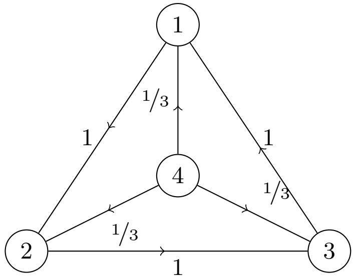
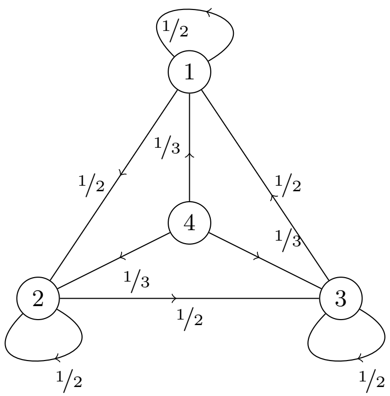
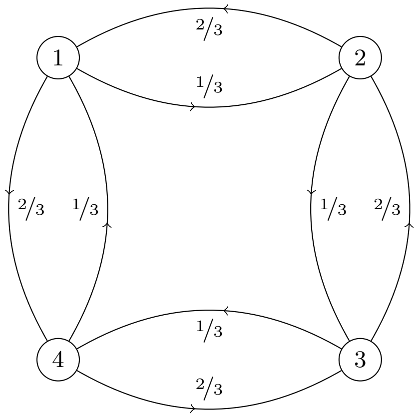
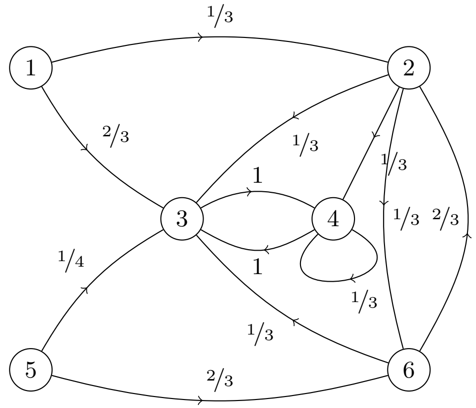
Exercice 1 — Du graphe à la matrice de transition

Dans chacun des cas suivants vérifier si le graphe donné est un graphe probabiliste et si oui donner la matrice de transition associée.

1. 

2. 

3. 

4. 

Exercice 2 — De la matrice de transition au graphe.

Dans chaque cas vérifier si la matrice est bien une matrice de transition et si oui tracer le graphe probabiliste associé.

1. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

2. $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/3 & 1/2 & 1 \\ 1/4 & 1/3 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. $\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

5. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. $\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 3 — Matrice identité

La matrice I_r avec r un entier naturel non nul est elle une matrice de transition ? Quel est le graphe probabiliste associé ?

Exercice 4 — État stable

Calculer les états stables des chaînes de Markov décrites dans les exercices précédents, dans le cas où le nombre de sommet n'excède pas 4.

Problèmes

Exercice 5 — Chaînes de Markov à deux états

Soit α et β deux réels de $[0;1]$. On note $A = \begin{pmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ \beta & 1-\beta \end{pmatrix}$

1. Vérifier que la matrice précédente est une matrice de transition et tracer le graphe associé.
2. **cas particuliers** Que se passe t'il si $\alpha = 0$. Si $\alpha = 1$?.
   On suppose dans la suite que $\alpha \in]0;1[$ et $\beta \in]0;1[$
3. Soit x et y deux réels. Montrer que $\begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} A$ si et seulement si $\beta y = \alpha x$
4. en déduire l'unique état stable de la chaîne de Markov.
5. **diagonalisation de** A
   On note $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ -\beta & 1 \end{pmatrix}$. Calculer PQ et en déduire que P est inversible et l'expression de P^{-1}
6. Calculer $D = PAP^{-1}$.
7. Montrer que $A^n = P^{-1}D^nP$ et et déduire une expression de A^n.
8. En reprenant les notations du cours calculer une expression de U_n l'état n en fonction de n ,α et β et de U_0 l'état initial.
9. calculer la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 6

On appelle **vecteur de probabilité** une matrice ligne $p = \begin{pmatrix} p_1 & p_2 & \cdots & n \end{pmatrix}$ dont tous les coefficients sont positifs et dont la somme des coefficients vaut 1.

1. Formaliser cette définition.
2. Montrer que si p est un vecteur de probabilité alors tous ces coefficients sont inférieurs ou égal à 1. Peut on avoir un coefficient égal à 1 ?
3. Soit M une matrice de transition. Montrer que pM est une vecteur de probabilité.

