Concours blanc n°3

Option économique

MATHEMATIQUES

24 Février 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

. Exercice n°1

À tout polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$ de la forme $P(X) = X^4 + dX^3 + cX^2 + bX + a$, avec $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, on associe l'unique matrice de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ ci-dessous, appelée matrice compagnon du polynôme P.

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & -d \end{pmatrix}$$

On donne alors le résultat suivant, noté $(\star)$, qui sera utilisé et démontré dans cet exercice.

$(\star)$ *Le polynôme Pest un polynôme annulateur de sa matrice compagnon C.*

Partie 1 - Étude d'un exemple

On considère dans cette partie seulement que le polynôme P est donné par $P(X) = X^4 + X$.

1. Identifier et expliciter la matrice compagnon de P, notée A.

RÉPONSE:

La matrice compagnon de P est

$$\boxed{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}$$

* * *

2. Montrer que A n'est pas inversible et en déduire, sans calcul, une valeur propre de A.

RÉPONSE:

On constate que $A\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} = 0_{4,1}$ *donc* $\mathrm{Ker}(A)$ *n'est pas réduit à 0 et* $\boxed{A \text{ n'est pas inversible.}}$

$\boxed{\text{On en déduit que 0 est valeur propre de } A.}$

* * *

3. Calculer A^4. Vérifier alors la validité du résultat $(\star)$.

RÉPONSE:

Un simple calcul donne

$$C^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = -C$$

$\boxed{\text{Ainsi } P \text{ est bien un polynôme annulateur de } A.}$

* * *

4. En déduire les valeurs propres de A.

RÉPONSE:

On cherche les racines de P *:*

$$P(X) = 0 \Leftrightarrow X^4 + X = 0 \Leftrightarrow X(X^3+1) \Leftrightarrow X = 0 \text{ ou } X = -1$$

Ainsi $\boxed{Sp(A) \subset \{-1, 0\}}$

* * *

5. La matrice A est-elle diagonalisable ?

RÉPONSE:

- *En notant* C_i *la* i*-ème colonne de* A*, comme la famille* (C_1, C_2, C_3) *est une famille échelonnée, elle est libre et* $rg(A) = 3$*. D'après le théorème du rang, dim* $(\mathrm{Ker}(A)) = 1$*.*
- $A + I_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$*. En notant encore* C_i *la* i*-ème colonne de* $A + I_4$*, comme la famille* (C_1, C_2, C_3) *est une famille échelonnée, elle est libre. De plus* $C_4 = -C_2 + C_3$ *donc* $rg(A) = 3$*. D'après le théorème du rang, dim* $(\mathrm{Ker}(A + I_4)) = 1$*.*

La somme des sous-espaces propres n'est pas égale à la taille de la matrice, donc $\boxed{A \text{ n'est pas diagonalisable.}}$

* * *

Partie 2 - Utilisation du résultat ($\star$)

On note $\mathcal{B} = (E_{1,1}, E_{1,2}, E_{2,1}, E_{2,2})$ la base canonique de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ et on considère l'application φ définie par

$$\varphi : \left| \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) & \to & \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \\ \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} 0 & x-2t \\ y+t & z+2t \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

6. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

RÉPONSE:

Soit $M = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$ *et* $N = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ *et* $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda M + N) &= \varphi\left(\begin{pmatrix} \lambda x + a & \lambda y + b \\ \lambda z + c & \lambda t + d \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & \lambda x + a - 2(\lambda t + d) \\ \lambda y + b + \lambda t + d & \lambda z + c + 2(\lambda t + d) \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} 0 & x-2t \\ y+t & z+2t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & a-2d \\ b+d & c+2d \end{pmatrix} = \lambda\varphi(M) + \varphi(N) \end{aligned}$$

Ainsi la fonction φ est linéaire. On observe que, par définition, $\varphi(\mathcal{M}_2(\mathbb{R})) \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

$\boxed{\textit{Donc } \varphi \textit{ est un endomorphisme.}}$

$* * *$

7. Montrer que la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est la matrice

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

RÉPONSE:

On calcule les images des éléments de la base $\mathcal{B}$.

- $\varphi(E_{1,1}) = \varphi\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = E_{1,2}$.
- $\varphi(E_{1,2}) = \varphi\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_{2,1}$.
- $\varphi(E_{2,1}) = \varphi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_{2,2}$.
- $\varphi(E_{2,2}) = \varphi\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -2E_{1,2} + E_{2,1} + 2E_{2,2}$.

Donc la matrice de φ dans la base $\mathcal{B}$ est

$$\boxed{B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}}$$

$* * *$

8. On note P_B le polynôme de $\mathbb{R}_4[X]$ dont B est la matrice compagnon.
   (a) Identifier le polynôme P_B puis vérifier que $P_B(X) = \left(X^2 - 2X\right)\left(X^2 - 1\right)$.

RÉPONSE:

Par définition on trouve $\boxed{P_B(X) = X^4 - 2X^3 - X^2 + 2X}$. *Un simple développement donne*

$$(X^2 - 2X)(X^2 - 1) = X^4 - X^2 - 2X^3 + 2X = P_B(X)$$

* * *

(b) En déduire, à l'aide du résultat $(\star)$, que les valeurs propres possibles de B sont $\{-1, 0, 1, 2\}$.

