Devoir Surveillé n°8

Option économique

MATHEMATIQUES

15 Mars 2025

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document ; l'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite. Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.
Si au cours de l'épreuve un candidat repère ce qui lui semble une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

. Exercice n°1

Pour tout réel $x > 0$, on pose :

$$g(x) = \exp\left(\left(2 - \frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

Partie I : Étude de la fonction g

1. Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$.
2. Soit h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0, \quad h(x) = \ln(x) + 2x - 1$$

   (a) Démontrer que la fonction h est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   (b) Démontrer qu'il existe un unique réel $\alpha > 0$ tel que $h(\alpha) = 0$. Justifier que $\dfrac{1}{2} < \alpha < 1$.

   (c) Démontrer que : $\forall x > 0$, $g'(x) = \dfrac{1}{x^2} h(x)\, g(x)$.

   (d) En déduire les variations de la fonction g sur $\mathbb{R}_+^*$.

3. Démontrer que :

$$g(x) - x^2 \underset{x \to +\infty}{\sim} -x\ln(x)$$

Partie II : Étude d'une suite récurrente

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par son premier terme $u_0 > 0$ et la relation de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = g(u_n)$$

4. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, u_n existe et $u_n > 0$.
5. Écrire une fonction Python d'en tête `def suite(u0, n):` qui prend en argument un réel `u0` et un entier `n` et renvoie sous forme de matrice ligne la liste des $n+1$ premières valeurs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de premier terme $u_0 =$`u0`.

6. (a) Étudier le signe de $(x-1)\ln(x)$ pour $x>0$.

   (b) Montrer que : $\forall x>0,\ \dfrac{g(x)}{x}\geqslant 1$.

   (c) En déduire que pour tout réel $x>0$, on a $g(x)\geqslant x$, et que l'équation $g(x)=x$ admet 1 comme unique solution.

7. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

8. **Dans cette question uniquement**, on suppose que $u_0\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

   (a) Démontrer que : $\forall n\in\mathbb{N},\ u_n\in\left[\dfrac{1}{2},1\right]$.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, et déterminer sa limite.

Partie III : Extrema de la fonction f

Pour tout couple $(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$, on note :

$$f(x,y)=x^{y-\frac{1}{x}}=\exp\left(\left(y-\frac{1}{x}\right)\ln(x)\right)$$

11. Démontrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur l'ouvert $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$.

12. Démontrer que :

$$\forall(x,y)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R},\quad \begin{cases}\partial_1(f)(x,y) & = & \dfrac{\ln(x)+xy-1}{x^2}f(x,y)\\[2mm] \partial_2(f)(x,y) & = & \ln(x)\,f(x,y)\end{cases}$$

13. Montrer que la fonction f admet un unique point critique a et préciser les coordonnées de a.

14. Montrer que la matrice hessienne de f au point a est $\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$.

15. La fonction f admet-elle en a un extremum local ?

16. Démontrer que la fonction f n'admet pas d'extremum global sur $\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}$.

. Exercice n°2

Soit a un réel. On considère la fonction I_a définie par :

$$I_a(x)=\int_x^{+\infty}e^{2a(x-t)-t^2}\ \mathrm{d}t$$

On considère également l'intégrale J_a définie par :

$$J_{\mathrm{a}}=\int_0^{+\infty}e^{-2at-t^2}\ \mathrm{d}t$$

Partie I

1. (a) Montrer la relation suivante :

$$e^{-2at-t^2}\underset{t\to+\infty}{=}o\left(\frac{1}{t^2}\right)$$

   (b) En déduire que l'intégrale J_a est convergente.

2. En déduire que la fonction I_a est définie sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Justifier que

$$\lim_{x\to+\infty}\int_x^{+\infty}e^{-2at-t^2}\ \mathrm{d}t=0.$$

(b) Dans cette question uniquement, on suppose que a est positif.
Montrer que, pour tout réel x :

$$I_a(x) \leqslant \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$$

(c) Déduire des deux questions précédentes que, quelle que soit la valeur du réel a : $\lim\limits_{x\to+\infty} I_a(x) = 0$.

