Épreuve Composite

E C G

Devoir Surveillé n°6

Option économique

MATHEMATIQUES

25 Janvier 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Dans tout ce sujet, on suppose importés les modules

- `import math`
- `import numpy as np`
- `import numpy.random as rd`
- `matplotlib.pyplot numpy as plt`
- `import numpy.linalg as al`

Exercice n°1

Dans tout l'exercice, X et Y sont deux variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On dit que les deux variables X et Y sont **échangeables** si :

$$\forall (i,j) \in \mathbb{N}^2, \quad P([X=i] \cap [Y=j]) = P([X=j] \cap [Y=i])$$

Résultats préliminaires

1. On suppose que X et Y sont deux variables indépendantes et de même loi. Montrer que X et Y sont échangeables.
2. On suppose que X et Y sont échangeables. Montrer, à l'aide de la formule des probabilités totales, que :

$$\forall i \in \mathbb{N}, \quad P(X=i) = P(Y=i)$$

Étude d'un exemple

Soient n, b et c trois entiers strictement positifs.
Une urne contient initialement n boules noires et b boules blanches. On effectue l'expérience suivante, en distinguant trois variantes.

- On pioche une boule dans l'urne.
  On définit X la variable aléatoire qui vaut 1 si cette boule est noire et 2 si elle est blanche.
- On replace la boule dans l'urne et :
  - ⋆ Variante 1 : on ajoute dans l'urne c boules de la même couleur que la boule qui vient d'être piochée.
  - ⋆ Variante 2 : on ajoute dans l'urne c boules de la couleur opposée à celle de la boule qui vient d'être piochée.
  - ⋆ Variante 3 : on n'ajoute pas de boule supplémentaire dans l'urne.
- On pioche à nouveau une boule dans l'urne.
  On définit Y la variable aléatoire qui vaut 1 si cette seconde boule piochée est noire et 2 si elle est blanche.

3. (a) Compléter la fonction Python suivante, qui simule le tirage d'une boule dans une urne contenant b boules blanches et n boules noires et qui retourne 1 si la boule tirée est noire, et 2 si la boule tirée est blanche.

```
def tirage(b,n):
        r = rd.rand()
        if ...:
                res = 2
        else:
                res = 1
        return(res)
```

(b) Compléter la fonction suivante, qui effectue l'expérience étudiée avec une urne contenant initialement b boules blanches, n boules noires et qui ajoute éventuellement c boules après le premier tirage, selon le choix de la variante dont le numéro est `variante`.
Les paramètres de sortie sont :

- `x` : une simulation de la variable aléatoire X
- `y` : une simulation de la variable aléatoire Y

```
def experience(b,n,c,variante):
        x=tirage(b,n)
        if variante == 1:
                if x==1:
                        ...
                else:
                        ...
        elif variante == 2:
                ...
                ...
                ...
                ...
        y=tirage(b,n)
        return([x,y])
```

(c) Compléter la fonction suivante, qui simule l'expérience N fois (avec $N \in \mathbb{N}^*$), et qui estime la loi de X, la loi de Y et la loi du couple (X, Y).
Les paramètres de sortie sont :

- `loiX` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime [P(X=1), P(X=2)]
- `loiY` : un tableau unidimensionnel à deux éléments qui estime [P(Y=1), P(Y=2)]

- `loiXY` : un tableau bidimensionnel à deux lignes et deux colonnes qui estime :

$$\begin{bmatrix} P([X=1]\cap[Y=1]) & P([X=1]\cap[Y=2]) \\ P([X=2]\cap[Y=2]) & P([X=1]\cap[Y=2]) \end{bmatrix}$$

```
def estimation(b,n,c,variante,N):
        loiX=np.zeros(2)
        loiY=np.zeros(2)
        loiXY=np.zeros([2,2])
        for k in range(1,N+1):
                [x,y]=experience(b,n,c,variante)
                loiX[x]=loiX[x]+1
                ...
                ...
        loiX=loiX/N
        loiY=loiY/N
        loiXY=loiXY/N
        return([loiX,loiY,loiXY])
```

(d) On exécute notre fonction précédente avec $b = 1$, $n = 2$, $c = 1$, $N = 10000$ et dans chacune des variantes. On obtient :

```
--> estimation(1,2,1,1,10000)
 [array([0.66622,0.33378]), array([0.66534,0.33466],

  array([[0.49837,0.16785],[0.16697,0.16681]])]

--> estimation(1,2,1,2,10000)
[array([0.66544,0.33456]),array([0.58289,0.41711]),

array([[0.33258,0.33286],[0.25031,0.08425]])

--> estimation(1,2,1,3,10000)
[array([0.66564,0.33436]),array([0.66778,0.33222]),

array([[0.44466,0.22098],[0.22312,0.11124]])
```