RÉPONSE:

Les racines de $X^2 - 2X$ *sont 0 et 2, celles de* $X^2 - 1$ *sont 1 et* -1. *Donc les valeurs propres potentielles de* B *sont* $-1, 0, 1, 2$.

* * *

(c) On note

$$M_1 = E_{2,2} - E_{1,2}, \quad M_2 = 2E_{1,2} - 3E_{2,1} + E_{2,2},$$
$$M_3 = E_{2,2} - 2E_{1,2} - E_{2,1} \quad \text{et} \quad M_4 = 2\left(E_{1,1} - E_{2,1}\right) + M_1.$$

Calculer les images par φ des quatre matrices précédentes.

RÉPONSE:

- $\varphi(M_1) = \varphi(E_{2,2}) - \varphi(E_{1,2}) = -2E_{1,2} + E_{2,1} + 2E_{2,2} - E_{2,1} = 2(E_{2,2}) - \varphi(E_{1,2}) = 2M_1$
- $\varphi(M_2) = 2\varphi(E_{1,2}) - 3\varphi(E_{2,1}) + \varphi(E_{2,2}) = 2E_{2,1} - 3E_{2,2} + -2E_{1,2} + E_{2,1} + 2E_{2,2} = -M_2$
- $\varphi(M_3) = \varphi(E_{2,2}) - 2\varphi(E_{1,2}) - \varphi(E_{2,1}) = -2E_{1,2} + E_{2,1} + 2E_{2,2} - 2E_{2,1} - E_{2,2} = M_3$
- $M_4 = 2E_{1,1} - 2E_{2,1} + E_{2,2} - E_{1,2}$.
  $\varphi(M_4) = 2\varphi(E_{1,1}) - 2\varphi(E_{2,1}) + \varphi(M_1) = 2E_{1,2} - 2E_{2,2} + 2E_{2,2} - 2E_{1,2} = 0$

* * *

9. La matrice B est-elle diagonalisable ?

RÉPONSE:

La question précédente donne que $Sp(B) = \{-1, 0, 1, 2\}$. *Ainsi* B *est une matrice de taille 4 qui possède 4 valeurs propres différentes.* $\boxed{\textit{Donc } B \textit{ est diagonalisable.}}$

* * *

Partie 3 - Preuve du résultat $(\star)$

On considère donc un polynôme P de $\mathbb{R}_4[X]$ de la forme $P(X) = X^4 + dX^3 + cX^2 + b^X + a$ auquel on associe la matrice compagnon C définie ci-avant.
On note (e_1, e_2, e_3, e_4) la base canonique de $\mathbb{R}^4$ et f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^4$ dont la matrice dans la base canonique est C.
On note Id l'endomorphisme identité de $\mathbb{R}^4$. On note $f^0 = \text{Id}$ et, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{k+1} = f \circ f^k$. Enfin, on pose $g = P(f)$, c'est à dire que, pour tout $u \in \mathbb{R}^4$,

$$g(u) = f^4(u) + df^3(u) + cf^2(u) + bf(u) + au$$

10. Montrer que

$$f\left(e_1\right)=e_2, \quad f^2\left(e_1\right)=e_3, \quad f^3\left(e_1\right)=e_4$$

et que

$$f^4\left(e_1\right)=-\left(a e_1+b e_2+c e_3+d e_4\right)$$

RÉPONSE:

Par définition la matrice C est définie par

$$C=C=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -a \\ 1 & 0 & 0 & -b \\ 0 & 1 & 0 & -c \\ 0 & 0 & 1 & -d \end{pmatrix}$$

La simple lecture des colonnes donne

$$\boxed{f(e_1)=e_2 \quad f^2(e_1)=f(e_2)=e_3 \quad f^3(e_1)=f(e_3)=e_4 et f^4(e_1)=f(e_4)=-(ae_1+be_2+ce_3+de_4)}$$

* * *

11. (a) Montrer que $g\left(e_1\right)=0$.

RÉPONSE:

$$g(e_1)=f^4(e1)+df^3(e_1)+cf^2(e_1)+bf(e_1)+ae_1=-(ae_1+be_2+ce_3+de_4)+de_4+ce_3+be_2+ae_1=0.$$

* * *

(b) Montrer que, pour tout $k \in \mathbb{N}, g \circ f^k=f^k \circ g$.

RÉPONSE:

On raisonne par récurrence.

