Devoir Surveillé n°8

Option économique

MATHEMATIQUES

15 Mars 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

. Exercice n°1

Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

Partie I : Étude de la fonction g

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.

RÉPONSE:

Par calcul des limites,

$$\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} +\infty$$

puis par composition avec l'exponentielle, on a donc

$$\lim_{x \to 0} g(x) = +\infty$$

De même,

$$\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$$

et il suit que

$$\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty.$$

* * *

2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h(x) = \ln(x) + 2x - 1$$

   (a) Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

RÉPONSE:

La fonction h est somme de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc elle-même dérivable et, pour tout $x > 0$, on a

$$h'(x) = \frac{1}{x} + 2 > 0$$

ce qui permet d'affirmer que h est bien strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

* * *

(b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 0$. Justifier que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

RÉPONSE:

La fonction h est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$. Par le théorème de bijection, elle réalise donc une bijection de R_+^* sur $\left]\lim\limits_{x\to 0} h(x)\,;\ \lim\limits_{x\to+\infty} h(x)\right[= \mathbb{R}$. En particulier, 0 admet un unique antécédent par h, noté α sur $\mathbb{R}_+^*$.

Comme de plus, $h(1) = 1 > 0 = h(\alpha)$ et $h(1/2) = \ln(1/2) = -\ln(2) < 0$, la stricte croissante de h (et donc de sa bijection réciproque) permet d'affirmer que "les antécédents sont rangés dans le même sens" c'est à dire que

$$\frac{1}{2} < \alpha < 1.$$

* * *

(c) Démontrer que : $\forall x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{x^2} h(x)\, g(x)$.

RÉPONSE:

La fonction g est la composée, par une exponentielle, d'un produit de combinaison de fonctions usuelles dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$ donc g est encore dérivable sur ce même intervalle. Comme on a

$$\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)' = \frac{1}{x^2}\ln(x) + \left(2 - \frac{1}{x}\right) \times \frac{1}{x} = \frac{\ln(x) + 2x - 1}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2},$$

on a bien

$$g'(x) = \left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)' \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = \frac{h(x)}{x^2} g(x).$$

* * *

(d) En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.

RÉPONSE:

La question (2) nous donne le tableau de signes de $h(x)$, ce qui permet d'obtenir facilement celui de $g'(x)$ puis les variations de g.

x	0		α		$+\infty$
$h(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
g	‖ $+\infty$	$\searrow$	$g(\alpha)$	$\nearrow$	$+\infty$

* * *

3. Démontrer que :

$$g(x) - x^2 \underset{x \to +\infty}{\sim} -x \ln(x)$$

RÉPONSE:

Par définition de l'exponentielle, pour $x > 0$,

$$g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) = \exp\left(2\ln(x) - \frac{\ln(x)}{x}\right) = x^2 \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right).$$

Or, par croissance comparée, $\ln(x)/x \to 0$ lorsque $x \to +\infty$. On peut donc utiliser le développement limite de $\exp(u)$ en 0 à l'ordre 1 pour écrire

$$\exp\left(-\frac{\ln(x)}{x}\right) = 1 + -\frac{\ln(x)}{x} + o\left(\frac{\ln(x)}{x}\right), \qquad x \to +\infty.$$

Ceci donne ensuite

$$g(x) = x^2 \exp\left(\frac{\ln(x)}{x}\right) = x^2 - x\ln(x) + o(x\ln(x)), \qquad x \to +\infty$$

ou encore

$$g(x) - x^2 = -x\ln(x) + o(x\ln(x))$$

ce qui est équivalent à écrire

$$g(x) - x^2 \sim -x\ln(x), \qquad x \to +\infty.$$

* * *

Partie II : Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)$$

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n > 0$.

RÉPONSE:

Comme demandé, on procède par récurrence.

- *initialisation. Pour $n = 0$, u_0 est donné et par hypothèse est strictement positif.*

- *<u>hérédité</u>. Supposons que, pour un certain entier $n \in \mathbb{N}$, u_n existe et soit strictement positif. En particulier u_n est dans le domaine de définition de g et $u_{n+1} = g(u_n)$ est bien défini. De plus,*

$$u_{n+1} = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{u_n}\right)\ln(u_n)\right) > 0$$

(une exponentielle est toujours strictement positive), ce qui termine cette récurrence facile.

* * *

5. Écrire une fonction Python qui prend en argument un réel `u0` et un entier `n` et renvoie sous forme de matrice ligne la liste des $n+1$ premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 =$`u0`.

RÉPONSE:

```
def suite(u0, n):
  U=np.zeros((n+1,1)) # on pré-remplit une liste de bonne
                      # longueur avec des zéros
  U[1]= u0 # premier terme
  for k in range(2,n+2):
    U[k] = np.exp((2-1/U[k-1])*log(U[k-1]))
  return U
```

* * *

6. (a) Étudier le signe de $(x-1)\ln(x)$ pour $x > 0$.

RÉPONSE:

On reproduit directement le tableau de signe répondant à cette question triviale. Notant $A(x) = (x-1)\ln(x)$ on a

x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
$\ln(x)$	||	$-$	0	$+$	
$A(x)$	||	$+$	0	$+$	

En particulier, pour tout $x > 0$, on a $(x-1)\ln(x) \geq 0$.

* * *

(b) Montrer que : $\forall x > 0,\ \dfrac{g(x)}{x} \geqslant 1$.

RÉPONSE:

Soit $x > 0$. On peut écrire

$$\frac{g(x)}{x} = \frac{\exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)}{\exp(\ln(x))} = \exp\left(\left(2-\frac{1}{x}\right)\ln(x) - \ln(x)\right) = \exp\left(\frac{(x-1)\ln(x)}{x}\right).$$

Or, $(x-1)\ln(x)/x \geq 0$ pour $x > 0$. Par composition avec l'exponentielle croissante, on a bien que, pour tout $x > 0$,

$$\frac{g(x)}{x} \geq 1.$$

$$* * *$$

(c) En déduire que pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \geqslant x$, et que l'équation $g(x) = x$ admet 1 comme unique solution.

RÉPONSE:

La question précédente donne bien que, pour tout $x > 0$, on a $g(x) \geq x$. L'égalité n'est vérifiée que lorsque $g(x)/x = 1$ c'est à dire lorsque

$$\frac{(x-1)\ln(x)}{x} = 0 \Longleftrightarrow x = 1.$$

$$* * *$$

7. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

RÉPONSE:

La question précédente, appliquée avec $x = u_n > 0$ permet de voir que

$$u_{n+1} = g(u_n) \geq u_n$$

et donc que la suite (u_n) est toujours croissante.

$$* * *$$

8. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

(a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

RÉPONSE:

On procède par récurrence.

- *initialisation.* *Pour $n = 0$, c'est l'hypothèse donnée par le texte.*
- *hérédité.* *Supposons que, pour un certain $n \in \mathbb{N}$, on ait $1/2 \leq u_n \leq 1$. Attention, g n'est pas croissante sur tout l'intervalle (seulement entre α et 1 !). On fait une disjonction de cas.*
  - *Si $\alpha \leq u_n \leq 1$, alors, par croissance de g sur cet intervalle, on a*

$$u_{n+1} = g(u_n) \leq g(1) = 1$$

  - *Si $1/2 \leq u_n < \alpha$, alors par décroissance de g,*

$$u_{n+1} = g(u_n) \leq g\left(\frac{1}{2}\right) = 1$$

  Dans les deux cas, on a bien $u_{n+1} \leq 1$. Comme de plus (u_n) est croissante, on a $u_{n+1} \geq u_n \geq 1/2$ dans tous les cas. La récurrence est terminée.

☞ *On aurait aussi pu commencer par montrer la stabilité de l'intervalle $[1/2; 1]$ par g ce qui rendait la récurrence triviale.*

$* * *$

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.

