Épreuve Composite

E C G

Concours blanc n°3

Option économique

MATHEMATIQUES

24 Février 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice n°1

À tout polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$ de la forme $P(X) = X^4 + dX^3 + cX^2 + bX + a$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on associe l'unique matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ci-dessous, appelée matrice compagnon du polynôme P.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & -d \end{pmatrix}$$

On donne alors le résultat suivant, noté $(\star)$, qui sera utilisé et démontré dans cet exercice.

$(\star)$ *Le polynôme P est un polynôme annulateur de sa matrice compagnon C.*

Partie 1 - Étude d'un exemple

On considère dans cette partie seulement que le polynôme P est donné par $P(X) = X^4 + X$.

1. Identifier et expliciter la matrice compagnon de P, notée A.
2. Montrer que A n'est pas inversible et en déduire, sans calcul, une valeur propre de A.
3. Calculer A^4. Vérifier alors la validité du résultat $(\star)$.
4. En déduire les valeurs propres de A.
5. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Partie 2 - Utilisation du résultat $(\star)$

On note $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère l'application φ définie par

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & x - 2t \\ y + t & z + 2t \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

6. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.
7. Montrer que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

8. On note P_B le polynôme de $\mathbb{R}_4[X]$ dont B est la matrice compagnon.
   (a) Identifier le polynôme P_B puis vérifier que $P_B(X) = \left(X^2 - 2X\right)\left(X^2 - 1\right)$.
   (b) En déduire, à l'aide du résultat $(\star)$, que les valeurs propres possibles de B sont $\{-1, 0, 1, 2\}$.
   (c) On note

$$M_1 = E_{2,2} - E_{1,2}, \quad M_2 = 2E_{1,2} - 3E_{2,1} + E_{2,2},$$
$$M_3 = E_{2,2} - 2E_{1,2} - E_{2,1} \quad \text{et} \quad M_4 = 2\left(E_{1,1} - E_{2,1}\right) + M_1.$$

   Calculer les images par φ des quatre matrices précédentes.
9. La matrice B est-elle diagonalisable ?

Partie 3 - Preuve du résultat $(\star)$

On considère donc un polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$ de la forme $P(X) = X^4 + dX^3 + cX^2 + bX + a$ auquel on associe la matrice compagnon C définie ci-avant.
On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est C.
On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^4$. On note $f^0 = \text{Id}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}, f^{k+1} = f \circ f^k$. Enfin, on pose $g = P(f)$, c'est à dire que, pour tout $u \in \mathbb{R}^4$,

$$g(u) = f^4(u) + df^3(u) + cf^2(u) + bf(u) + au$$

10. Montrer que

$$f\left(e_1\right) = e_2, \quad f^2\left(e_1\right) = e_3, \quad f^3\left(e_1\right) = e_4$$

    et que

$$f^4\left(e_1\right) = -\left(ae_1 + be_2 + ce_3 + de_4\right)$$

11. (a) Montrer que $g\left(e_1\right) = 0$.
    (b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}, g \circ f^k = f^k \circ g$.
    (c) En déduire que, pour tout $k \in \llbracket 1;4 \rrbracket, g\left(e_k\right) = 0$.
    (d) Conclure.

Exercice n°2

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par :

$$f_a(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{a^2}{t})$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ de nombre réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f_a(u_n)$$

Partie I - Étude des variations de la fonction f_a .

1. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f_a par rapport à cette asymptote.

2. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.
3. Donner l'expression de la fonction dérivée de f_a sur $\mathbb{R}_+^*$ et dresser le tableau de variation de f_a.
4. En déduire que :
$$\forall t > 0 \qquad f_a(t) \geq a$$

Partie II - Étude de la convergence de la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$.