- **Initialisation :**
  Pour $k=0$, $f^0=Id$ donc $g\circ f^0=g$ et $f^0\circ g=g$. L'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité :**
  Soit $k\in\mathbb{N}$. On suppose que $g\circ f^k=f^k\circ g$.

$$\begin{aligned} g\circ f^{k+1} &= g\circ f^k\circ f \\ &= f^k\circ g\circ f \qquad \textit{par hdr} \end{aligned}$$

Or pour tout $u\in\mathbb{R}^4$, on a d'une part

$$f(g(u))=f(f^4(u)+df^3(u)+cf^2(u)+bf(u)+au)=f^5(u)+df^4(u)+cf^3(u)+bf^2(u)+af(u),$$

et d'autre part

$$g(f(u))=f^4(f(u))+df^3(f(u))+cf^2(f(u))+bf(f(u))+af(u)=f^5(u)+df^4(u)+cf^3(u)+bf^2(u)+af(u)$$

Donc $g\circ f=f\circ g$ et

$$g\circ f^{k+1}=f^k\circ g\circ f=f^k\circ f\circ g=f^{k+1}\circ g$$

- **Conclusion :**
  $\boxed{\textit{Pour tout } k\in\mathbb{N}, g\circ f^k=f^k\circ g.}$

* * *

(c) En déduire que, pour tout $k \in [\![1;4]\!], g(e_k) = 0$.

RÉPONSE:

Comme $g(e_1) = 0$,

- $g(e_2) = g(f(e_1) = f(g(e_1)) = 0$
- $g(e_3) = g(f^2(e_1) = f^2(g(e_1)) = 0$
- $g(e_4) = g(f^3(e_1) = f^3(g(e_1)) = 0$

* * *

(d) Conclure.

RÉPONSE:

Comme $\mathcal{B}$ est une base de $\mathbb{R}^4$, pour tout $u \in \mathbb{R}^4$, il existe un unique $(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4$ tel que $u = xe_1 + ye_2 + ze_3 + te_4$.

$$g(u) = xg(e_1) + yg(e_2) + zg(e_3) + tg(e_4) = 0$$

Ainsi $g = P(f)$ est l'application nulle.

$\boxed{\text{Donc } P \text{ est un polynôme annulateur de } f \text{ et donc de sa matrice canoniquement associée } B.}$

* * *

. Exercice n°2

Correction proposée par Pierre Veuillez

Soit a un réel strictement positif. On considère la fonction f_a définie pour tout réel t strictement positif par :

$$f_a(t) = \frac{1}{2}(t + \frac{a^2}{t})$$

ainsi que la suite $(u_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ de nombre réels déterminée par son premier terme $u_0 > 0$ et par la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_{n+1} = f_a(u_n)$$

Partie I - Étude des variations de la fonction f_a .

1. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers $+\infty$. Justifier l'existence d'une asymptote oblique au voisinage de $+\infty$ et donner la position de la courbe représentative de f_a par rapport à cette asymptote.

RÉPONSE:

Pour $a > 0$, $\lim\limits_{t+\infty} \frac{a^2}{t} = 0$, donc $\boxed{\lim\limits_{t+\infty} f_a(t) = +\infty}$.

Par ailleurs, $\lim\limits_{t+\infty} f_a(t) - \frac{t}{2} = 0$, donc $\boxed{\text{la droite d'équation } y = \frac{t}{2} \text{ est asymtote oblique à la courbe représentative de } f}$

* * *

2. Déterminer la limite de $f_a(t)$ lorsque t tend vers 0 par valeurs positives. Interpréter graphiquement cette limite.

RÉPONSE:

Comme $a > 0$, $\lim\limits_{t \to 0^+} \dfrac{a^2}{t} = +\infty$, *donc* $\boxed{\lim\limits_{t \to 0^+} f_a(t) = +\infty}$.

La courbe de f_a *admet donc une asymptote verticale d'équation* $x = 0$.

$* * *$

3. Donner l'expression de la fonction dérivée de f_a sur $\mathbb{R}^{*+}$ et dresser le tableau de variation de f_a.

RÉPONSE:

La fonction f_a *est dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *comme somme de fonctions dérivables sur cet intervalle. Pour tout* $t > 0$ *:*

$$f_a'(t) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a^2}{t^2}\right) = \boxed{\frac{(t-a)(t+a)}{2t^2}}$$

Pour tout $t > 0$, $t + a > 0$ *et* $t^2 > 0$. *Le signe de la dérivée ne dépend que de celui de* $t - a$. *Ainsi on obtient le tableau de variations suivant :*

x	0		a		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	a	$\nearrow$	$+\infty$

où $f_a(t) = \dfrac{1}{2}(a + a) = a$.

$* * *$

4. En déduire que :

$$\forall t > 0 \qquad f_a(t) \geq a$$

RÉPONSE:

On vient de montrer que f_a *admet un minimum en* a *et que celui ci vaut* a, *donc*
pour tout $t \geq a$, $f_(a)(t) \geq a$.

$* * *$

Partie II - Étude de la convergence de la suite $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$.

5. Que dire de la suite $(u_n)_{n \epsilon \mathbb{N}}$ dans le cas particulier où $u_0 = a$?

RÉPONSE:

Lorsque $u_0 = a$, *on alors* $u_1 = f_a(u_0) = f_a(a) = a$. *On montre ainsi rapidement par récurrence que*
la suite (u_n) *est constante égale à* a.