Exercice 7

Une personne commande son dîner en ligne une fois par semaine, sur trois plateformes différentes numérotées de 1 à 3 de manière aléatoire selon le protocole suivant :

— La première semaine, chaque plateforme a la même probabilité d'être choisie ;

— La plateforme 1 étant la meilleure mais la plus chère, elle ne commande jamais deux fois de suite sur celle-ci ;

— Si elle commande une certaine semaine via la plateforme 1, elle commandera la semaine suivante sur 2 ou 3 avec autant de chance ;

— Si elle commande une certaine semaine via 2 ou 3 , il y a une chance sur deux qu'elle change de plateforme la semaine suivante et dans ce cas, autant de chance de choisir une des deux autres.

On note, pour $n \in \mathbb{N}^*, X_n$ la variable aléatoire qui prend pour valeur le numéro de la plateforme choisie lors de la n-ième commande. On note, pour $n \in \mathbb{N}^*, V_n$ le n-ième état probabiliste de la chaîne, c'est à dire le vecteur ligne de $\mathcal{M}_{1,3}(\mathbb{R})$ défini par $V_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 1) & P(X_n = 2) & P(X_n = 3) \end{pmatrix}$.

1. (a) Quelle est la loi de X_1 ? Préciser son espérance et sa variance.
   (b) Proposer une instruction Python permettant de simuler X_1.
2. Représenter le graphe ainsi que la matrice de transition A associés à la chaîne (X_n).
3. Justifier soigneusement, en citant les résultats utilisés, que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$V_{n+1} = V_n A$$

4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $V_n = V_1 A^{n-1}$.
5. (a) Vérifier que $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est vecteur propre de ${}^tA$. On précisera la valeur propre associée.
   (b) Les commandes

```python
import numpy as np
import numpy.linalg as al

A=np.array([[0,1/2,1/2],[1/4,1/2,1/4],[1/4,1/4,1/2]])
B=A.transpose()
C=16*al.matrix_power(B,2)-np.eye(3)
print(np.dot (C, B-np.eye(3)))
```

   renvoient

```
>>>
array([[0 ., 0 ., 0],
[0 ., 0 ., 0],
[0 ., 0 ., 0]])
```

En déduire deux autres valeurs propres possibles de ${}^tA$.

(c) Vérifier que les deux valeurs précédentes sont bien valeurs propres de ${}^tA$, puis exhiber, en rédigeant soigneusement, une matrice D diagonale (dont les éléments diagonaux sont rangés dans l'ordre croissant) et une matrice P inversible telles que

$$ {}^tA = PDP^{-1} $$

(d) Inverser P.

(e) Calculer explicitement, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la matrice $\left({}^tA\right)^n$ puis A^n et en déduire la loi de X_n.

(f) Conclure que (X_n) converge en loi vers une variable Z que l'on explicitera. Établir un lien avec le vecteur V.

Exercice 8

On considère la matrice M définie par :

$$ M = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} $$

1. (a) La matrice M est-elle inversible ?

   (b) Montrer que M admet trois valeurs propres $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$ que l'on précisera. Expliciter trois vecteurs U_1, U_2, U_3 tels que, pour tout $i \in [\![1,3]\!], E_{\lambda_i}(M) = \operatorname{Vect}(U_i)$.

   (c) Justifier que la famille (U_1, U_2, U_3) forme une base de $\mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$.

   (d) Déterminer les coordonnées (α, β, γ), dans la base (U_1, U_2, U_3), du vecteur $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Une urne contient une boule rouge et deux boules blanches. On effectue dans cette urne une succession de tirages d'une boule selon le protocole suivant :

— si la boule tirée est rouge, elle est remise dans l'urne.

— si la boule tirée est blanche, elle n'est pas remise dans l'urne.

Pour tout entier i supérieur ou égal à 1 , on note B_i (respectivement R_i) l'événement "on obtient une boule blanche (respectivement une boule rouge) lors du $i^{\text{ème}}$ tirage". Pour tout entier n supérieur ou égal à 1 , on note X_n le nombre de boules blanches contenues dans l'urne à l'issue du $n^{\text{ème}}$ tirage et on pose $X_0 = 2$. On admet que (X_n) est une chaîne de Markov à 3 états (notés ici 0,1 et 2) et on note V_n son n-ième état probabiliste.

On note enfin T_1 le numéro du tirage où l'on extrait pour la première fois une boule blanche et T_2 le numéro du tirage où l'on extrait la dernière boule blanche.

