Fonctions de deux variables

I. Correction des exercices 4 et 7

1. La fonction est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)\left(x_0,y_0\right) = y \qquad \partial_2(f)\left(x_0,y_0\right) = x$$

Donc le gradient vaut

$$\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

Le développement limité à l'ordre 1 en (x_0, y_0) est donné par la formule

$$f\left(x_0+h, y_0+k\right) = f\left(x_0,y_0\right) + {}^t\nabla(f)\left(x_0,y_0\right) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right).$$

- Développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$:

$$f\left(h,k\right) = f\left(0,0\right) + {}^t\nabla(f)\left(0,0\right) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right). = 0 + 0h + 0k + o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right)$$

- Développement limité à l'ordre 1 en $(1,2)$:

$$f\left(1+h,2+k\right) = f\left(1,2\right) + {}^t\nabla(f)\left(1,2\right) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right). = 2 + 2h + k + +o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right).$$

Les dérivées partielles secondes valent

$$\begin{array}{ll} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 0 & \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 1 \\ \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = 1 & \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = 0 \end{array}$$

Donc la matrice Hessienne au point $(1,1)$ vaut

$$\nabla^2(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2. La fonction est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)\left(x_0,y_0\right) = 2x \qquad \partial_2(f)\left(x_0,y_0\right) = 2y$$

Donc le gradient vaut

$$\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}$$

- Développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$:

$$f\left(h,k\right) = f\left(0,0\right) + {}^t\nabla(f)\left(0,0\right) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right). = 0 + 0h + 0k + o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right)$$

- Développement limité à l'ordre 1 en $(1,2)$:

$$f\left(1+h,2+k\right) = f\left(1,2\right) + {}^t\nabla(f)\left(1,2\right) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right). = 5 + 2h + 4k + o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right).$$

Les dérivées partielles secondes valent

$$\begin{array}{ll} \partial_{1,1}^2(f)(x,y) = 2 & \partial_{2,2}^2(f)(x,y) = 0 \\ \partial_{1,2}^2(f)(x,y) = 0 & \partial_{2,1}^2(f)(x,y) = 2 \end{array}$$

Donc la matrice Hessienne au point $(1,1)$ vaut

$$\nabla^2(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3. La fonction est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)\,(x_0,y_0) = 2x + y \qquad \partial_2(f)\,(x_0,y_0) = -2y + x$$

Donc le gradient vaut

$$\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2x + y \\ -2y + x \end{pmatrix}$$

- Développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$:

$$f\,(h,k) = f\,(0,0) + {}^t\nabla(f)\,(0,0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right). = 0 + 0h + 0k + o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right)$$

- Développement limité à l'ordre 1 en $(1,2)$:

$$f\,(1+h,2+k) = f\,(1,2) + {}^t\nabla(f)\,(1,2) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right). = -1 + 4h - 3k + o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right).$$

Les dérivées partielles secondes valent

$$\begin{array}{ll} \partial_{1,1}^2(f)(x,y) = 2 & \partial_{2,2}^2(f)(x,y) = 1 \\ \partial_{1,2}^2(f)(x,y) = 1 & \partial_{2,1}^2(f)(x,y) = -2 \end{array}$$

Donc la matrice Hessienne au point $(1,1)$ vaut

$$\nabla^2(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

4. La fonction est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)\,(x_0,y_0) = 2xy^2 + y^3 \qquad \partial_2(f)\,(x_0,y_0) = 2yx^2 + 3xy^2$$

Donc le gradient vaut

$$\nabla(f)(x,y) = \begin{pmatrix} 2xy^2 + y^3 \\ 2yx^2 + 3xy^2 \end{pmatrix}$$

- Développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$:

$$f\,(h,k) = f\,(0,0) + {}^t\nabla(f)\,(0,0) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right). = 0 + 0h + 0k + o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right)$$

- Développement limité à l'ordre 1 en $(1,2)$:

$$f\,(1+h,2+k) = f\,(1,2) + {}^t\nabla(f)\,(1,2) \cdot \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} + o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right). = 12 + 16h + 16k + o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right).$$

Les dérivées partielles secondes valent

$$\begin{array}{ll} \partial_{1,1}^2(f)(x,y) = 2y^2 & \partial_{2,2}^2(f)(x,y) = 4yx + 3y^2 \\ \partial_{1,2}^2(f)(x,y) = 4yx + 3y^2 & \partial_{2,1}^2(f)(x,y) = 2x^2 + 6yx \end{array}$$

Donc la matrice Hessienne au point $(1,1)$ vaut

$$\nabla^2(f)(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 7 & 8 \end{pmatrix}$$