$* * *$

6. Dans la suite on revient au cas général $u_0 > 0$.
   Démontrer que :

$$\forall t > a \qquad 0 < f_a'(t) < \frac{1}{2}$$

RÉPONSE:

On a vu à dans la première partie que pour tout $t > 0$, $f_a'(t) = \frac{1}{2} - \frac{a^2}{2t^2}$. Donc pour tout $t > 0$, $\frac{a^2}{t^2} > 0$ et $\boxed{f_a'(t) \leq \frac{1}{2}.}$ *Si de plus $t > a$, $\frac{a^2}{t^2} \leq 1$ donc* $\boxed{f_a'(t) \geq 0.}$

* * *

7. Montrer que pour tout entier n, non nul :

$$u_n \geq a$$

RÉPONSE:

On raisonne par récurrence :

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $u_n = u_1 = f_a(u_0) = \frac{1}{2}\left(u_0 + \frac{a}{u_0}\right) \geq a$ car a est un minimum pour f_a.
- **Hérédité :**
  Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $u_n \geq a$.

  Comme la fonction f_a est croissante sur $[a; +\infty[$ et que par hypothèse $u_n \geq a$, $f_a(u_n) \geq f_a(a) = a$. Donc $u_{n+1} \geq a$.
- **Conclusion :**
  $\boxed{\text{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ u_n \geq a.}$

* * *

8. Prouver alors que pour tout entier n non nul :

$$0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a)$$

Puis que :

$$|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$

RÉPONSE:

La fonction f_a est dérivable sur $[a; +\infty[$ et pour tout $t \in [a; +\infty[$, $f_a'(t) \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$. D'après l'inégalité des accroissements finis, pour tout $(x, y) \in [a; +\infty[$ tel que $y > x$, on a

$$0(y - x) \leq f_a(y) - f_a(x) \leq \frac{1}{2}(y - x)$$

Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n \in [a; +\infty[$ et $a \in [a; +\infty[$ et $f_a(u_n) = u_{n+1}$, $f_a(a) = a$, donc en remplaçant y par u_n et x par a, on obtient :

$$\boxed{0 \leq u_{n+1} - a \leq\leq \frac{1}{2}(u_n - a)}$$

On raisonne par récurrence pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 1$, on a $\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a| = \left(\frac{1}{2}\right)^{0} |u_1 - a| = |u_1 - a|$. L'initialisation est donc vérifiée.

- **Hérédité :**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose que $|u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$.

D'après ce qui précède, $0 \leq u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}(u_n - a)$, donc en utilisant l'hypothèse de récurrence,

$$u_{n+1} - a \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|$$

Donc $u_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n} |u_1 - a|$.

- **Conclusion :**

$\boxed{\textit{Pour tout } n \in \mathbb{N}^*,\ |u_n - a| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |u_1 - a|.}$

* * *

9. En déduire la convergence de la suite (u_n) et indiquer sa limite.

RÉPONSE:

Comme $1/2 \in]-1, 1[$, $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 0$. Donc par encadrement

$$\lim_{n\to+\infty} |u_n - a| = 0$$

ainsi $\boxed{\textit{la suite } (u_n) \textit{ converge vers } a.}$

* * *

10. En utilisant ce qui précède, écrire un programme en langage Python permettant d'afficher les 100 premiers termes d'une suite (u_n), de premier terme 1, convergeant vers $\sqrt{2}$.

RÉPONSE:

```
import numpy as np

u=np.zeros(100)
u[0]=1
for k in range(1,100):
        u[k]=0.5*(u[k-1]+2/u[k-1])
print(u)
```

* * *

Partie III - Recherche d'extremum d'une fonction à deux variables.

On considère, sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, la fonction g définie par :

$$g(x, y) = \frac{1}{2}(\frac{1}{x} + \frac{1}{y})(1 + x)(1 + y)$$

11. Justifier que f est de classe C^2 sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

RÉPONSE:

Les fonctions $(x,y) \to \frac{1}{x}$, $(x,y) \to \frac{1}{y}$ *et* $(x,y) \to (1+x)(1+y)$ *sont de classe* C^2 *sur* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$, *donc par somme et produit,*

$\boxed{g \text{ est de classe } C^2 \text{ sur } \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*.}$

* * *

12. Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

RÉPONSE:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial g}{\partial x}(x,y) &= \frac{1+y}{2}\left[-\frac{1}{x^2}(1+x)+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right] \\
&= \frac{1+y}{2}\left[-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}\right] = \frac{(1+y)\left(y-x^2\right)}{2x^2y} \\
\frac{\partial g}{\partial y}(x,y) &= \frac{(1+x)}{2}\left[\frac{-1}{y^2}(1+y)+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right] \\
&= \frac{(1+x)}{2}\left[\frac{-1}{y^2}+\frac{1}{x}\right] = \frac{(1+x)\left(x-y^2\right)}{2y^2x} \\
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x,y) &= \frac{1+y}{x^3} \\
\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) &= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y}+(1+y)\frac{-1}{y^2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}\right] \\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= \frac{1+x}{y^3}
\end{aligned}$$

* * *

13. (a) Montrer que g admet un unique point critique.