Partie II

On considère l'équation différentielle suivante, d'inconnue $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ dérivable :

$$y' = 2ay - e^{-x^2}. \tag{1}$$

Dans cette partie, on s'intéresse aux solutions de l'équation (1) qui vérifient $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.
On considère l'équation homogène associée à (1) :

$$y' = 2ay. \tag{2}$$

4. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation homogène (2).
5. On considère la fonction F_a définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_a(x) = \int_0^x e^{-2at-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

   (a) Montrer que F_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et, pour tout réel x, déterminer $F_a'(x)$.
   (b) Montrer que, pour tout réel x,

$$I_a(x) = e^{2ax}\Big(J_a - F_a(x)\Big).$$

   (c) En déduire que la fonction I_a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution de l'équation différentielle (1).
6. Déterminer l'ensemble des solutions de (1).
7. Déterminer l'ensemble des solutions y de (1) telles que $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$ dans les trois cas suivants :

   (a) $a < 0$,
   (b) $a = 0$,
   (c) $a > 0$.

On pourra utiliser le résultat de la question 3e.

Partie III

On considère une variable aléatoire X de loi normale d'espérance $-a$ et de variance $\dfrac{1}{2}$.

8. (a) Rappeler l'expression d'une densité de X.
   (b) Tracer l'allure de sa courbe représentative dans le cas $a = 2$.
9. Soit x un réel.

   (a) Exprimer $P(X \geqslant x)$ sous forme d'intégrale.
   (b) En déduire

$$I_a(x) = \sqrt{\pi}e^{2ax+a^2}P(X \geqslant x).$$

10. (a) Soit Z une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.
    Déterminer, en fonction de a, deux réels α et β tels que $\alpha Z + \beta$ suit la même loi que X.

(b) Recopier et compléter la fonction Python suivante, prenant en arguments d'entrée les réels a et x, pour qu'elle renvoie une estimation de la probabilité $P(X \geqslant x)$.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def estim_proba(a,x):
    num = 0
    for i in range(10000):
        Z = rd.normal()
        X = _____ + Z/ _____
        if _____:
            num = num +1
    return _____
```

11. Écrire une fonction Python, nommée `approx_I`, prenant en arguments d'entrée les réels a et x et renvoyant une valeur approchée de $I_a(x)$.

. Problème

On considère une population d'environ 10 000 consommateurs, dont chacun est susceptible d'acheter une voiture, soit de marque étrangère, soit de marque française. Un organisme de sondage interroge 100 consommateurs pris au hasard : 30 se révèlent préférer une marque étrangère (donc 70 une marque française). L'enquète est publiée et influence parfaitement la population dont 30% penche maintenant pour une marque étrangère (70% pour une marque française). Un nouveau sondage est effectué : un échantillon de 100 consommateurs pris au hasard est interrogé, et le résultat publié influence parfaitement la population qui s'aligne sur les préférences de l'échantillon. On recommence le tirage au hasard de 100 consommateurs, et ainsi de suite. Que se passe-t-il après un grand nombre de sondages ?
L'énoncé théorique ci-dessous propose un modèle probabiliste pour répondre à cette question.

- Soit une variable aléatoire X ; on note $E(X)$ l'espérance de X si celle-ci existe.
- On note N un entier supérieur ou égal à 2 et k_0 un entier de $\{0,\ldots,N\}$. On pose $p=\dfrac{k_0}{N}$ et $q=1-p$.
- Soit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires définies sur un espace probabilisé (Ω, A, p), à valeurs dans $\{0,\ldots,N\}$, dont les lois de probabilité sont définies de la manière suivante :
  - X_0 est la variable certaine égale à k_0
    X_1 suit la loi binômiale de paramètres N et p (Par convention, on dit que la loi binômiale de paramètres N et 0 est la loi de la variable aléatoire certaine égale à 0 et que la loi binômiale de paramètres N et 1 est la loi de la variable aléatoire certaine égale à N)
  - Pour tout entier n non nul et tout entier k de $\{0,\ldots,N\}$ tel que $P(X_n=k)\neq 0$, la loi conditionnelle de X_{n+1} sachant $(X_n=k)$ est la loi binômiale de paramètres N et $\dfrac{k}{N}$. En d'autres termes : pour tout entier n non nul et tout entier k de $\{0,\ldots,N\}$ tel que $P(X_n=k)\neq 0$, et pour tout i de $\{0,\ldots,N\}$,

$$\mathrm{P}_{[X_n=k]}(X_{n+1}=i)=\binom{N}{i}\left(\frac{k}{N}\right)^i\left(1-\frac{k}{N}\right)^{N-i} \text{(avec la convention habituelle } 0^0=1)$$

- On a de plus l'hypothèse (H) : pour tout entier n non nul, pour tout n-uplet $(k_1,\ldots,k_n)$ de $\{0,\ldots,N\}^n$ tel que $p(X_n=k_n,\ldots,X_1=k_1)\neq 0$, pour tout entier i de $\{0,\ldots,N\}$,

$$\mathrm{P}_{X_n=k_n,\ldots,X_1=k_1}(X_{n+1}=i)=\mathrm{P}_{X_n=k_n}(X_{n+1}=i)$$

  Cette hypothèse n'est utile qu'à la question 18. de la partie 2.
- On définit la suite de variable aléatoires $(F_n)_{n\geqslant 0}$ par $F_n=\dfrac{X_n}{N}$

L'énoncé ci-dessous propose une étude des cas $N=2$ et $N=3$. les propriétés mises en évidence par cette étude peuvent se généraliser à une valeur quelcconque de N.

Préléminaires

1. Dans l'exemple ci-dessus, en appelant N la taille de l'échantillon, k_0 le nombre de consommateurs interrogés la première fois et favorables à l'achat d'une marque étrangère, n le rang du sondage, donner une interprétation de la variable X_n et justifier par des arguments tirés du cours, l'utilisation de la loi binômiale. Comment interprèter l'hypothèse (H)?

On note considère le programme Python suivant :