En étudiant ces résultats, émettre des conjectures quant à l'indépendance et l'échangeabilité de X et Y dans chacune des variantes.
On donne les valeurs numériques approchées suivantes :

- $0.33 \times 0.33 \simeq 0.11$
- $0.33 \times 0.41 \simeq 0.14$
- $0.33 \times 0.58 \simeq 0.19$
- $0.33 \times 0.66 \simeq 0.22$
- $0.41 \times 0.66 \simeq 0.27$
- $0.58 \times 0.66 \simeq 0.38$
- $0.66 \times 0.66 \simeq 0.44$

4. On se place dans cette question dans le cadre de la variante 1.
   (a) Donner la loi de X.
   (b) Déterminer la loi du couple (X, Y).
   (c) Déterminer la loi de Y.
   (d) Montrer que X et Y sont échangeables mais ne sont pas indépendantes.

Exercice n°2

On souhaite étudier dans ce problème l'équation différentielle linéaire d'ordre 3 :

$$(E) : \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = (-12t + 5)\mathrm{e}^{2t}$$

d'inconnue φ une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.
On note (E_0) l'équation différentielle homogène associée :

$$(E_0) : \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = 0$$

Partie I : Étude d'une matrice

On pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

1. (a) On exécute le script Python suivant :

```
I = np.eye(3)
A = np.array([[0,1,0],[0,0,1],[2,1,-2]])
B = np.dot(A-I, A+I)
C = np.dot(B, A+2*I)
print(C)
```

   et il renvoie :

```
array([[0, 0, 0],[0, 0 , 0],[0, 0, 0]])
```

   Que peut-on en déduire ?

   (b) Donner les valeurs propres possibles de A.

2. (a) Déterminer $\mathrm{Sp}(A)$ et une base de chacun des sous-espaces propres de A.

   (b) Justifier que A est diagonalisable puis expliciter une matrice $P \in \mathcal{M}_3$ inversible, dont la première ligne est $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, et une matrice $D \in \mathcal{M}_3$ diagonale, dont les coefficients diagonaux sont dans l'ordre croissant, qui vérifient $A = PDP^{-1}$.

Partie II : Calcul des solutions générales de (E)

On note S l'ensemble des solutions de (E) et S_0 l'ensemble des solutions de (E_0).

On note $X : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \varphi'(t) \\ \varphi''(t) \end{pmatrix}$ où φ est une fonction trois fois dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. Montrer que φ est solution de (E_0) si et seulement si $X' = AX$.

4. (a) Déterminer les solutions générales du système différentiel linéaire $X' = AX$. (On utilisera les notations C_1, C_2 et C_3 pour nommer les constantes indéterminées)

   (b) Expliciter l'ensemble S_0.

5. (a) Déterminer deux réels a et b tels que la fonction $g : t \mapsto (at + b)\mathrm{e}^{2t}$ soit solution particulière de (E). (On commencera par calculer et mettre sous forme factorisée $g'(t), g''(t)$ et $g'''(t)$.)

   (b) Montrer que φ est solution de (E) si et seulement si $\varphi - g$ est solution de (E_0), où g est la solution particulière déterminée à la question précédente.

   (c) En déduire l'ensemble S.

Partie III : Etude d'une famille de problèmes de Cauchy

On s'intéresse dans cette partie aux problèmes de Cauchy de la forme :

$$(P_{u,v}) : \begin{cases} \varphi''' + 2\varphi'' - \varphi' - 2\varphi = (-12t+5)\mathrm{e}^{2t} \\ \varphi(0) = 1 \\ \varphi'(0) = u \\ \varphi''(0) = v \end{cases} \qquad \text{où } (u,v) \in \mathbb{R}^2.$$

6. Soit $(u,v) \in \mathbb{R}^2$.
   (a) Montrer qu'il existe une unique solution au problème de Cauchy $(P_{u,v})$ et qu'il s'agit de la fonction : $\varphi_{u,v} : t \mapsto \left(\frac{1}{3}v - 1\right)\mathrm{e}^{-2t} + \left(-\frac{1}{2}u - \frac{1}{2}v + \frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{-t} + \left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{6}v - \frac{5}{2}\right)\mathrm{e}^{t} + (-t+2)\mathrm{e}^{2t}$
   (b) Calculer $\lim\limits_{t \to +\infty} \varphi_{u,v}(t)$.
7. (a) Expliciter, pour tout $t \geq 0, \varphi_{0,1}(t)$.
   (b) En déduire une fonction Python, d'en-tête def phi (t), qui prend en entrée un réel $t \geq 0$ et renvoie le réel $\varphi_{0,1}(t)$.
   (c) Dire, parmi les quatre représentations graphiques de fonctions ci-dessous, laquelle correspond au graphe de $\varphi_{0,1}$. On expliquera son raisonnement en notant ψ_i la fonction associée au tracé numéro i.