RÉPONSE:

La suite (u_n) est croissante et majorée (par 1). Par le théorème de convergence monotone, elle converge donc vers une limite ℓ élément de $[1/2;1]$. En passant à la limite dans la relation de récurrence $u_{n+1} = g(u_n)$ et par continuité de g sur $[1/2;1]$ (et donc en ℓ), on déduit que ℓ vérifie la relation $\ell = g(\ell)$ ce qui impose d'après une question précédente que $\ell = 1$. Ainsi,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \ell.$$

$* * *$

9. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0 > 1$.

(a) Démontrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 1$.

RÉPONSE:

Une récurrence immédiate avec la croissance de la suite permet de voir que $u_{n+1} \geq u_n > 1$ et l'hérédité est triviale. On s'en contente (c'est long).

$* * *$

(b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$.

RÉPONSE:

Si la suite (u_n) était majorée, elle convergerait par le théorème de convergence monotone vers une limite ℓ qui vérifierait $\ell \geq u_0 > 1$ et (par le même argument de passage à la limite et de continuité que précédemment) $\ell = g(\ell)$. Or la seule solution possible est $\ell = 1$ et c'est contradictoire avec $\ell > 1$ donc la suite (u_n) n'est pas majorée et, étant croissante, elle diverge vers $+\infty$.

$* * *$

10. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $0 < u_0 < \dfrac{1}{2}$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle convergente ?

RÉPONSE:

Dans ce cas, on voit (par stricte décroissance de g) que $u_1 = g(u_0) > g(1/2) = 1$. Et donc tous les termes de la suite sont strictement supérieurs à 1 à partir du deuxième... On applique le résultat de la question précédente, la suite diverge vers $+\infty$.

$* * *$

Partie III : Extrema de la fonction f

Pour tout couple $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on note :

$$f(x, y) = x^{y-\frac{1}{x}} = \exp\left(\left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

11. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

RÉPONSE:

On découpe la fonction.

- *La fonction* $(x,y) \mapsto x$ *est polynomiale donc de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ *et à valeurs dans* $\mathbb{R}_+^*$.
- *Les fonction* $t \mapsto 1/t$ *et* $t \mapsto \ln(t)$ *sont de classes* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}_+^*$ *(fonctions usuelles).*

☞ *Par composition, les deux fonctions* $(x,y) \mapsto \ln(x)$ *et* $(x,y) \mapsto 1/x$ *sont toutes deux de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

- *La fonction* $(x,y) \mapsto y$ *est polynomiale donc de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

☞ *Par somme, la fonction* $(x,y) \mapsto y - 1/x$ *est encore de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

☞ *Par produit, la fonction* $(x,y) \mapsto \left(y - \dfrac{1}{x}\right)\ln(x)$ *est encore de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

- *La fonction* $t \mapsto e^t$ *est une fonction usuelle de classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}$.

☞ *Par composition la fonction* f *est bien e classe* $\mathcal{C}^2$ *sur* $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

* * *

12. Démontrer que :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \qquad \begin{cases} \partial_1(f)(x,y) &= \dfrac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x,y) \\ \partial_2(f)(x,y) &= \ln(x) f(x,y) \end{cases}$$

RÉPONSE:

Par formules de dérivations,

$$\begin{aligned} \partial_1 f(x,y) &= \partial_1\left(\left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) f(x,y) \\ &= \left(\frac{1}{x^2}\ln(x) + \left(y - \frac{1}{x}\right)\frac{1}{x}\right) f(x,y) \\ &= \frac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} f(x,y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \partial_2 f(x,y) &= \partial_2\left(\left(y - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right) f(x,y) \\ &= \ln(x) f(x,y) \end{aligned}$$

* * *

13. Montrer que la fonction f admet un unique point critique a et préciser les coordonnées de a.

RÉPONSE:

Une exponentielle n'étant jamais nulle

$$\begin{aligned} (x,y) \text{ point critique de } f &\iff \begin{cases} \partial_1 f(x,y) &= 0 \\ \partial_2 f(x,y) &= 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} \dfrac{\ln(x) + xy - 1}{x^2} &= 0 \\ \ln(x) &= 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y - 1 &= 0 \\ x &= 1 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x &= 1 \\ y &= 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Ainsi, f admet un unique point critique, noté a, de coordonnées $(1,1)$.

$* * *$

14. Montrer que la matrice hessienne de f au point a est $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

RÉPONSE:

On dérive à nouveau... C'est assez lourd...Sauf qu'on va quand même ensuite évaluer en $(1,1)$ et on sait que $\partial_1 f(1,1) = \partial_2 f(1,1) = 0$ ce qui permet d'alléger un peu la présentation des calculs et résultats.

$$\begin{aligned}\partial^2_{1,1} f(x,y) &= \frac{(1/x+y)\times x^2 - 2x(\ln(x)+xy-1)}{x^4} f(x,y) + \partial_1 f(x,y) \\ &= \frac{x + x^2y - 2x(\ln(x)+xy-1)}{x^4} f(x,y) + \partial_1 f(x,y)\end{aligned}$$

$$\partial^2_{2,2} f(x,y) = \ln(x)\,\partial_2 f(x,y) = \ln(x)^2 f(x,y)$$

$$\begin{aligned}\partial^2_{1,2} f(x,y) &= \frac{f(x,y)}{x} + \ln(x)\,\partial_1 f(x,y) \\ &= \partial_{2,1} f(x,y)\end{aligned}$$

On remplace x et y par 1. Comme $f(1,1) = 1$, on trouve

$$\partial^2_{1,1} f(1,1) = 2, \qquad \partial^2_{1,2} f(1,1) = \partial^2_{2,1} f(1,1) = 1, \qquad \partial^2_{2,2} f(1,1) = 0$$

et on a bien

$$\nabla^2 f(1,1) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$* * *$

15. La fonction f admet-elle en a un extremum local ?

RÉPONSE:

Pour déterminer la nature au point critique, il faut connaître le signe des valeurs propres de la hessienne. On note H la matrice hessienne obtenue à la question précédente.

$H - \lambda I = \begin{pmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} \underset{L_1 \longleftrightarrow L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 2-\lambda & 1 \end{pmatrix}$

$\underset{(2-\lambda)L_1 - L_2}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & \lambda^2 - 2\lambda - 1 \end{pmatrix}$, *les valeurs propres annulent $\lambda^2 - 2\lambda - 1 = 0$, on a donc comme valeurs propres*

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 1 - \sqrt{2} < 0 \\ \lambda_2 &= 1 - \sqrt{2} > 0\end{aligned}$$

Les deux valeurs propres de la hessienne au point critique sont de signe opposé donc f présente un point col : ce n'est pas un extremum.

$* * *$

16. Démontrer que la fonction f n'admet pas d'extremum global sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

RÉPONSE:

Le domaine $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$ est un ouvert. Si f admet un extremum global sur celui-ci, c'est nécessairement en un point critique. Or, en l'unique point critique, f présente un point col. Il n'y a donc pas d'extremum global sur $\mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$.

* * *

. Exercice n°2

Soit a un réel. On considère la fonction I_a définie par :

$$I_a(x) = \int_x^{+\infty} e^{2a(x-t)-t^2} \, \mathrm{d}t$$

On considère également l'intégrale J_a définie par :

$$J_a = \int_0^{+\infty} e^{-2at-t^2} \, \mathrm{d}t$$

Partie I

1. (a) Montrer la relation suivante :

$$e^{-2at-t^2} \underset{t\to+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

RÉPONSE:

On a, pour $t > 0$,

$$\frac{e^{-2at-t^2}}{1/t^2} = t^2 e^{-t^2/2} e^{-t^2/2-2at}$$

Par croissance comparée, $t^2 e^{-t^2/2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
De plus, comme $-t^2/2 - 2at \sim -t^2/2 \to -\infty$, lorsque $t \to +\infty$, on a, par composition des limites avec l'exponentielle continue, $e^{-t^2/2-2at} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
Par produit,

$$\frac{e^{-2at-t^2}}{1/t^2} \underset{t\to+\infty}{\longrightarrow} 0$$

ou encore $e^{-2at-t^2} = o\left(\frac{1}{t^2}\right)$, lorsque $t \to +\infty$.