2. (a) Représenter le graphe probabiliste auquel la chaîne (X_n) est associée et préciser la matrice de transition A de celui-ci. Exprimer A en fonction de M.

   (b) Justifier rigoureusement que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_{n+1} = V_n A$.

   (c) Montrer que, pour tout entier naturel n, l

$$ V_n = \alpha\, {}^tU_1 + \beta\left(\frac{1}{2}\right)^n {}^tU_2 + \gamma\left(\frac{1}{3}\right)^n {}^tU_3 $$

   où α, β, γ sont les réels trouvés à la Question (1d).

   (d) Donner la loi de la variable X_n.

3. Calculer $E(X_n)$, espérance de X_n, ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Reconnaître la loi de T_1.

5. Écrire les événements $[T_2 = 2]$ et $[T_2 = 3]$ à l'aide de certains des événements B_i et en déduire les valeurs des probabilités $P[T_2 = 2]$ et $P[T_2 = 3]$.

6. (a) Pour tout entier n supérieur ou égal à 2, écrire l'événement $[T_2 = n]$ en fonction des événements $[X_{n-1} = 1]$ et $[X_n = 0]$.

   (b) En déduire que pour tout entier n supérieur ou égal à 2 , on a :

$$ P[T_2 = n] = 2\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\right] $$

   (c) Monter que la variable aléatoire T_2 admet une espérance et calculer $E(T_2)$.

Exercice 9 — EDHEC 2017

Les sommets d'un carré sont numérotés 1,2,3 et 4 de telle façon que les côtés du carré relient le sommet 1 au sommet 2 , le sommet 2 au sommet 3 , le sommet 3 au sommet 4 et le sommet 4 au sommet 1 .

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets de ce carré selon le protocole suivant :

— Au départ, c'est-à-dire à l'instant 0 , le mobile se trouve sur le sommet 1 .

— Lorsque le mobile est à un instant donné sur un sommet, il se déplace à l'instant suivant sur l'un quelconque des trois autres sommets, et ceci de façon équiprobable.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note X_n la variable aléatoire égale au numéro du sommet sur lequel se situe le mobile à l'instant n. D'après les deux points précédents, on a donc $X_0 = 1$.

1. Donner la loi de X_1, ainsi que l'espérance de la variable aléatoire X_1.

   On admet pour la suite que la loi de X_2 est donnée par

$$ P(X_2 = 1) = \frac{1}{3} \quad P(X_2 = 2) = P(X_2 = 3) = P(X_2 = 4) = \frac{2}{9} $$

2. Pour tout entier supérieur ou égal à 2, donner, en justifiant, l'ensemble des valeurs prises par X_n.

3. (a) Utiliser la formule des probabilités totales pour établir que, pour tout entier n supérieur ou égal à 2 , on a

$$P(X_{n+1}=1)=\frac{1}{3}\left(P(X_n=2)+P(X_n=3)+P(X_n=4)\right).$$

(b) Vérifier que cette relation reste valable pour $n=0$ et $n=1$.

(c) Justifier que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $P(X_n=1)+P(X_n=2)+P(X_n=3)+P(X_n=4)=1$ et en déduire l'égalité, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_{n+1}=1)=-\frac{1}{3}P(X_n=1)+\frac{1}{3}$$

(d) Établir alors que, pour tout $n \in \mathbb{N}, P(X_n=1)=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

4. (a) En procédant comme à la question précédente, montrer que l'on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_{n+1}=2)=\frac{1}{3}\left(P(X_n=1)+P(X_n=3)+P(X_n=4)\right).$$

(b) En déduire une relation entre $P(X_{n+1}=2)$ et $P(X_n=2)$.

(c) Montrer enfin que pour tout $n \in \mathbb{N}, P(X_n=2)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$.

5. On admet enfin que pour tout entier naturel n, on a

$$P(X_{n+1}=3)=-\frac{1}{3}P(X_n=3)+\frac{1}{3}; \quad \text{et} \quad P(X_{n+1}=4)=-\frac{1}{3}P(X_n=4)+\frac{1}{3}.$$

En déduire sans calcul que, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$P(X_n=3)=P(X_n=4)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

6. Déterminer, pour tout entier naturel n, l'espérance $E(X_n)$ de la variable aléatoire X_n.

7. Pour tout n de $\mathbb{N}$, on considère la matrice ligne de $\mathcal{M}_{1,4}(\mathbb{R})$

$$U_n=\left(P(X_n)=1 \quad P(X_n=2) \quad P(X_n=3) \quad P(X_n=4)\right)$$

(a) Montrer, grâce à certains résultats obtenus ci-avant, que, si l'on pose

$$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1}=U_n A$$

(b) Établir par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n=U_0 A^n$.