RÉPONSE:

Sur l'ouvert U, *les points critiques sont déterminés par* $\left\{\begin{array}{l}\frac{\partial g}{\partial x}(x,y)=0 \\ \frac{\partial g}{\partial y}(x,y)=0\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l}(1+y)\left(y-x^2\right)=0 \\ (1+x)\left(x-y^2\right)=0\end{array}\right.$

Comme $x>0$ *alors* $x \neq -1$ *et de même* $y \neq -1$ *et* $\left\{\begin{array}{l}y-x^2=0 \\ x-y^2=0\end{array}\right.$ *donc* $\left\{\begin{array}{c}y=x^2 \\ x-x^4=0\end{array}\right.$

On a $x-x^4=x\left(1-x^3\right)=x(1-x)\left(1+x+x^2\right)$

$1+x+x^2$ *a pour discriminant* $\Delta=1-4<0$ *donc* $1+x+x^2>0$ *et la seule solution est* $x=1$ *(car* $x \neq 0$ *) et donc* $y=1$

Conclusion : $\boxed{\text{Le seul point critique est } (1,1)}$

* * *

(b) Montrer que g admet un extremum local sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ dont on précisera la nature et la valeur.

RÉPONSE:

D'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(1,1) &= 2\\
\frac{\partial^2 g}{\partial y \partial x}(x,y) &= -1\\
\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x,y) &= 2
\end{aligned}$$

La matrice hessienne de g en $(1,1)$ est donc

$$\nabla^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Les valeurs propres de cette matrice hessienne sont 1 et 3 qui sont toutes deux strictement positives.
$\boxed{\textit{Donc } g \textit{ admet un minimum local en } (1,1) \textit{ qui vaut } g(1,1) = 4.}$

* * *

14. Vérifier que :

$$g(x,y) = 1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1(\frac{x}{y})$$

RÉPONSE:

On vérifie :

$$\begin{aligned}
1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right) &= 1 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}\left(y + \frac{1}{y}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right)\\
g(x,y) &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x)(1+y)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right)(1+x+y+xy)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x} + 1 + \frac{y}{x} + y + \frac{1}{y} + \frac{x}{y} + 1 + x\right)\\
&= \boxed{1 + f_1(x) + f_1(y) + f_1\left(\frac{x}{y}\right)}
\end{aligned}$$

et l'égalité est bien vérifiée.

* * *

15. En déduire que l'extremum local est un extremum global de g sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.

RÉPONSE:

Comme $f_1(t) \geq 1$ pour tout $t > 0$ on a alors $f_1(x) \geq 1$ et $f_1(y) \geq 1$ et $f_1\left(\frac{x}{y}\right) \geq 1$
et donc $g(x,y) \geq 4 = g(1,1)$ pour tout x et $y > 0$.
Conclusion : $\boxed{g \textit{ a un minimum global en } (1,1)}$

* * *

. Exercice n°3

Les trois parties de cet exercice sont indépendantes.
Soit $p \in]0;1[$. On note $q = 1 - p$.

Partie I : Différence de deux variables aléatoires discrètes

Soit n un entier naturel non nul. On considère n joueurs qui visent une cible. Chaque joueur effectue deux tirs. À chaque tir, chaque joueur a la probabilité p d'atteindre la cible. Les tirs sont indépendants les uns des autres.
On définit la variable aléatoire X égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au premier tir et la variable aléatoire Z égale au nombre de joueurs ayant atteint la cible au moins une fois à l'issue des deux tirs.

1. (a) Reconnaître la loi de X. Rappeler son espérance et sa variance.

RÉPONSE:

X (qui ne s'intéresse qu'au premier essai) est le nombre de joueurs, parmi n, atteignant la cible au premier essai, indépendamment les uns des autres et avec une même probabilité p.
Conclusion : $\boxed{\text{Donc } X \hookrightarrow \mathcal{B}(n,p) \text{ et } E(X) = np,\ V(X) = npq.}$

* * *

(b) Déterminer la loi de Z. Expliciter son espérance et sa variance.

RÉPONSE:

Pour chaque joueur, la probabilité de ne pas atteindre la cible (E_i pour échec au i$^{\text{ème}}$ essai) est $\mathrm{P}(E_1 \cap E_2) = \mathrm{P}(E_1)\mathrm{P}(E_2) = q^2$ *par indépendance.*
Donc la probabilité de l'atteindre au moins une fois est $\mathrm{P}\left(\overline{E_1 \cap E_2}\right) = 1 - q^2$ *et comme précédemment,*
Conclusion : $\boxed{Z \hookrightarrow \mathcal{B}\left(n, 1-q^2\right),\ E(Z) = n\left(1-q^2\right) \text{ et } V(Z) = nq^2\left(1-q^2\right)}$

* * *

2. On note $Y = Z - X$.

(a) Que représente la variable aléatoire Y ? Déterminer la loi de Y.

RÉPONSE:

Y est donc le nombre de joueur atteignant au moins une fois la cible, mais pas la première fois :
C'est le nombre de ceux l'atteignant uniquement la seconde fois.
Pour chaque joueur, la probabilité en est $\mathrm{P}(E_1 \cap S_2) = \mathrm{P}(E_1)\mathrm{P}(S_2) = pq$ *par indépendance.*
Conclusion : $\boxed{\text{Donc } Y \hookrightarrow \mathcal{B}(n, pq).}$

* * *

(b) i. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

RÉPONSE:

X et Y ne sont pas indépendantes :
$(X = n \cap Y = n)$ *est impossible donc* $\mathrm{P}(X = n \cap Y = n) = 0 \neq \mathrm{P}(X = n)\mathrm{P}(Y = n)$

* * *

ii. Calculer la covariance du couple (X, Y).