* * *

(b) En déduire que l'intégrale J_a est convergente.

RÉPONSE:

Comme l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} \mathrm{d}t$ converge (par critère de Riemann), le principe de comparaison par négligeabilité pour des fonctions positives permet d'affirmer que l'intégrale

$$\int_1^{+\infty} e^{-2at-t^2} \mathrm{d}t$$

converge. Comme la fonction $t \mapsto e^{-2at-t^2}$ est continue sur $[0;1]$, l'intégrale est bien définie sur ce même intervalle. Ainsi, on a bien convergence de J_a.

$$* * *$$

2. En déduire que la fonction I_a est définie sur $\mathbb{R}$.

RÉPONSE:

Soit $x \in \mathbb{R}$. Commençons par observer que

$$e^{2a(x-t)-t^2} = e^{2ax}e^{-2at-t^2}.$$

Si $x < 0$, comme $t \mapsto e^{-2at-t^2}$ est continue sur $[x;0]$, l'intégrale est bien définie sur ce même intervalle. Comme J_a converge, on a par Chasles, que $I_a(x)$ est une intégrale convergente et dans ce cas

$$I_a(x) = e^{2ax}\int_x^0 e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t + e^{2ax}J_a.$$

Si $x \geq 0$, la fonction précédente est encore continue sur $[0;x]$. Comme J_a est convergente, on a que $I_a(x)$ converge et

$$I_a(x) = e^{2ax}J_a - e^{2ax}\int_0^x e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t.$$

Dans les deux cas l'intégrale converge donc I_a est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dans cette question uniquement, on suppose que $a > 0$.

$$* * *$$

3. (a) Justifier que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}\ \mathrm{d}t = 0.$$

RÉPONSE:

D'après la question précédente, on peut écrire

$$\int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t = J_a - \int_0^x e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0.$$

En effet, comme J_a converge, on a

$$\lim_{x\to+\infty}\int_0^x e^{-2at-t^2}\mathrm{d}t = J_a.$$

$$* * *$$

(b) Dans cette question uniquement, on suppose que a est positif.
Montrer que, pour tout réel x :

$$I_a(x) \leqslant \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\ \mathrm{d}t$$

RÉPONSE:

Pour tout $t \geq x$, on a

$$\begin{aligned} x - t \leq 0 &\implies e^{2a(x-t)} \leq 1 \\ &\implies e^{2a(x-t)-t^2} \leq e^{-t^2} \end{aligned}$$

Par croissance de l'intégrale (les bornes sont bien dans l'ordre croissant car $x \geq 0$)

$$I_a(x) \leq \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\mathrm{d}t,$$

ce qu'on voulait.

$* * *$

(c) Déduire des deux questions précédentes que, quelle que soit la valeur du réel a : $\lim\limits_{x \to +\infty} I_a(x) = 0$.

RÉPONSE:

- *Si $a > 0$, la question précédente permet, par théorème des gendarmes, de conclure que $I_a(x) \to 0$, lorsque $x \to +\infty$.*
  En effet, comme la fonction intégrée est positive, il est clair que $I_a(x) \geq 0$. De plus, $\int_x^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t$ est le reste d'une intégrale convergente (on peut refaire un test de Riemann ou voir qu'il s'agit - à constante près - d'une densité de loi normale - pas réduite), la quantité tend vers 0.
- *Si $a < 0$, on réutilise la Question (3a) pour observer que*

$$I_a(x) = e^{2ax} \int_x^{+\infty} e^{-2at-t^2} \mathrm{d}t$$

  qui est donc le produit de deux quantités qui tendent vers 0 lorsque $x \to +\infty$.
- *Si $a = 0$,*

$$I_a(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2} \mathrm{d}t \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

  pour des raisons précédemment évoquées.
  On a donc, dans tous les cas

$$\lim_{x \to +\infty} I_a(x) = 0.$$

$* * *$

Partie II

On considère l'équation différentielle suivante, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable :

$$y' = 2ay - e^{-x^2}. \tag{1}$$

Dans cette partie, on s'intéresse aux solutions de l'équation (1) qui vérifient $\lim\limits_{x \to +\infty} y(x) = 0$.
On considère l'équation homogène associée à (1) :

$$y' = 2ay. \tag{2}$$

4. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène (2).

RÉPONSE:

D'après le cours, l'ensemble des solutions de cette équation différentielle linéaire, à coefficients constants, homogène d'ordre 1 est

$$\{y : x \mapsto \lambda e^{2ax} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

$* * *$

5. On considère la fonction F_a définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a(x) = \int_0^x e^{-2at-t^2} \, \mathrm{d}t.$$

   (a) Montrer que F_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, déterminer $F_a'(x)$.

RÉPONSE:

La fonction $t \mapsto e^{-2at-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.
Par le théorème fondamental de l'analyse elle admet donc des primitives. Plus précisément, F_a est alors la primitive de $t \mapsto e^{-2at-t^2}$ qui s'annule en 0.
À ce titre, F_a est dérivable (et même de classe $\mathcal{C}^1$) sur $\mathbb{R}$ et, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_a'(x) = e^{-2ax-x^2}.$$

* * *

(b) Montrer que, pour tout réel x,

$$I_a(x) = e^{2ax}\Big(J_a - F_a(x)\Big).$$

RÉPONSE:

En reprenant ce qu'on a écrit plus haut à la Question (2) avec la définition de F_a, on a bien, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$I_a(x) = e^{2ax}\left(J_a - F_a(x)\right).$$

* * *

(c) En déduire que la fonction I_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle (1).

RÉPONSE:

Comme F_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $x \mapsto e^{2ax}$ aussi (composée d'une fonction affine et de l'exponentielle), il en est de même (par produit) pour I_a et on a, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$I_a'(x) = 2ae^{2ax}\left(J_a - F_a(x)\right) - e^{2ax}F_a'(x) = 2aI_a(x) - e^{2ax}e^{-2ax-x^2} = 2aI_a(x) - e^{-x^2}$$

et I_a est bien solution de (1).

* * *

6. Déterminer l'ensemble des solutions de (1).

RÉPONSE:

Par principe de superposition, I_a étant solution particulière de (1),

$$y \text{ solution de } (1) \iff y - I_a \text{ solution de } (2).$$

(Cette équivalence n'est pas difficile à montrer ; on ne sait pas ici s'il était attendu d'en démontrer le détail ou non.)
Connaissant les solutions de (2), il suffit donc d'ajouter I_a. Ainsi, l'ensemble des solutions de (1) est

$$\{y : x \mapsto \lambda e^{2ax} + I_a(x) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

* * *

7. Déterminer l'ensemble des solutions y de (1) telles que $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$ dans les trois cas suivants :

(a) $a < 0$,

(b) $a=0$,

(c) $a>0$.

On pourra utiliser le résultat de la question 3e.

RÉPONSE:

D'après la Question (3c), on sait que, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} I_a(x) = 0$.

- *Si $a<0$, pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\lim\limits_{x \to +\infty} \lambda e^{2ax} = 0$. Ainsi, toutes les solutions obtenues à la Question (6) conviennent.*
- *Si $a=0$, il est alors nécessaire de prendre $\lambda = 0$. Il n'y a donc qu'une seule solution qui convienne : $y = I_a$.*
- *Si $a>0$, on ne peut pas prendre $\lambda \neq 0$ car $\lim\limits_{x \to +\infty} \lambda e^{2ax} = \pm\infty$ selon que $\lambda > 0$ ou $\lambda < 0$. Il n'y a alors que $\lambda = 0$ qui convienne, et on a encore une seule solution : $y = I_a$.*

$* * *$

Partie III

On considère une variable aléatoire X de loi normale d'espérance $-a$ et de variance $\frac{1}{2}$.

8. (a) Rappeler l'expression d'une densité de X.

