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction F.

RÉPONSE:

Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H(x) &= P(Z \leq x) \\ &= P(\ln(X) \leq x) \\ &= P(X \leq e^x) \quad \textit{par stricte croissance de l'exponentielle} \end{aligned}$$

Et donc $\boxed{H(x) = F(e^x) \text{ pour tout } x \text{ réel}}$.

* * *

(b) En déduire que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

RÉPONSE:

On poursuit le calcul ci-dessus. Pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} H(x) &= F(e^x) \\ &= \begin{cases} \dfrac{-1}{e^{cx}} + 1 & \textit{si } e^x \geq 1 \\ 0 & \textit{si } e^x < 1 \end{cases} \qquad \textit{d'après la question 2} \\ &= \begin{cases} 1 - e^{-cx} & \textit{si } x \geq 0 \\ 0 & \textit{si } x < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

On reconnaît alors l'expression de la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre c.
$\boxed{\text{Conclusion : la variable aléatoire } Z \text{ suit la loi exponentielle de paramètre } c.}$

* * *

(c) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simulX(c)` et permettant de simuler X.

RÉPONSE:

Il suffit de simuler Z *(à l'aide la fonction* `exponential` *de la bibliothèque* `numpy.random`*) et d'en déduire* X *en calculant* e^Z *:*

```
def SimulX(c):
        Z=rd.exponential(1/c)
        return np.exp(Z)
```

* * *