Figure 1

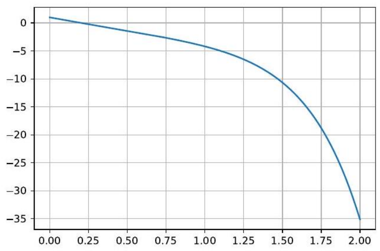


Figure 3

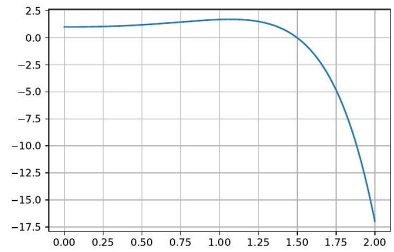


Figure 2

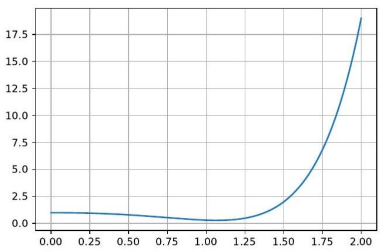
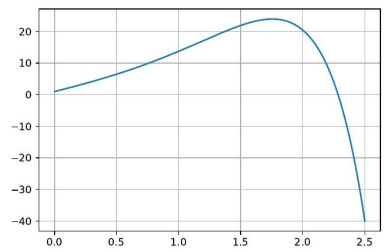


Figure 4



   (d) Montrer : $\varphi_{0,1}(2) = \mathrm{e}^2\left(\frac{6-7\mathrm{e}^4}{3\mathrm{e}^4} - \frac{2}{3}\mathrm{e}^{-6}\right)$. En déduire qu'il existe $t \in]\,0,2\,[$ tel que $\varphi_{0,1}(t) = 0$.
   (e) Recopier et compléter la fonction en langage Python suivante, prenant en entrée un réel strictement positif eps, et renvoyant une valeur approchée d'un zéro de la fonction $\varphi_{0,1}$ à eps près en appliquant l'algorithme de dichotomie.

```
def dichotomie(eps):
    a = 0
    b =...
    while ...:
        c=(a+b)/2
        if ...
            b = ...
        else:
              ...
    return ...
```

Partie IV : Étude d'une fonction de deux variables - Partie réservée aux cubes

On considère le fermé $F = [0,1]^2$ et l'ouvert $U =]0,1[^2$.
On note f la fonction de deux variables définie sur F par :

$$\forall (x,y) \in F, f(x,y) = \varphi_{x,y}(1)$$

(On s'intéresse ici à l'évolution au temps 1 des solutions des problèmes de Cauchy étudiés à la partie précédente.)

8. Représenter l'ouvert U ainsi que le bord de F sur un même graphique, dans un repère orthonormé.
9. Montrer qu'il existe trois constantes α, β et γ (que l'on explicitera) telles que :

$$\forall (x,y) \in F, f(x,y) = \alpha x + \beta y + \gamma$$

10. Démontrer que f admet un maximum global sur F.
11. (a) Justifier que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur U.

    (b) La fonction f admet-elle des points critiques sur U ? Si oui, les donner.

    (c) En déduire que le maximum global de f sur F ne peut pas être atteint sur U. (Il est donc nécessairement atteint sur le bord de F.)
12. (a) Montrer : $\alpha > 0$ et $\beta > 0$.

    (b) En déduire que le maximum global de f sur F est atteint en un unique point (x_0, y_0) dont on explicitera les coordonnées.

    (c) Parmi les deux tracés de lignes de niveaux ci-dessous, lequel correspond à la fonction f ?