RÉPONSE:

D'après le cours, une densité f de X est donnée par

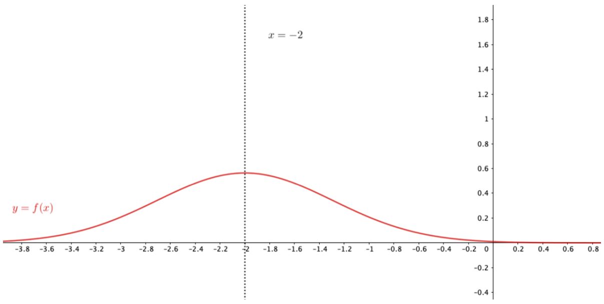
$$\forall x \in \mathbb{R}, \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-(x+a)^2}.$$

$* * *$

(b) Tracer l'allure de sa courbe représentative dans le cas $a=2$.

RÉPONSE:

Pour $a=2$, l'axe de symétrie est donc la droite d'équation $x=-2$. En 0, la fonction vaut $\frac{e^{-4}}{\sqrt{\pi}}$. Cela donne



$* * *$

9. Soit x un réel.

(a) Exprimer $P(X \geqslant x)$ sous forme d'intégrale.

RÉPONSE:

Par définition

$$P(X \geq x) = \int_x^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-(t+a)^2}\mathrm{d}t.$$

* * *

(b) En déduire

$$I_a(x) = \sqrt{\pi} e^{2ax+a^2} P(X \geqslant x).$$

RÉPONSE:

Si on développe

$$(t+a)^2 = t^2 + 2at + a^2$$

et il suit que

$$P(X \geq x) = \frac{e^{-a^2}}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2-2at}\mathrm{d}t = \frac{e^{-a^2-2ax}}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2+2a(x-t)}\mathrm{d}t = \frac{e^{-a^2-2ax}}{\sqrt{\pi}} I_a(x),$$

ou encore, comme demandé,

$$I_a(x) = \sqrt{\pi} e^{2ax+a^2} P(X \geq x).$$

* * *

10. (a) Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.
Déterminer, en fonction de a, deux réels α et β tels que $\alpha Z + \beta$ suit la même loi que X.

RÉPONSE:

Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.
D'après le cours, par transformation affine des lois normales, la variable aléatoire

$$\frac{1}{\sqrt{2}} Z - a$$

suit la loi normale $\mathcal{N}(-a, 1/2)$.

* * *

(b) Recopier et compléter la fonction Python suivante, prenant en arguments d'entrée les réels a et x, pour qu'elle renvoie une estimation de la probabilité $P(X \geqslant x)$.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def estim_proba(a,x):
    num = 0
    for i in range(10000):
        Z = rd.normal()
        X = _____ + Z/ _____
        if _____:
            num = num +1
    return _____
```

RÉPONSE:

Il suffit de simuler X à partir de Z 10000 fois et de compter combien de fois le résultat est supérieur ou égal à x en renvoyant la fréquence d'apparition de ces cas-là, ce qui donne (par la loi faible des grands nombres) une estimation de la probabilité $P(X \geq x)$. Le programme est donc le suivant

```python
import numpy as np
import numpy.random as rd

def estim_proba(a,x) :
    num = 0 # c'est notre compteur
    for i in range(10000):
        Z=rd.normal()
        X= -a + Z/np.sqrt(2)
        if X >= x :
            num = num +1
    return num/10000
```

* * *

11. Écrire une fonction Python, nommée `approx_I`, prenant en arguments d'entrée les réels a et x et renvoyant une valeur approchée de $I_a(x)$.

RÉPONSE:

On utilise les résultats des Question (9b) et (10b).

```python
def approx I(a,x) :
    p=estim_proba(a,x)
    return np.sqrt(pi)*np.exp(2*a*x+a**2)*p
```

* * *

. Problème

On considère une population d'environ 10 000 consommateurs, dont chacun est susceptible d'acheter une voiture, soit de marque étrangère, soit de marque française. Un organisme de sondage interroge 100 consommateurs pris au hasard : 30 se révèlent préférer une marque étrangère (donc 70 une marque française). L'enquète est publiée et influence parfaitement la population dont 30% penche maintenant pour une marque étrangère (70% pour une marque française). Un nouveau sondage est effectué : un échantillon de 100 consommateurs pris au hasard est interrogé, et le résultat publié influence parfaitement la population qui s'aligne sur les préférences de l'échantillon. On recommence le tirage au hasard de 100 consommateurs, et ainsi de suite. Que se passe-t-il après un grand nombre de sondages ?
L'énoncé théorique ci-dessous propose un modèle probabiliste pour répondre à cette question.

- Soit une variable aléatoire X ; on note $E(X)$ l'espérance de X si celle-ci existe.
- On note N un entier supérieur ou égal à 2 et k_0 un entier de $\{0,\ldots,N\}$. On pose $p=\dfrac{k_0}{N}$ et $q=1-p$.
- Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω,A,p), à valeurs dans $\{0,\ldots,N\}$, dont les lois de probabilité sont définies de la manière suivante :
  - X_0 est la variable certaine égale à k_0
    X_1 suit la loi binômiale de paramètres N et p (Par convention, on dit que la loi binômiale de paramètres N et 0 est la loi de la variable aléatoire certaine égale à 0 et que la loi binômiale de paramètres N et 1 est la loi de la variable aléatoire certaine égale à N)
  - Pour tout entier n non nul et tout entier k de $\{0,\ldots,N\}$ tel que $P(X_n=k)\neq 0$, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_n=k)$ est la loi binômiale de paramètres N et $\dfrac{k}{N}$. En d'autres termes : pour tout entier n non nul et tout entier k de $\{0,\ldots,N\}$ tel que $P(X_n=k)\neq 0$, et pour tout i de $\{0,\ldots,N\}$,

$$\mathrm{P}_{[X_n=k]}\left(X_{n+1}=i\right)=\binom{N}{i}\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i} \text{ (avec la convention habituelle } 0^0=1)$$

- On a de plus l'hypothèse (H) : pour tout entier n non nul, pour tout n-uplet $(k_1,\ldots,k_n)$ de $\{0,\ldots,N\}^n$ tel que $p\left(X_n=k_n,\ldots,X_1=k_1\right)\neq 0$, pour tout entier i de $\{0,\ldots,N\}$,

$$\mathrm{P}_{X_n=k_n,\ldots,X_1=k_1}\left(X_{n+1}=i\right)=\mathrm{P}_{X_n=k_n}\left(X_{n+1}=i\right)$$

  Cette hypothèse n'est utile qu'à la question 18. de la partie 2.

- On définit la suite de variable aléatoires $(F_n)_{n\geqslant 0}$ par $F_n=\dfrac{X_n}{N}$

L'énoncé ci-dessous propose une étude des cas $N=2$ et $N=3$. les propriétés mises en évidence par cette étude peuvent se généraliser à une valeur quelcconque de N.

Préléminaires

1. Dans l'exemple ci-dessus, en appelant N la taille de l'échantillon, k_0 le nombre de consommateurs interrogés la première fois et favorables à l'achat d'une marque étrangère, n le rang du sondage, donner une interprétation de la variable X_n et justifier par des arguments tirés du cours, l'utilisation de la loi binômiale. Comment interprèter l'hypothèse (H)?

RÉPONSE:

Dans l'exemple ci-dessus, en appelant N la taille de l'échantillon, k_0 le nombre de consommateurs interrogés la première fois et favorables à l'achat d'une marque étrangère, n le rang du sondage,
On note X_n le nombre de personnes sondées choisissant la marque étrangère.
Quand k personnes choisissent le modèle étrnager, la probabilité pour chacun à l'étape $n+1$ est la fréquence $\dfrac{k}{N}$.
Les choix des N sondés étant indépendants, $X_{n+1}/X_n=k\hookrightarrow\mathcal{B}\left(N,\dfrac{k}{N}\right)$
L'hypothèse (H) précise que les probablité de transition entre n et $n+1$ ne dépend que des réponses à l'étape n.

* * *

On note considère le programme Python suivant :