(c) En déduire la première ligne de A^n.

8. Expliquer comment choisir la position du mobile au départ pour trouver les trois autres lignes de la matrice A^n, puis écrire ces trois lignes.

Exercice 10 — D'après HEC 2003

On dispose de deux jetons A et B que l'on peut placer dans deux cases C_1 et C_2, et d'un dispositif permettant de tirer au hasard et de manière équiprobable, l'une des lettre a, b ou c. Au début de l'expérience, les deux jetons sont placés dans C_1. On procède alors à une série de tirages indépendants de l'une des trois lettres a, b ou c.

À la suite de chaque tirage, on effectue l'opération suivante

— Si on tire la lettre a, on change le jeton A de case ;

— Si on tire la lettre b, on change le jeton B de case ;

— Si on tire la lettre c, les positions des deux jetons restent inchangées.

Partie I - Étude du mouvement du jeton A On introduit les variables X_n (respectivement Y_n) qui valent 1 si à l'issue de la n-ième expérience, le jeton A (resp. le jeton B) est dans la case C_1 et 2 si il est dans la case C_2.

Naturellement, $X_0=Y_0=1$.

1. On introduit la matrice $M=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

   Justifier que M est diagonalisable.

   (b) Déterminer les valeurs propres de M et une matrice $P \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ inversible telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.

   (c) En déduire l'expression de M^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

2. (a) Déterminer la loi de X_1.

   (b) À l'aide d'un système complet d'évènements à préciser, déterminer ensuite une matrice Q telle que

$$\left(P(X_{n+1}=0) \quad P(X_{n+1}=1)\right)=\left(P(X_n=0) \quad P(X_n=1)\right)Q$$

   (c) Expliciter Q^n, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

   (d) En déduire la loi de X_n.

(2) Partie II - Étude du mouvement du couple de jetons (A, B)

On considère maintenant, pour $n \in \mathbb{N}$, la variable aléatoire W_n définie par $W_0=1$ et, à l'issue de la n-ième expérience décrite précédemment :

— Si A et B sont tous deux dans C_1, alors $W_n=1$;

— Si A se trouve dans C_1 et B dans C_2, alors $W_n = 2$;
— Si A se trouve dans C_2 et B dans C_1, alors $W_n = 3$;
— Si A et B sont tous deux dans $C_2, W_n = 4$.

1. Déterminer la loi de W_1.
2. On admet que (W_n) est une chaîne de Markov à 4 états et on note V_n son n-ième état probabiliste. Représenter le graphe et la matrice de transition A auxquels elle est associée. On a notamment, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$V_{n+1} = V_n A$$

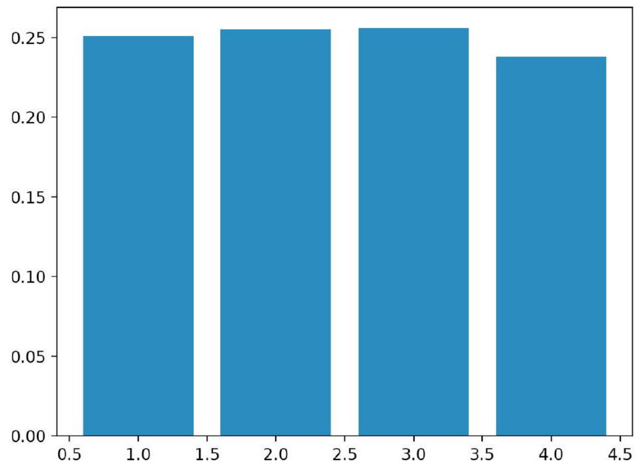
3. Montrer que 1 est valeur propre de ${}^tA$. Déterminer un vecteur propre de ${}^tA$, associé à la valeur propre 1 dont la somme des composantes est égale à 1 .
4. Compléter la fonction Python pour qu'elle renvoie une simulation de W_n

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def simul_W(n):
        A=np.array(...)
        w=0
        n=len(A)
        for m in range(k):
                r=rd.random()
                i=w
                p=0
                for j in range(n):
                        if p<=r and r<p+A[i,j]:
                                w=...
                        p=p+A[i,j]
        return(w+1)
```

5. On écrit le script suivant dont les résultats d'exécution sont affichés ci-dessous import matplotlib.pyplot as plt