Figure 5

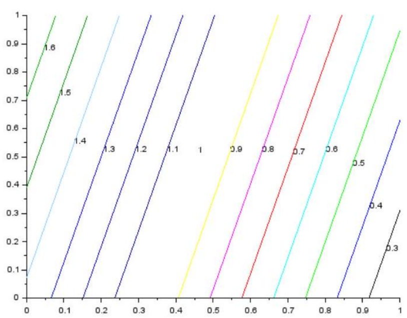
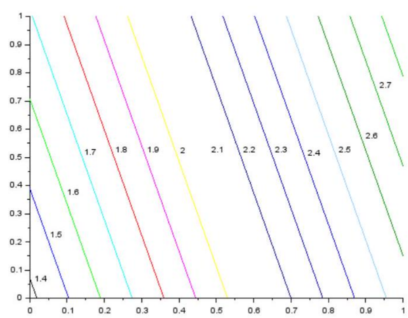


Figure 6



Exercice n°3

Partie 1 : propriété d'une loi de probabilité

On désigne par c un réel strictement positif et on considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{c}{x^{1+c}} & \text{si } x \geqslant 1 \\ 0 & \text{si } x < 1 \end{cases}$$

1. Montrer que f peut être considérée comme une densité.
   On considère dans la suite une variable aléatoire X de densité f et on note F sa fonction de répartition. On dit que X suit la loi de Pareto de paramètre c.
2. Déterminer, pour tout réel x, l'expression de $F(x)$ en fonction de x et c.
3. Soit t un réel strictement supérieur à 1.
   (a) Déterminer, en distinguant les cas $x \geqslant 1$ et $x < 1$, la probabilité conditionnelle $P_{(X>t)}(X \leqslant tx)$.
   (b) En déduire que la loi de $\dfrac{X}{t}$, conditionnellement à l'événement $(X > t)$, est la loi de X.

Partie 2 : réciproque de la propriété précédente

On considère une variable aléatoire Y de densité g nulle sur $]-\infty;1[$, strictement positive et continue sur $[1;+\infty[$. On pose $c = g(1)$ et on note G la fonction de répartition de Y.
Dans toute la suite, on suppose que, pour tout réel t strictement supérieur à 1, on a :

- $P(Y > t) > 0$
- La loi de $\dfrac{Y}{t}$, conditionnellement à l'événement $(Y > t)$, est la loi de Y.

On veut alors montrer que Y suit la loi de Pareto de paramètre c.

4. Justifier que $G(1) = 0$.
5. (a) Établir l'égalité :
   $$\forall x \geqslant 1, \forall t > 1, \quad G(x) = \frac{G(tx) - G(t)}{1 - G(t)}$$
   (b) Justifier que G est de la classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1;+\infty[$ et en déduire que :
   $$\forall x > 1, \forall t > 1, \quad G'(x) = \frac{tG'(tx)}{1 - G(t)}$$
   (c) Montrer enfin la relation :
   $$\forall t > 1, \quad G(t) + \frac{t}{c}G'(t) = 1$$
6. Dans cette question, la lettre y désigne une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1;+\infty[$ qui, à tout réel t de $]1;+\infty[$, associe $y(t)$.
   On note (E_1) l'équation différentielle $y + \dfrac{t}{c}y' = 0$ et (E_2) l'équation différentielle $y + \dfrac{t}{c}y' = 1$.
   Il convient de noter que ces équations différentielles ne sont pas à coefficients constants.
   (a) Soit z la fonction définie par $z(t) = t^c y(t)$. Montrer que y est solution de l'équation différentielle (E_1) si, et seulement si, z est constante sur $]1;+\infty[$.
   (b) En notant K la constante évoquée à la question 6.(a), donner toutes les solutions de (E_1).
   (c) Trouver une fonction u, constante sur $]1;+\infty[$, et solution de l'équation différentielle (E_2).

(d) Montrer l'équivalence : h est solution de $(E_2) \Longleftrightarrow h - u$ est solution de (E_1).

(e) En déduire que les solutions de l'équation différentielle (E_2) sont les fonctions h définies par :

$$\forall t > 1, \quad h(t) = 1 + \frac{K}{t^c}$$

7. (a) Montrer finalement que l'on a :

$$\forall t > 1, \quad G(t) = 1 - \frac{1}{t^c}$$

(b) Vérifier que cette relation s'étend à $[1; +\infty[$ puis conclure quant à la loi de Y.

Partie 3 : simulation d'une variable suivant la loi de Pareto de paramètre c

8. On pose $Z = \ln(X)$ et on admet que Z est une variable aléatoire définie sur le même espace probabilisé que X. On note H sa fonction de répartition.

   (a) Pour tout réel x, exprimer $H(x)$ à l'aide de la fonction F.

   (b) En déduire que Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

   (c) Écrire une fonction `Python` d'en-tête `def simulX(c)` et permettant de simuler X.