```
import numpy as np

B=np.array([[1,8/27,1/27,0],[0,4/9,2/9,0],[0,2/9,4/9,0],[0,1/27,8/27,1]])
Y2=np.transpose(np.array([[1,-3,3,-1]]))
Y3=np.transpose(np.array([[1,-1,-1,1]]))
C=B-2/9*np.eye(4)
D=B-2/3*np.eye(4)
print(C.dot(Y2),D.dot(Y3))
```

qui affiche

```
>>> [[0],[0],[0]]
[[0],[0],[0]]
```

2. Donner l'expression de B. Que fait ce programme ?

RÉPONSE:

La matrice B est définie par

$$B=\begin{pmatrix}1 & 8/27 & 1/27 & 0\\ 0 & 4/9 & 2/9 & 0\\ 0 & 2/9 & 4/9 & 0\\ 0 & 1/27 & 8/27 & 1\end{pmatrix}$$

Ce programme définit la matrice B et montre que les vecteurs $Y_2=\begin{pmatrix}1\\-3\\3\\1\end{pmatrix}$ *et* $Y_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix}$ *sont des vecteurs propores de B respectivement associés aux valeurs propres* $\dfrac{2}{9}$ *et* $\dfrac{2}{3}$.

* * *

3. Vérifier que $1\in Sp(B)$ et donner le sous-espace propre associé.

RÉPONSE:

On voit que $B-I_4=\begin{pmatrix}0 & 8/27 & 1/27 & 0\\ 0 & -5/9 & 2/9 & 0\\ 0 & 2/9 & -1/9 & 0\\ 0 & 1/27 & 8/27 & 0\end{pmatrix}$. *Elle est de rang 2 et*

$$(B-I_4)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=0_{4,1}\qquad (B-I_4)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=0_{4,1}$$

Comme $Y_1=\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ *et* $Y_4=\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}$ *forme une famille échelonnée, donc libre, on*

$$E_1(B)=\mathrm{Vect}(Y_1,Y_4)$$

* * *

4. Montrer que B peut s'écrire sous la forme $B=PDP^{-1}$ où $D=\mathrm{diag}[1,2/9,1/3,1]$ et P une matrice inversible à déterminer, de première ligne $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.

RÉPONSE:

Comme $Sp(B)=\{2/9,2/3,1\}$ *avec*

$$dim\ (E_{2/9}(B)+dim\ (E_{2/3}(B)+dim\ (E_1(B)=4$$

et que B est de taille 4, elle est diagonalisable. On note alors

$$D=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2/9 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1/3 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\qquad P=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -3 & -1 & 0\\ 0 & 3 & -1 & 0\\ 0 & -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

et on a la relation $B=PDP^{-1}$.

* * *

5. Calculer P^{-1}.

RÉPONSE:

Un simple calcul d'inverse donne

$$P^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix}$$

* * *

6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = PD^nP^{-1}$ et donner l'expression de B^n sous forme de tableau matriciel.

RÉPONSE:

Récurrence laissé en exercice. On obtient pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$B^n = P\,D^n P^{-1} = P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{9}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} P^{-1}$$

$$\begin{aligned}
B^n &= P\,D^n P^{-1} = \frac{1}{6} P \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \left(\frac{2}{9}\right)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 4 & 2 & 0 \\ 0 & -\left(\frac{2}{9}\right)^n & \left(\frac{2}{9}\right)^n & 0 \\ 0 & -3\left(\frac{1}{3}\right)^n & -3\left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 6 & 4 - \left(\frac{2}{9}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n & 2 + \left(\frac{2}{9}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 3\left(\frac{2}{9}\right)^n + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n & -3\left(\frac{2}{9}\right)^n + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & -3\left(\frac{2}{9}\right)^n + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n & 3\left(\frac{2}{9}\right)^n + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n & 0 \\ 0 & 2 + \left(\frac{2}{9}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n & 4 - \left(\frac{2}{9}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n & 6 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

* * *

Partie 1

Dans cette partie, $N = 2$.

7. (a) On suppose que $k_0 = 0$. Déterminer la loi de X_1.
Que peut-on dire de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$?

RÉPONSE:

On suppose que $k_0 = 0$.
Comme $p = 0$ on a alors X_1 suit la loi binômiale de paramèter $\mathcal{B}(2, 0)$ qui est la variable cerataine égale à 0.
Et i len sera de même pour toute lasuite (X_n) : pour tout n, X_n est la variable certaine égale à 0

* * *

(b) De même si $k_0 = 2$, que peut-on dire de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$?

RÉPONSE:

De même si $k_0 = 2$, on a pour tout entier n, X_n qui est la variable certaine égale à 2.

* * *

On suppose désormais, dans la suite de cette partie, que $k_0 = 1$

8. (a) On note dans cette question, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$u_n = P(X_n = 0)$, $v_n = P(X_n = 1)$ et $w_n = P(X_n = 2)$.
   i. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1} et v_{n+1} en fonction de u_n et v_n.

RÉPONSE:

La famille $([X_n = 0], [X_n = 1], [X_n = 2])$ forme un système complet d'évènements. D'après la formule des probabilités totales :

$$v_{n+1} = P(X_{n+1} = 1) \sum_{k=0}^{2} P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = 1) P(X_n = k)$$

Si $(X_n = 0)$ alors $p = 0$ et X_{n+1} est la variable certaine égale à 0
Si $(X_n = 2)$ alors $p = 1$ et X_{n+1} est la variable certaine égale à 2 Donc $\mathrm{P}_{X_n=0}(X_{n+1} = 1)\,\mathrm{P}(X_n = 0) = 0$ et $\mathrm{P}_{X_n=2}(X_{n+1} = 1)\,\mathrm{P}(X_n = 2) = 0$ et il reste

$$v_{n+1} = \frac{v_n}{2}$$

En raisonnant de manière analogue, on trouve

$$u_{n+1} = u_n + \frac{v_n}{4}$$

* * *

   ii. Montrer que, pour tout entier n, $\mathrm{P}(X_n = 1) = \dfrac{1}{2^n}$

RÉPONSE:

On remarque la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de terme initial $v_0 = P(X_0 = 1) = 1$ donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{1}{2^n}$$

* * *

iii. En déduire que pour tout entier n, $\mathrm{P}(X_n = 0) = \mathrm{P}(X_n = 2) = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{n+1}}$

RÉPONSE:

On trouve l'expression pour tout $n \in \mathbb{N}$, $P(X_n = 0)$ par récurrence.

- **Initialisation :**
  Pour $n = 0$, on sait que $X_0 = 1$ donc $u_0 = 0$. Comme $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{0+1}} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^1} = 0$, l'initialisation est vérifiée.
- **Hérédité :**
  Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose que $u_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

  D'après la questions précédente
  $$u_{n+1} = u_n + \frac{v_n}{2}$$