5. Que dire de la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ dans le cas particulier où $u_0 = a$?
6. Dans la suite on revient au cas général $u_0 > 0$.
Démontrer que :
$$\forall t > a \qquad 0 < f_a'(t) < \frac{1}{2}$$
7. Montrer que pour tout entier n, non nul :
$$u_n \geq a$$
8. Prouver alors que pour tout entier n non nul :
$$0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a)$$
Puis que :
$$|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$
9. En déduire la convergence de la suite (u_n) et indiquer sa limite.
10. En utilisant ce qui précède, écrire un programme en langage Python permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite (u_n), de premier terme 1, convergeant vers $\sqrt{2}$.

Partie III - Recherche d'extremum d'une fonction à deux variables.

On considère, sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction g définie par :
$$g(x, y) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1 + x)(1 + y)$$

11. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
12. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
13. (a) Montrer que g admet un unique point critique.
    (b) Montrer que g admet un extremum local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dont on précisera la nature et la valeur.
14. Vérifier que :
$$g(x, y) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1(\frac{x}{y})$$
15. En déduire que l'extremum local est un extremum global de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

Exercice n°3

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.
Soit $p \in]0;1[$. On note $q = 1 - p$.

Partie I : Différence de deux variables aléatoires discrètes

Soit n un entier naturel non nul. On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.
On définit la variable aléatoire X égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire Z égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

1. (a) Reconnaître la loi de X. Rappeler son espérance et sa variance.
   (b) Déterminer la loi de Z. Expliciter son espérance et sa variance.
2. On note $Y = Z - X$.
   (a) Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer la loi de Y.
   (b) i. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
      ii. Calculer la covariance du couple (X, Y).

Partie II : Variable aléatoire à densité conditionnée par une variable aléatoire discrète

Dans cette partie, on note U une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

3. Rappeler la loi de U, son espérance et sa variance.
   On considère une variable aléatoire T telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in \left[0; +\infty\right[, \quad P_{(U=n)}(T > t) = e^{-nt}$$

4. (a) Montrer : $\forall t \in \left[0; +\infty\right[, \quad \mathrm{P}(T > t) = \dfrac{pe^{-t}}{1 - qe^{-t}}$.
   (b) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T.
   (c) En déduire que T est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.
5. On note $Z = UT$.
   (a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in \left[0; +\infty\right[, \quad \mathrm{P}_{(U=n)}(Z > z) = e^{-z}$$

   (b) En déduire que la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

   (c) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in [0; +\infty[, \quad \mathrm{P}([U = n] \cap [Z > z]) = \mathrm{P}(U = n)\mathrm{P}(Z > z)$$

Partie III : Taux de panne d'une variable aléatoire à densité

Dans cette partie, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t) = \begin{cases} \dfrac{2t}{(1+t^2)^2}, \text{ si } t \geq 0 \\ 0, \text{ si } t < 0 \end{cases}$$

6. Montrer que f est une densité de probabilité

   On considère désormais une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé telle que $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et admettant f comme densité.
7. Déterminer la fonction de répartition F de X.
8. Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$sur $[0;1[$. Expliciter $F^{-1}(y)$ pour $y \in [0;1[$.
9. On pose $Y = \dfrac{X^2}{1+X^2}$ et on note G la fonction de répartition de Y.
   (a) Déterminer alors $Y(\Omega)$.
   (b) Expliciter $G(y)$ pour $y \in [0;1[$ et en déduire la loi suivie par Y.
   (c) À l'aide de la question 9, exprimer X en fonction de Y et compléter le script Python suivant, visant à simuler la variable aléatoire X.

```
def simul_X():
        Y=rd.rand()
        return ...
```

10. Pour tout réel $h > 0$, on introduit la fonction T_h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$T_h(x) = \frac{1}{h} \times P_{[X>x]}(X \leq x+h)$$

   (a) Soit $x > 0$ fixé. Montrer que

$$\lim_{h \to 0} T_h(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$$

   (b) Pour tout réel $x > 0$, on note $T(x) = \dfrac{f(x)}{1-F(x)}$. La fonction T s'appelle le taux de panne associé à X. Déterminer explicitement $T(x)$.
   (c) Pour tout réel $x > 0$, vérifier que

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x T(t)\mathrm{d}t\right)$$