5. La fonction $(x,y)\mapsto 1+x^2+y^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale et elle ne s'y annule jamais. Donc par quotient, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)\,(x_0,y_0)=\frac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2}\qquad \partial_2(f)\,(x_0,y_0)=\frac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2}$$

Donc le gradient vaut

$$\nabla(f)(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{-2x}{(1+x^2+y^2)^2}\\ \dfrac{-2y}{(1+x^2+y^2)^2}\end{pmatrix}$$

- Développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$:

$$f\,(h,k)=f\,(0,0)+{}^t\nabla(f)\,(0,0)\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right).=1+0h+0k+o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right)$$

- Développement limité à l'ordre 1 en $(1,2)$:

$$f\,(1+h,2+k)=f\,(1,2)+{}^t\nabla(f)\,(1,2)\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right)=\frac{1}{6}-\frac{1}{18}h-\frac{1}{9}k+o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right).$$

Les dérivées partielles secondes valent :

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y)=\frac{-2(1+x^2+y^2)^2-(-2x)\times 2(2x)(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^4}=\frac{-2-2x^2-2y^2+8x^2}{(1+x^2+y^2)^3}=\frac{-2+6x^2-2y^2}{(1+x^2+y^2)^3}$$
$$\partial^2_{2,2}(f)(x,y)=\frac{-2(1+x^2+y^2)^2-(-2y)\times 2(2y)(1+x^2+y^2)}{(1+x^2+y^2)^4}=\frac{-2-2x^2-2y^2+8x^2}{(1+x^2+y^2)^3}=\frac{-2-2x^2+6y^2}{(1+x^2+y^2)^3}$$
$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y)=\partial^2_{2,1}(f)(x,y)=\frac{(-2x)(-2(2y))}{(1+x^2+y^2)^3}=\frac{8xy}{(1+x^2+y^2)^3}$$

Donc la matrice Hessienne au point $(1,1)$ vaut

$$\nabla^2(f)(1,1)=\frac{1}{27}\begin{pmatrix}2&8\\8&2\end{pmatrix}$$

6. La fonction $(x,y)\mapsto 1+x^2+y^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale et elle est y strictement positive. Donc par composition, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)\,(x_0,y_0)=\frac{2x}{1+x^2+y^2}\qquad \partial_2(f)\,(x_0,y_0)=\frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

Donc le gradient vaut

$$\nabla(f)(x,y)=\begin{pmatrix}\dfrac{2x}{1+x^2+y^2}\\ \dfrac{2y}{1+x^2+y^2}\end{pmatrix}$$

- Développement limité à l'ordre 1 en $(0,0)$:

$$f\,(h,k)=f\,(0,0)+{}^t\nabla(f)\,(0,0)\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right).=0+0h+0k+o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right)$$

- Développement limité à l'ordre 1 en $(1,2)$:

$$f\,(1+h,2+k)=f\,(1,2)+{}^t\nabla(f)\,(1,2)\cdot\begin{pmatrix}h\\k\end{pmatrix}+o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right)=\ln(5)+\frac{1}{3}h+\frac{2}{3}k+o\left(d\left((h,k),0_{\mathbb{R}^2}\right)\right).$$

Les dérivées partielles secondes valent :

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y)=\frac{2(1+x^2+y^2)-(2x)\times(2x)}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{2+2x^2+2y^2-4x^2}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{2-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$
$$\partial^2_{2,2}(f)(x,y)=\frac{2(1+x^2+y^2)-(2y)\times(2y)}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{2+2x^2+2y^2-4x^2}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{2+2x^2-2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$
$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y)=\partial^2_{2,1}(f)(x,y)=\frac{(2x)(-2y)}{(1+x^2+y^2)^2}=\frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

Donc la matrice Hessienne au point $(1,1)$ vaut

$$\nabla^2(f)(1,1)=\frac{1}{9}\begin{pmatrix}2&-4\\-4&2\end{pmatrix}$$

II. Correction des exercices 3 et 8

1. La fonction est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)\,(x_0,y_0) = 1 \qquad \partial_2(f)\,(x_0,y_0) = 0$$

   Les dérivées partielles secondes valent

$$\begin{array}{ll} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 0 & \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 0 \\ \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = 0 & \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = 0 \end{array}$$

2. La fonction est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)\,(x_0,y_0) = 0 \qquad \partial_2(f)\,(x_0,y_0) = 1$$

   Les dérivées partielles secondes valent

$$\begin{array}{ll} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 0 & \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 0 \\ \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = 0 & \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = 0 \end{array}$$

3. La fonction est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)\,(x_0,y_0) = 1 \qquad \partial_2(f)\,(x_0,y_0) = 1$$

   Les dérivées partielles secondes valent

$$\begin{array}{ll} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 0 & \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 0 \\ \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = 0 & \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = 0 \end{array}$$