  En utilisant l'hypothèse de récurrence et la question précédente, on trouve :
  $$u_{n+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+2}}$$
- **Conclusion :**
  Pour tout nßN, $u_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{n+1}}$.

On obtient ensuite
$$P(X_n = 2) = 1 - P(X_n = 1) - P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}$$

* * *

(b) Montrer que la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ converge en loi. Quelle est la loi limite ?

RÉPONSE:

On a donc $\mathrm{P}(F_n = 0) \to \dfrac{1}{2}$: $\mathrm{P}\left(F_n = \dfrac{1}{2}\right) \to 0$ et $\mathrm{P}(F_n = 1) \to \dfrac{1}{2}$ et F_n converge en loi vers la loi deBernouilli de paramètre $\dfrac{1}{2}$

* * *

(c) Calculer $E(X_n)$

RÉPONSE:

$E(X_n) = 0\mathrm{P}(X_n = 0) + 1\mathrm{P}(X_n = 1) + 2\mathrm{P}(X_n = 2)$ et comme $\mathrm{P}(X_n = 2) = \mathrm{P}(X_n = 0)$ on a donc
$$\begin{aligned} E(X_n) &= \mathrm{P}(X_n = 0) + \mathrm{P}(X_n = 1) + \mathrm{P}(X_n = 2) \\ &= 1 \end{aligned}$$

* * *

9. On définit la variable aléatoire T par :
   - si pour tout entier n, $(X_n = 1)$ alors $T = 0$
   - sinon, $T = n$ où n est le plus petit entier k tel que $(X_k = 0)$ ou $(X_k = 2)$.

   (a) Montrer que, pour tout entier n non nul, $\mathrm{P}(T = n) = \mathrm{P}(X_{n-1} = 1) - \mathrm{P}(X_n = 1)$. Que vaut $\mathrm{P}(T = 0)$?

RÉPONSE:

Pour tout entier n non nul, $(T=n)$ signifie que l'on a eu $(X_k=1)$ pour tout $k<n$ et $(X_n=0\cup X_n=2)=(X_n\neq 1)$
On a vu que si $X_k=0$ on a alors $X_i=0$ pour tout $i\geqslant k$ et de même pour $X_k=2$
Remarque : *Donc si $X_{n-1}=1$ alors $X_i=0$ pour tout $i\leqslant k$ (sinon il prendrait la valeur 0 ou 2 et la garderait pour X_{n-1})*
Donc $(T=n)=(X_{n-1}=1)\cap(X_n\neq 1)$
On a alors $\mathrm{P}(T=n)=\mathrm{P}(X_{n-1}=1)\,\mathrm{P}_{X_n=1}(X_n\neq 1)$
que l'on transforme par l'événement contraire :

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(T=n) &= \mathrm{P}(X_{n-1}=1)\left[1-\mathrm{P}_{X_n=1}(X_n=1)\right]\\ &= \mathrm{P}(X_{n-1}=1)-\mathrm{P}(X_{n-1}=1)\,\mathrm{P}_{X_n=1}(X_n=1)\\ &= \mathrm{P}(X_{n-1}=1)-\mathrm{P}(X_{n-1}=1\cap X_n=1)\\ &= \mathrm{P}(X_{n-1}=1)-\mathrm{P}(X_n=1)\end{aligned}$$

d'arpès la remarque précédente.
N.B. *on aurait pu passer aussi par $(T=n)=(X_{n-1}=1)\setminus(X_n=1)$ et comme $(X_n=1)\subset(X_{n-1}=1)$ alors*
Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(T=n)=\mathrm{P}(X_{n-1}=1)-\mathrm{P}(X_n=1)}$
$(T=0)$ signifie que X_k ne prensd que la valeur 1 : $(T=0)=\bigcap_{k=1}^{\infty}(X_k=1)$ et comme la suite d'événments est décroissante $((X_{k+1}=1)\subset(X_k=1)$),
Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(T=0)=\lim_{n\to+\infty}\mathrm{P}(X_n=1)=0}$

* * *

(b) Reconnaitre la loi de T et déterminer $E(T)$

RÉPONSE:

On a pour tout entier $n\neq 0$:
$\mathrm{P}(T=n)=\mathrm{P}(X_{n-1}=1)-\mathrm{P}(X_n=1)=\dfrac{1}{2^{n-1}}-\dfrac{1}{2^n}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)$ *et* $T\hookrightarrow\mathcal{G}\left(\dfrac{1}{2}\right)$
(la formule est vraie pour $n-1=1$ où $\mathrm{P}(X_0=1)=1=\dfrac{1}{2^0}$)
C'est la loi du premier succès (avoir 0 ou 2) dans une suite d'expériences pas du tout indépendantes et dont la probabilité de succès n'est absolument pas constante !

* * *

Partie 2

Dans cette partie , $N=3$.

10. Que dire de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ si $k_0=0$? Si $k_0=3$?

RÉPONSE:

Si $k_0=0$ ou 3 alors la suite est constante (comme on l'a vu dans le cas $N=2$)

* * *

On suppose désormais, dans la suite de cette partie que $k_0=1$.

11. Etant donné un entier n, déterminer $\mathrm{P}(X_{n+1}=0)$ en fonction des valeurs de $\mathrm{P}(X_n=k)\,,\, k\in\{0,1,2,3\}$
Déterminer de même $\mathrm{P}(X_{n+1}=1)\,,\quad \mathrm{P}(X_{n+1}=1)$ et $\mathrm{P}(X_{n+1}=3)$
Pour tout entier n, on pose

$$U_n=\big(\mathrm{P}(X_n=0)\quad \mathrm{P}(X_n=1)\quad \mathrm{P}(X_n=2)\quad \mathrm{P}(X_n=3)\big)$$

Vérifier que $U_{n+1}=U_nA$ où $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ 8/27&4/9&2/9&1/27\\ 1/27&2/9&4/9&8/27\\ 0&0&0&1\end{pmatrix}$.

RÉPONSE:

On utilise là encore la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements $(X_n=0\,,X_n=1\,,\ X_n=$
Donc

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(X_{n+1}=0) &= \mathrm{P}_{X_n=0}(X_{n+1}=0)\,\mathrm{P}(X_n=0)+\mathrm{P}_{X_n=1}(X_{n+1}=0)\,\mathrm{P}(X_n=1)\\ &\quad +\mathrm{P}_{X_n=2}(X_{n+1}=0)\,\mathrm{P}(X_n=2)+\mathrm{P}_{X_n=3}(X_{n+1}=0)\,\mathrm{P}(X_n=3)\\ &= \mathrm{P}(X_n=0)+\left(\frac{2}{3}\right)^3\mathrm{P}(X_n=1)+\left(\frac{1}{3}\right)^3\mathrm{P}(X_n=2)\\ &= \mathrm{P}(X_n=0)+\frac{8}{27}\mathrm{P}(X_n=1)+\frac{1}{27}\mathrm{P}(X_n=2)\end{aligned}$$

car la loi conditionnelle de X_{n+1} *est* $\mathcal{B}\left(3,\frac{1}{3}\right)$ *si* $(X_n=1)\,,\ \mathcal{B}\left(3,\frac{2}{3}\right)$ *si* $(X_n=2)$ *et la loi certaine égale à* 3 *si* $(X_n=3)$
et on a de même :

- $\mathrm{P}_{X_n=0}(X_{n+1}=1)=0:\mathrm{P}_{X_n=1}(X_{n+1}=1)=3\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{4}{9}:$

  $\mathrm{P}_{X_n=2}(X_{n+1}=1)=3\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{2}{9}:\mathrm{P}_{X_n=3}(X_{n+1}=1)=0$

  donc $\mathrm{P}(X_{n+1}=1)=\frac{4}{9}\mathrm{P}(X_n=1)+\frac{2}{9}\mathrm{P}(X_n=2)$
- $\mathrm{P}_{X_n=1}(X_{n+1}=2)=3\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{2}{3}=\frac{2}{9}:\mathrm{P}_{X_n=2}(X_{n+1}=2)=3\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{3}=\frac{4}{9}$

  donc $\mathrm{P}(X_{n+1}=2)=\frac{4}{9}\mathrm{P}(X_n=1)+\frac{2}{9}\mathrm{P}(X_n=2)$
- $\mathrm{P}_{X_n=1}(X_{n+1}=3)=\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}:\mathrm{P}_{X_n=2}(X_{n+1}=1)=\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{8}{27}$

  donc $\mathrm{P}(X_{n+1}=3)=\frac{1}{27}\mathrm{P}(X_n=1)+\frac{8}{27}\mathrm{P}(X_n=2)+\mathrm{P}(X_n=3)$

Donc

$$\begin{aligned}&\big(\mathrm{P}(X_{n+1}=0)\quad \mathrm{P}(X_{n+1}=1)\quad \mathrm{P}(X_{n+1}=2)\quad \mathrm{P}(X_{n+1}=3)\big)\\ &=\left(\mathrm{P}(X_n=0)+\frac{8}{27}\mathrm{P}(X_n=1)+\frac{1}{27}\mathrm{P}(X_n=2)\quad \dots\quad \dots\quad \frac{1}{27}\mathrm{P}(X_n=1)+\frac{8}{27}\mathrm{P}(X_n=2)+\mathrm{P}(X_n=3)\right)\\ &=\big(\mathrm{P}(X_n=0)\quad \mathrm{P}(X_n=1)\quad \mathrm{P}(X_n=2)\quad \mathrm{P}(X_n=3)\big)\begin{pmatrix}1&0&0&0\\ 8/27&4/9&2/9&1/27\\ 1/27&2/9&4/9&8/27\\ 0&0&0&1\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{U_{n+1}=U_nA}$