RÉPONSE:

Si on part de la définition $\text{cov}(X,Y) = E(X)E(Y) - E(XY)$ *demande d'aller chercher la loi du couple pour obtenir* $E(X,Y)$ *: laborieux.*
On cherche donc la covariance là où elle intervient :$V(Z) = V(X+Y) = V(X) + V(Y) + 2\,\text{cov}(X,Y)$ *donc*

$$\begin{aligned}
\text{cov}(X,Y) &= \frac{1}{2}(V(Z) - V(Y) - V(X)) \\
&= \frac{1}{2}\left(nq^2\left(1-q^2\right) - npq(1-pq) - npq\right) \text{ factorisé} \\
&= \frac{1}{2}nq\left(q(1-q)(1+q) - p(1-pq) - p\right) \\
&= \frac{1}{2}nqp\left(q(1+q) - 1 + pq - 1\right) \text{ tout en } q \\
&= \frac{1}{2}nqp\left(q + q^2 - 2 + (1-q)q\right) \\
&= -np^2q
\end{aligned}$$

N.B. la covariance négative est cohérente : plus X *est grand, plus* Y *risque d'être petit.*

* * *

Partie II : Variable aléatoire à densité conditionnée par une variable aléatoire discrète

Dans cette partie, on note U une variable aléatoire suivant la loi géométrique de paramètre p.

3. Rappeler la loi de U, son espérance et sa variance.

RÉPONSE:

Pour donner la loi, ne pas oublier de donner les valeurs possibles.
On a $U(\Omega) = \mathbb{N}^*$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{P}(U = n) = q^{n-1}p$, $E(U) = \dfrac{1}{p}$ *et* $V(U) = \dfrac{q}{p^2}$

* * *

On considère une variable aléatoire T telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall t \in \left[0;+\infty\right[, \quad P_{(U=n)}(T > t) = e^{-nt}$$

4. (a) Montrer : $\forall t \in \left[0;+\infty\right[, \quad \mathrm{P}(T > t) = \dfrac{pe^{-t}}{1-qe^{-t}}$.

RÉPONSE:

$(U = n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est un système complet d'événements, donc*

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(T > t) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}_{(U=n)}(T > t)\,\mathrm{P}(U = n) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} e^{-nt}q^{n-1}p \text{ pour } t \in [0;+\infty[\\
&= \frac{p}{q}\sum_{n=1}^{+\infty}\left(e^{-t}q\right)^n \\
&= \frac{p}{q}e^{-t}q\frac{1}{1-e^{-t}q} \text{ car } \left|e^{-t}q\right| < 1
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\forall t \in [0;+\infty[\,, \quad \mathrm{P}(T > t) = \dfrac{p\ e^{-t}}{1 - q\ e^{-t}}}$

$* * *$

(b) Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire T.

RÉPONSE:

La fonction de répartition de T est donc donnée par :
$F(t) = \mathrm{P}(T \leq t) = 1 - \dfrac{p\ e^{-t}}{1 - q\ e^{-t}}$ *pour tout* $t \geq 0$
et comme F (fonction de répartition) est croissante et positive et que $F(0) = 1 - \dfrac{p}{1-q} = 0$ *alors* $F(t) = 0$ *pour tout* $t < 0$

$* * *$

(c) En déduire que T est une variable aléatoire à densité et en déterminer une densité.

RÉPONSE:

F est donc continue

- *sur* $[0; +\infty[$ *car* $1 - q\ e^{-t} \neq 0$
- *sur* $]-\infty, 0[$ *fonction nulle*
- *en* 0^- *car* $F(t) = 0 \to 0 = F(0)$

Donc la fonction de réapartiton de T est continue sur $\mathbb{R}$ et C^1 sur $\mathbb{R}^*$ et T est à densité.
Une densité est F' là où F est C^1
pour $t > 0$: $F(t) = 1 - \dfrac{p\ e^{-t}}{1 - q\ e^{-t}}$ *et*

$$\begin{aligned} F'(t) &= -p \frac{-e^{-t}\left(1 - qe^{-t}\right) - qe^{-t}e^{-t}}{(1 - qe^{-t})^2} \\ &= \frac{pe^{-t}}{(1 - qe^{-t})^2} \end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{l} T \text{ est à densité et une densité est} \\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{pe^{-t}}{(1-qe^{-t})^2} & si\ t \geq 0 \\ 0 & si\ t < 0 \end{cases} \end{array}}$

$* * *$

5. On note $Z = UT$.

(a) Montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in \left[0; +\infty\right[, \quad \mathrm{P}_{(U=n)}(Z > z) = e^{-z}$$

RÉPONSE:

$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \forall z \in [0; +\infty[,$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_{(U=n)}(Z > z) &= \mathrm{P}_{(U=n)}(UT > z) \\ &= \mathrm{P}_{(U=n)}(T > z/n) \\ &= e^{-nz/n} \\ &= e^{-z} \end{aligned}$$

* * *

(b) En déduire que la variable aléatoire Z suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.