4. La fonction est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)\,(x_0,y_0) = 2x \qquad \partial_2(f)\,(x_0,y_0) = -3y^2$$

   Les dérivées partielles secondes valent

$$\begin{array}{ll} \partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 2 & \partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 0 \\ \partial^2_{1,2}(f)(x,y) = 0 & \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = -3 \end{array}$$

5. La fonction $(x,y) \mapsto 1 + x^2 + y^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale et elle est y strictement positive. Donc par composition, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)\,(x_0,y_0) = \frac{2x}{1+x^2+y^2} \qquad \partial_2(f)\,(x_0,y_0) = \frac{2y}{1+x^2+y^2}$$

   Les dérivées partielles secondes valent :

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = \frac{2(1+x^2+y^2) - (2x)\times(2x)}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2+2x^2+2y^2-4x^2}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2-2x^2+2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = \frac{2(1+x^2+y^2) - (2y)\times(2y)}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2+2x^2+2y^2-4x^2}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2+2x^2-2y^2}{(1+x^2+y^2)^2}$$

$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = \frac{(2x)(-2y)}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{-4xy}{(1+x^2+y^2)^2}$$

6. La fonction $(x,y) \mapsto x^2+y^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale et elle est y strictement positive. Donc par composition, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)\,(x_0,y_0) = 2x\exp(x^2+y^2) \qquad \partial_2(f)\,(x_0,y_0) = 2y\exp(x^2+y^2)$$

   Les dérivées partielles secondes valent :

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y) = 2\exp(x^2+y^2) + 2x \times 2x\exp(x^2+y^2) = 2(1+2x^2)\exp(x^2+y^2)$$

$$\partial^2_{2,2}(f)(x,y) = 2\exp(x^2+y^2) + 2y \times 2y\exp(x^2+y^2) = 2(1+2y^2)\exp(x^2+y^2)$$

$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y) = \partial^2_{2,1}(f)(x,y) = 4xy\exp(x^2+y^2)$$

7. La fonction $(x,y)\mapsto e^x+y$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale et elle est y strictement positive. Donc par composition, f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$.

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)\,(x_0,y_0)=e^x\exp(e^x+y)\qquad \partial_2(f)\,(x_0,y_0)=\exp(e^x+y)$$

Les dérivées partielles secondes valent :

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y)=e^x\exp(e^x+y)+e^x\times e^x\exp(e^x+y)=\exp(e^x+y)e^x(1+e^x)$$
$$\partial^2_{2,2}(f)(x,y)=\exp(e^x+y)$$
$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y)=\partial^2_{2,1}(f)(x,y)=e^x\exp(e^x+y)$$

8. La fonction $(x,y)\mapsto 1+x+y^2$ est de classe C^2 sur $\mathbb{R}^2$ comme fonction polynomiale. Elle est strictement positive sur le domaine $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|y^2>1+x\}$. Donc par composition, f est de classe C^2 sur D .

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)\,(x_0,y_0)=\frac{1}{2\sqrt{1+x+y^2}}\qquad \partial_2(f)\,(x_0,y_0)=\frac{y}{\sqrt{1+x+y^2}}$$

Les dérivées partielles secondes valent :

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y)=\frac{-1}{4(1+x+y^2)^{3/2}}$$
$$\partial^2_{2,2}(f)(x,y)=\frac{(1+x+y^2)^{1/2}-y\times\frac{y}{\sqrt{1+x+y^2}}}{1+x+y^2}=\frac{1+x+y^2-y^2}{(1+x+y^2)^{3/2}}=\frac{1+x}{(1+x+y^2)^{3/2}}$$
$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y)=\partial^2_{2,1}(f)(x,y)=\frac{-y}{2(1+x+y^2)^{3/2}}$$

9. Les fonctions $(x,y)\mapsto x^\alpha$ et $(x,y)\mapsto y^{1-\alpha}$ sont de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$. Donc par produit, f est de classe C^2 sur $(\mathbb{R}_+^*)^2$.

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\ \partial_1(f)\,(x_0,y_0)=\alpha x^{\alpha-1}y^{1-\alpha}\qquad \partial_2(f)\,(x_0,y_0)=(1-\alpha)y^{-\alpha}$$

Les dérivées partielles secondes valent :

$$\partial^2_{1,1}(f)(x,y)=\alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}y^{1-\alpha}$$
$$\partial^2_{2,2}(f)(x,y)=-\alpha(1-\alpha)x^\alpha y^{-\alpha-1}$$
$$\partial^2_{1,2}(f)(x,y)=\partial^2_{2,1}(f)(x,y)=\alpha(1-\alpha)x^{\alpha-1}y^{-\alpha}$$