* * *

12. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = U_0 A^n$.

RÉPONSE:

Récurrence laissée en exercice.

* * *

13. (a) Soit le vecteur colonne $V = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Calculer AV.

RÉPONSE:

Un simple calcul donne $AV = V$. On en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A^n V = V$.

* * *

(b) Montrer que $E(X_n) = U_n V$ pour tout entier n. En déduire la valeur de $E(X_n)$

RÉPONSE:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n V = \begin{pmatrix} \mathrm{P}(X_n = 0) & \mathrm{P}(X_n = 1) & \mathrm{P}(X_n = 2) & \mathrm{P}(X_n = 3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \mathrm{P}(X_n = 1) + 2\mathrm{P}(X_n = 2) + 3\mathrm{P}(X_n = 3) = E(X_n$$

Donc

$$E(X_n) = U_n V = U_0 A^n V = U_0 V = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 1$$

* * *

14. (a) Soit le vecteur colonne $W = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer AW.

RÉPONSE:

Un simple calcul donne $AW = \frac{2}{3} W$. Une récurrence immédiate donne $A^n W = \left(\frac{2}{3}\right)^n W$.

* * *

(b) Soit n un entier naturel. Montrer que $E(X_n(3 - X_n)) = U_n W$. en déduire que $E(X_n(3 - X_n)) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n$

RÉPONSE:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$U_n W = 2P(X_n = 1) + 2P(X_n = 2)$$

Or d'après le théorème de transfert

$$\begin{aligned} E\left(X_n\left(3-X_n\right)\right) &= 0\,(3-0)\,\mathrm{P}\left(X_n=0\right)+1\,(3-1)\,\mathrm{P}\left(X_n=1\right) \\ & \quad +2\,(3-2)\,\mathrm{P}\left(X_n=2\right)+3\,(3-3)\left(X_n=2\right) \\ &= 2\mathrm{P}\left(X_n=1\right)+2\mathrm{P}\left(X_n=2\right) \\ &= U_n W \end{aligned}$$

donc

$$E(X_n)=U_0A^nW=\left(\frac{2}{3}\right)^n\begin{pmatrix}0 & 1 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix}=2\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

* * *

(c) En déduire que pour tout entier n, $\mathrm{P}\left(X_n=1\right)+\mathrm{P}\left(X_n=2\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

RÉPONSE:

Comme $E\left(X_n\left(3-X_n\right)\right)=2\mathrm{P}\left(X_n=1\right)+2\mathrm{P}\left(X_n=2\right)$ *alors* $\mathrm{P}\left(X_n=1\right)+\mathrm{P}\left(X_n=2\right)=\frac{1}{2}E\left(X_n\left(3-X_n\right)\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^n$.

Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}\left(X_n=1\right)+\mathrm{P}\left(X_n=2\right)=\left(\frac{2}{3}\right)^n}$

* * *

(d) A l'aide des questions 13. et 14.c, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{P}\left(X_n=i\right)$ pour tout entier i de $\{0,1,2,3\}$.

RÉPONSE:

Comme $\left|\frac{2}{3}\right|<1$ *alors* $\left(\frac{2}{3}\right)^n\to 0$ *et comme les probabilités sont positives, par encadrement* $\mathrm{P}\left(X_n=1\right)\to 0$ *et* $\mathrm{P}\left(X_n=2\right)\to 0$
En réutilisant l'espérance de X_n *:*
$1=E\left(X_n\right)=\mathrm{P}\left(X_n=1\right)+2\mathrm{P}\left(X_n=2\right)+3\mathrm{P}\left(X_n=2\right)$
alors $\mathrm{P}\left(X_n=2\right)=\frac{1}{3}\left(1-\mathrm{P}\left(X_n=1\right)-2\mathrm{P}\left(X_n=2\right)\right)\to\frac{1}{3}$
Enfin, $\left(X_n=0\,,X_n=1\,,\,X_n=2\,,\,X_n=3\right)$ *étant un système complet d'événements,*
$\mathrm{P}\left(X_n=0\right)+\mathrm{P}\left(X_n=1\right)+\mathrm{P}\left(X_n=2\right)+\mathrm{P}\left(X_n=2\right)=1$ *et donc*
$\mathrm{P}\left(X_n=0\right)=1-\mathrm{P}\left(X_n=1\right)-\mathrm{P}\left(X_n=2\right)-\mathrm{P}\left(X_n=2\right)\to\frac{2}{3}$

Conclusion : $\boxed{\begin{array}{ll}\textit{Quand } n\to+\infty: & \mathrm{P}\left(X_n=0\right)\to\frac{2}{3}:\mathrm{P}\left(X_n=1\right)\to 0\\ & \mathrm{P}\left(X_n=2\right)\to 0:\mathrm{P}\left(X_n=3\right)\to\frac{1}{3}\end{array}}$

* * *

(e) Montrer que la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ converge en loi . Quelle est la limite ?

RÉPONSE:

omme $F_n=\frac{X_n}{3}$ $\mathrm{P}\left(F_n=0\right)\to\frac{2}{3}:\mathrm{P}\left(F_n=\frac{1}{3}\right)\to 0:\mathrm{P}\left(F_n=\frac{2}{3}\right)\to 0$ *et* $\mathrm{P}\left(F_n=1\right)\to\frac{1}{3}$

Conclusion : $\boxed{(F_n)_{n\geq 0}\textit{ converge en loi vers une loi de Bernouilli de paramètre }\frac{1}{3}}$

* * *

(f) Déterminer le premier entier n tel que $\mathrm{P}(F_n = 0 \text{ ou } F_n = 1) > 0,95$.

RÉPONSE:

On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(F_n = 0 \ ou \ F_n = 3) &= \mathrm{P}(X_n = 0 \cup X_n = 3) \\
&= 1 - \mathrm{P}(X_n = 1 \cup X_n = 2) \ \textit{incompatibles} \\
&= 1 - [\mathrm{P}(X_n = 1) + \mathrm{P}(X_n = 2)] \\
&= 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(F_n = 0 \ ou \ F_n = 3) > 0,95 &\iff \left(\frac{2}{3}\right)^n < \ln(0,05) \\
&\iff n \ln\left(\frac{2}{3}\right) < \ln(0,05) \\
&\iff n > \ln(0,05) / \ln\left(\frac{2}{3}\right) \simeq 7,3
\end{aligned}$$

Conclusion : $\boxed{n = 8 \ \textit{est le plu spetit entier tel que} \ \mathrm{P}(F_n = 0 \ ou \ F_n = 3) > 0,95}$

* * *

15. Quel lien peut-on faire entre les matrices A et B ?

RÉPONSE:

$A =^t B$.

* * *

16. (a) Monter que la loi de X_n est donéne par :

$$\mathrm{P}(X_n = 0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n \quad \mathrm{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$$
$$\mathrm{P}(X_n = 2) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{9}\right)^n\right) \quad \mathrm{P}(X_n = 3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n$$

RÉPONSE:

Pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$U_n = U_0 A^n = U_0\, {}^t(B^n) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Il s'agit de la deuxième ligne de la transposée de B^n et donc de la deuxième colonne de B^n :

$$U_n = \frac{1}{6}\left(4 - \left(\frac{2}{9}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad | \quad 3\left(\frac{2}{9}\right)^n + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad | \quad -3\left(\frac{2}{9}\right)^n + 3\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad | \quad 2 + \left(\frac{2}{9}\right)^n - 3\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)$$

En développant on retombe bien sur

$$\mathrm{P}(X_n = 0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n - \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n \quad \mathrm{P}(X_n = 1) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n + \left(\frac{2}{9}\right)^n\right)$$