RÉPONSE:

Intuitivement : la probabilité $\mathrm{P}_{(U=n)}(Z>z)$ est la même pour toute valeur de U : elle est "indépendante" de U et $\mathrm{P}(Z>z)=e^{-z}$.
Rigoureusement, on repasse par les probabilités totales :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(Z>z) &= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathrm{P}(U=n)\,\mathrm{P}_{(U=n)}(Z>z)\\ &= e^{-z}\sum_{n=1}^{+\infty}\mathrm{P}(U=n)\\ &= e^{-z} \textit{ car } (U=n)_{n\in\mathbb{N}} \textit{ SCE}\end{aligned}$$

La fonction de répartition de Z est donc
$G(z)=\begin{cases}1-e^{-z} & \text{si } z\geq 0\\ 0 & \text{si } z<0\end{cases}$ *où l'on reconnaît que* $\boxed{Z \text{ suit une loi } \varepsilon(1)}$

* * *

(c) Montrer que

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \forall z\in[0;+\infty[,\quad \mathrm{P}([U=n]\cap[Z>z])=\mathrm{P}(U=n)\mathrm{P}(Z>z)$$

RÉPONSE:

On retrouve ici la problématique de l'indépendance :
$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \forall z\in[0;+\infty[,$

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(U=n\ ,\ Z>z) &= \mathrm{P}(U=n)\,\mathrm{P}_{U=n}(Z>z)\\ &= \mathrm{P}(U=n)\,e^{-z}\\ &= \mathrm{P}(U=n)\,\mathrm{P}(Z>z)\end{aligned}$$

* * *

Partie III : Taux de panne d'une variable aléatoire à densité

Dans cette partie, on note f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(t)=\begin{cases}\dfrac{2t}{(1+t^2)^2}, \text{ si } t\geq 0\\ 0, \text{ si } t<0\end{cases}$$

6. Montrer que f est une densité de probabilité

RÉPONSE:

- *f est positive sur $\mathbb{R}$.*
- *f est continue sur $\mathbb{R}^*$ (car constante sur $\mathbb{R}_-^*$ et comme quotient de fonctions continues de dénominateur non nul sur $\mathbb{R}_+^*$).*
- *Montrons que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1 .*

Soit $A > 0$. On a (intégrande de la forme $-u'/u$) :

$$\begin{aligned}\int_0^A f(t)\mathrm{d}t &= \int_0^A \frac{2t}{(1+t^2)^2}\ \mathrm{d}t \\ &= \left[-\frac{1}{(1+t^2)}\right]_0^A \\ &= -\frac{1}{(1+A^2)} + 1 \\ &\underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} +1\end{aligned}$$

Ainsi, $\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$ converge et vaut 1 et comme f est nulle sur $\mathbb{R}_-$, on a bien : $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = 1$.

$\boxed{\textit{Ainsi, } f \textit{ est une densité de probabilité.}}$

* * *

On considère désormais une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé telle que $X(\Omega) = \mathbb{R}$ et admettant f comme densité.

7. Déterminer la fonction de répartition F de X.

RÉPONSE:

On note F la fonction de répartition de X. Montrer que : $F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1+x^2} & si\ x \geqslant 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t$.

- *Si $x < 0 : F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\ \mathrm{d}t = 0$.*
- *Si $x \geqslant 0$, on a d'après le calcul de la question précédente :*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{2t}{(1+t^2)^2}\ \mathrm{d}t = 1 - \frac{1}{(1+x^2)} = \frac{1+x^2-1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2}$$

Ainsi, on a bien :

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1+x^2} & si\ x \geqslant 0 \\ 0 & si\ x < 0 \end{cases}$$

* * *

8. Montrer que F réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$sur $[0;1[$. Expliciter $F^{-1}(y)$ pour $y \in [0;1[$.

RÉPONSE:

F étant la fonction de répartition de X qui admet pour densité f, on a pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$:

$$F'(x) = f(x) = \frac{2x}{(1+x^2)^2} > 0$$

Ainsi, F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$. Comme elle y est continue, F réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$sur $[0,1[\left(\text{car } F(0) = 0 \ \ et \ \lim\limits_{+\infty} F(x) = 1\right)$.

Soit $y \in]0,1[$. *On résout* $y = F(x)$ *pour* $x \in \mathbb{R}_+^*$.

$$\begin{aligned} y = F(x) &\Leftrightarrow y = \frac{x^2}{1+x^2} \Leftrightarrow y(1+x^2) = x^2 \\ &\Leftrightarrow y + yx^2 = x^2 \Leftrightarrow y = x^2(1-y) \\ &\Leftrightarrow x^2 = \frac{y}{1-y} \quad \textit{possible car } y < 1 \\ &\Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{y}{1-y}} \ \textit{possible car } y \in [0,1[\ \textit{donc } \frac{y}{1-y} \geq 0 \\ &\Leftrightarrow x = \sqrt{\frac{y}{1-y}} \ \textit{car } x > 0 \end{aligned}$$

Ainsi

$$\boxed{F^{-1}(y) = \sqrt{\frac{y}{1-y}}}$$

$* * *$

9. On pose $Y = \dfrac{X^2}{1+X^2}$ et on note G la fonction de répartition de Y.

(a) Déterminer alors $Y(\Omega)$.