```
S=np.zeros(4)
for m in range(1000):
        j=simul_W(100)
        S[j-1]+=1
S=[S[i]/1000 for i in range(4)]
plt.bar([1,2,3,4],S)
plt.show()
```



Interpréter ce résultat. Quel est le lien avec la Question (2c) ?

Exercice 11 — HEC 2008

Dans tout l'exercice N désigne un entier naturel fixé supérieur ou égal à 2 , et p un réel fixé de l'intervalle $]\,0,1[$ et $q = 1 - p$. Soit n un entier naturel quelconque.

Dans une population de N individus, on s'intéresse à la propagation d'un certain virus.

Chaque jour, on distingue dans cette population trois catégories d'individus : en premier lieu, les individus sains, c'est-à-dire ceux qui ne sont pas porteurs du virus, ensuite les individus qui viennent d'être contaminés et qui sont inoffensifs pour les autres, et enfin, les individus contaminés par le virus et qui sont contagieux.

Ces trois catégories évoluent jour après jour selon le modèle suivant :

— chaque jour n, chaque individu sain peut être contaminé par n'importe lequel des individus contagieux ce jour avec la même probabilité p, ces contaminations éventuelles étant indépendantes les unes des autres ;
— un individu contaminé le jour n devient contagieux le jour $n + 1$;
— chaque individu contagieux le jour n redevient sain le jour $n + 1$.

On note alors X_n le nombre aléatoire d'individus contagieux le jour n. On remarquera que si, pour un certain entier naturel i, on a $X_i = 0$, alors on a aussi $X_{i+1} = 0$.

On va dans cet exercice [2] ne traiter que le cas $N = 3$ et $p = 1/3$.

0. [2] Dans le sujet original dont cet exercice est extrait, on traitait également le cas général

On considère les matrices S et R suivantes :

$$S = \begin{pmatrix} 9 & 4 & 4 & 9 \\ 0 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -6 & 1 \\ 1 & 0 & 5 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. (a) Montrer que la matrice R est inversible et calculer son inverse R^{-1}.
   (b) Montrer que les réels $-1, 0, 5$ et 9 sont des valeurs propres de S.
   (c) Calculer le produit matriciel $R^{-1}SR$.
   (d) En déduire, pour tout n de $\mathbb{N}$ l'expression de la matrice S^n.
2. Soit n un entier fixé de $\mathbb{N}$.
   (a) Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = 0]$.
   (b) Déterminer la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = 3]$.
   (c) Vérifier que la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = 1]$. (resp $[X_n = 2]$) est la loi binomiale de paramètres $\left(2, \frac{1}{3}\right)$ (resp. $\left(1, \frac{5}{9}\right)$).
   (d) Représenter le graphe de la chaîne de Markov (X_n) (dont les états sont 0, 1, 2 et 3).
   (e) On introduit l'espérance conditionnelle, notée $E(X_{n+1} \mid X_n = i)$, qui correspond à l'espérance de la loi de probabilité conditionnelle de X_{n+1} sachant l'événement $[X_n = i]$.
   Déterminer les valeurs respectives de $E(X_{n+1} \mid X_n = 1)$ et $E(X_{n+1} \mid X_n = 2)$.
3. On suppose, uniquement dans cette question, que $X_0 \hookrightarrow \mathcal{B}\left(3, \frac{1}{3}\right)$.
   (a) Déterminer la loi de X_1 et calculer $E(X_1)$.
   (b) Vérifier la formule suivante :

$$E(X_1) = \sum_{i=0}^{3} E(X_1 \mid X_0 = i)\, P([X_0 = i])$$

4. On introduit alors le vecteur ligne U_n, correspondant au n-ième état probabiliste de la chaîne, défini par

$$U_n = \begin{pmatrix} u_n & v_n & w_n & t_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P([X_n = 0]) & P([X_n = 1]) & P([X_n = 2]) & P([X_n = 3]) \end{pmatrix}$$

   (a) Déterminer une relation entre u_n, v_n, w_n et t_n.
   (b) A l'aide de la formule des probabilités totales appliquée au système complet d'événements $\{[X_n = i] : 0 \leqslant i \leqslant 3\}$, déterminer une matrice M indépendante de n, telle que

$$U_{n+1} = U_n M$$

   (c) Exprimer M en fonction de S.
   (d) Quel est l'état stable de la chaîne de Markov (X_n) ?
   (e) Donner l'expression des réels u_n, et v_n en fonction de n, v_0 et w_0.
5. On pose
   (a) Que signifie l'événement F ?

$$F = \bigcup_{n=0}^{+\infty} [X_n = 0]$$

   (b) Montrer la convergence de la chaîne vers l'état stable, peu importe la loi suivie par X_0. Interpréter.