$$\mathrm{P}(X_n = 2) = \frac{1}{2}\left(\left(\frac{2}{3}\right)^n - \left(\frac{2}{9}\right)^n\right) \quad \mathrm{P}(X_n = 3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{6}\left(\frac{2}{9}\right)^n$$

* * *

(b) Retrouver le résultat de la question 14.e.

RÉPONSE:

Comme $\left|\dfrac{2}{3}\right| < 1$ *et* $\left|\dfrac{2}{9}\right| < 1$ *ces différentes quantités tendent respectivement vers* $\dfrac{2}{3}$, 0, 0 *et* $\dfrac{1}{3}$ *comme trouvé au* ***4.e)***

$* * *$

17. On définir la variable aléatoire T par :
    - si pour tout entier n, $(X_n \neq 0)$ et $(X_n \neq 3)$, alors $T = 0$
    - sinon, $T = n$ où n ets le plus petit entier k tel que $(X_k = 0)$ ou $(X_k = 3)$

    On pose pour tout entier n, $v_n = \mathrm{P}(X_n = 1) + p(X_n = 2)$

    (a) Montrer que pour tout entier n non nul, $\mathrm{P}(T = n) = v_{n-1} - v_n$. Que vaut $\mathrm{P}(T = 0)$?

RÉPONSE:

On a $(T_n = n) = (X_n = 0 \cup X_n = 3) \cap (X_{n-1} = 1 \cup X_{n-1} = 2)$,
$(T_n = n) = \overline{(X_n = 1 \cup X_n = 2)} \cap (X_{n-1} = 1 \cup X_{n-1} = 2)$
$= (X_{n-1} = 1 \cup X_{n-1} = 2) \setminus (X_n = 1 \cup X_n = 2)$
Comme $(X_n = 1 \cup X_n = 2) \subset (X_{n-1} = 1 \cup X_{n-1} = 2)$ *alors*

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(T_n = n) &= \mathrm{P}(X_{n-1} = 1 \cup X_{n-1} = 2) - \mathrm{P}(X_n = 1 \cup X_n = 2) \\ &= v_{n-1} - v_n \end{aligned}$$

Avec $\mathrm{P}(T = 0) = \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} (X_n = 1 \cup X_n = 2)\right) = \lim_{n \to +\infty} \mathrm{P}(X_n = 1 \cup X_n = 2) = 0$

$* * *$

(b) Reconnaitre la loi de T et donner $E(T)$

RÉPONSE:

Pour tout entier n *on a :* $v_n = \mathrm{P}(X_n = 1) + \mathrm{P}(X_n = 2) = \left(\dfrac{2}{3}\right)^n$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\mathrm{P}(T = n) = v_{n-1} - v_n = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1} - \left(\dfrac{2}{3}\right)^n = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

Conclusion : $\boxed{\text{Et donc } T \hookrightarrow \mathcal{G}\left(\frac{1}{3}\right) \text{ et } E(T) = 3}$

(en moyenne, au bout de trois sondage l'opinion a basculé)

$* * *$

18. Pour tout entier n non nul, on définit l'événement $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leqslant 1)$

    On pose $x_1 = \mathrm{P}(X_1 = 0)$, pour tout entier k supérieur ou égal à 2,
    $x_k = \mathrm{P}(X_1 = 1, \ldots, X_{k-1} = 1, X_k = 0)$, et pour tout entier k non nul,
    $y_k = \mathrm{P}(X_1 = 1, \ldots, X_{k-1} = 1, X_k = 1)$

    (a) Exprimer pour tout entier k non nul, x_{k+1} et y_{k+1} en fonction de y_k. En déduire les valeurs de x_n et y_n pour tout entier n non nul.

RÉPONSE:

Pour tout entier n *non nul, on définit l'événement* $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leqslant 1)$

On pose $x_1 = \mathrm{P}(X_1 = 0)$, *pour tout entier* k *supérieur ou égal à 2,*

$$x_k = \mathrm{P}(X_1 = 1, \ldots, X_{k-1} = 1, X_k = 0),$$

et pour tout entier k non nul, $y_k = \mathrm{P}(X_1 = 1, \ldots, X_{k-1} = 1, X_k = 1)$
On a

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= \mathrm{P}(X_1 = 1 \cap \cdots \cap X_k = 1 \cap X_{k+1} = 0) \\ &= \mathrm{P}(X_1 = 1 \cap \cdots \cap X_k = 1)\, \mathrm{P}_{X_k=1}(X_{k+1} = 0) \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse (H)
Donc $x_{k+1} = y_k \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^0 \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{8}{27} y_k$
De même $y_{k+1} = \mathrm{P}(X_1 = 1 \cap \ldots X_{k+1} = 1) = \mathrm{P}(X_1 = 1 \cap \cdots \cap X_k = 1)\, \mathrm{P}_{X_k=1}(X_{k+1} = 1)$
et $y_{k+1} = y_k \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \left(\frac{1}{3}\right)^1 \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} y_k$
Le suite y est donc géométrique de raison $\frac{4}{9}$ *et de premier terme* $y_1 = \frac{4}{9}$ *d'où* $y_n = \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \frac{4}{9} = \left(\frac{4}{9}\right)^n$
D'où $x_n = \frac{8}{27} y_{n-1} = \left(\frac{4}{9}\right)^{n-1} \frac{8}{27} = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^n$ *pour tout* $n - 1 \geqslant 1$ *(donc à partir de* $n = 2$*)*
et pour $x_1 = \frac{8}{27}$ *donc*
Conclusion : $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N}^* : x_n = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^n \text{ et } y_n = \left(\frac{4}{9}\right)^n}$

* * *

(b) Montrer que $\mathrm{P}(B_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k + y_n$. En déduire $\mathrm{P}(B_n)$ et la limite de la suite $(\mathrm{P}(B_n))_{n \geqslant 1}$

RÉPONSE:

$\bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leqslant 1)$ *signifie que les valeurs de*X_k *n'ont été que* 0 *ou* 1*.*
Or, dès que X_k prend la valeur 0, tous les suivants sont également nuls.
$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} \left[\left(\bigcap_{i=0}^{k-1} X_i = 1\right) \cap (X_k = 0)\right] \cup \left(\bigcap_{i=0}^{n} X_i = 1\right)$
Les évenments étant incompatibles,
$\mathrm{P}(B_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{P}\left[\left(\bigcap_{i=0}^{k-1} X_i = 1\right) \cap (X_k = 0)\right] + \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=0}^{n} X_i = 1\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k + y_n$
Comme $y_n \to 0$ *il reste* $\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^k$ *et en réindexant* $h = k - 1$ *:*

$$\mathrm{P}(B_n) = \sum_{h=0}^{n-1} \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9}\right)^{h+1} = \frac{8}{27} \sum_{h=0}^{n} \left(\frac{4}{9}\right)^h \to \frac{8}{27} \frac{1}{1 - \frac{4}{9}}$$

car $\left|\frac{4}{9}\right| < 1$
Conclusion : $\boxed{\mathrm{P}(B_n) \to \frac{8}{15}}$
Donc la probabilité que l'opinion finisse par basculer totalement pour le 0 est de 8/15

* * *

(c) En déduire la probabilté qu'il existe un entier n vérifiant $F_n \geqslant 0,5$

RÉPONSE:

$F_n \geqslant 0,5$ signifie que $X_n = 2$ ou 3

(il existe un entier n vérifiant $F_n \geqslant 0,5$) est donc $\displaystyle\bigcup_{n=1}^{+\infty}(X_n > 1)$ événment contraire de $\displaystyle\bigcap_{n=1}^{+\infty}(X_n \leqslant 1)$

dont la probabiltié est $\displaystyle\lim_{N\to+\infty} \mathrm{P}\left(\bigcap_{n=1}^{N}(X_n \leqslant 1)\right) = \frac{8}{15}$

Conclusion : $\boxed{\text{la probabilité qu'il existe } n \text{ tel que } F_n \geqslant 0,5 \text{ est de } \dfrac{7}{15}}$

$* * *$