RÉPONSE:

X étant à valeur dans $\mathbb{R}_+$, on en déduit que $Y = \dfrac{X^2}{1+X^2} = F(X)$ *est à valeurs dans* $[0,1[$. *Ainsi,* $Y(\Omega) = [0,1[$.

$* * *$

(b) Expliciter $G(y)$ pour $y \in [0;1[$ et en déduire la loi suivie par Y.

RÉPONSE:

Soit $y \in [0,1[$. *On a :*

$$\begin{aligned} G(y) = P(Y \leqslant y) = P\left(\frac{X^2}{1+X^2} \leqslant y\right) \\ &= P(F(X) \leq y) \\ &= P(X \leq F^{-1}(y)) \ \textit{par croissance de } F^{-1} \\ &= F(F^{-1}(y)) = y \end{aligned}$$

Comme $Y(\Omega) = [0,1[$, *on a :* $G(y) = 0$ *pour* $y < 0$ *et* $G(y) = 1$ *pour* $y \geqslant 1$, *ce qui donne :*

$$G(y) = \begin{cases} 0 \ \textit{si } y < 0 \\ y \ \textit{si } 0 \leqslant y < 1 \\ 1 \ \textit{si } y \ geq \ 1 \end{cases} \qquad \textit{soit } Y \hookrightarrow U([0,1[).$$

$* * *$

(c) À l'aide de la question 9, exprimer X en fonction de Y et compléter le script Python suivant, visant à simuler la variable aléatoire X.

```
def simul_X():
        Y=rd.rand()
        return ...
```

RÉPONSE:

On obtient $X = \sqrt{\dfrac{Y}{1-Y}}$ *et*

```
def simul_X():
        Y=rd.rand()
        return np.sqrt(Y/(1-Y))
```

$* * *$

10. Pour tout réel $h > 0$, on introduit la fonction T_h définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$T_h(x) = \frac{1}{h} \times P_{[X>x]}(X \leq x+h)$$

(a) Soit $x > 0$ fixé. Montrer que

$$\lim_{h \to 0} T_h(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$$

RÉPONSE:

Soit x un réel strictement positif fixé. Montrer que : $\lim\limits_{h \to 0} T_h(x) = \dfrac{f(x)}{1-F(x)}$. *Soit $x > 0$. On a :*

$$\begin{aligned}
T_h(x) &= \frac{1}{h} \times P_{[X>x]}([X \leqslant x+h]) \\
&= \frac{1}{h} \times \frac{P((X > x) \cap (X \leqslant x+h))}{P(X > x)} \\
&= \frac{1}{h} \times \frac{P(x < X \leqslant x+h)}{1 - P(X \leqslant x)} \\
&= \frac{1}{h} \times \frac{F(x+h) - F(x)}{1 - F(x)} \\
&= \frac{F(x+h) - F(x)}{h} \times \frac{1}{1 - F(x)}
\end{aligned}$$

On reconnait dans le terme $\dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = \dfrac{F(x+h) - F(x)}{(x+h) - x}$ *un taux d'accroissement.*
Or, F est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ (donc en x) de dérivée f, ce qui donne par définition du nombre dérivée : $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x)$ *et enfin :*

$$\lim_{h \to 0} T_h(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)}$$

$* * *$

(b) Pour tout réel $x > 0$, on note $T(x) = \dfrac{f(x)}{1-F(x)}$. La fonction T s'appelle le taux de panne associé à X. Déterminer explicitement $T(x)$.

RÉPONSE:

Pour tout réel $x > 0$, on pose : $T(x) = \dfrac{f(x)}{1-F(x)}$. *Déterminer explicitement $T(x)$. On connait les expressions de f et F. On obtient :*

$$T(x) = \frac{f(x)}{1-F(x)} = \frac{\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{1 - \frac{x^2}{1+x^2}} = \frac{\frac{2x}{(1+x^2)^2}}{\frac{1}{1+x^2}} = \frac{2x}{1+x^2}$$

$$* * *$$

(c) Pour tout réel $x > 0$, vérifier que

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x T(t)\mathrm{d}t\right)$$

RÉPONSE:

Pour tout réel $x > 0$, exprimer l'intégrale $\displaystyle\int_0^x T(t)\mathrm{d}t$ en fonction de $F(x)$ puis la calculer. On a, l'intégrande étant de la forme $-u'/u$:

$$\begin{aligned}
\int_0^x T(t)\mathrm{d}t &= \int_0^x \frac{f(t)}{1-F(t)}\mathrm{d}t \\
&= [-\ln(1-F(t))]_0 x \\
&= -\ln(1-F(x)) + \ln(1-F(0)) \\
&= -\ln(1-F(x)) \quad \text{car } F(0) = 0
\end{aligned}$$

Ainsi : $\displaystyle\int_0^x T(t)\mathrm{d}t = -\ln(1-F(x))$ et

$$F(x) = 1 - \exp\left(-\int_0^x T(t)\mathrm{d}t\right)$$

$$* * *$$