```
import numpy as np

B=np.array([[1,8/27,1/27,0],[0,4/9,2/9,0],[0,2/9,4/9,0],[0,1/27,8/27,1]])
Y2=np.transpose(np.array([[1,-3,3,-1]]))
Y3=np.transpose(np.array([[1,-1,-1,1]]))
C=B-2/9*np.eye(4)
D=B-2/3*np.eye(4)
print(C.dot(Y2),D.dot(Y3))
```

qui affiche

```
>>> [[0],[0],[0]]
[[0],[0],[0]]
```

2. Donner l'expression de B. Que fait ce programme ?
3. Vérifier que $1 \in Sp(B)$ et donner le sous-espace propre associé.
4. Montrer que B peut s'écrire sous la forme $B = PDP^{-1}$ où $D = \text{diag}[1, 2/9, 1/3, 1]$ et P une matrice inversible à déterminer, de première ligne $\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$.
5. Calculer P^{-1}.
6. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $B^n = PD^nP^{-1}$ et donner l'expression de B^n sous forme de tableau matriciel.

Partie 1

Dans cette partie, $N = 2$.

7. (a) On suppose que $k_0 = 0$. Déterminer la loi de X_1.
   Que peut-on dire de la suite $(X_n)_{n \geqslant 0}$?
   (b) De même si $k_0 = 2$, que peut-on dire de la suite $(X_n)_{n \geqslant 0}$?

   On suppose désormais, dans la suite de cette partie, que $k_0 = 1$

8. (a) On note dans cette question, pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $u_n = P(X_n = 0)$, $v_n = P(X_n = 1)$ et $w_n = P(X_n = 2)$.
      i. Pour $n \in \mathbb{N}$, exprimer u_{n+1}, v_{n+1} et w_{n+1} en fonction de u_n, v_n et w_n.
      ii. Montrer que, pour tout entier n, $v_n = \dfrac{1}{2^n}$
      iii. En déduire que pour tout entier n, $u_n = w_n = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2^{n+1}}$
   (b) Montrer que la suite $(F_n)_{n \geqslant 0}$ converge en loi. Quelle est la loi limite ?
   (c) Calculer $E(X_n)$.
9. On définit la variable aléatoire T par :
   - si pour tout entier n, $(X_n = 1)$ alors $T = 0$
   - sinon, $T = n$ où n est le plus petit entier k tel que $(X_k = 0)$ ou $(X_k = 2)$.

   (a) Montrer que, pour tout entier n non nul, $\mathrm{P}(T = n) = \mathrm{P}(X_{n-1} = 1) - \mathrm{P}(X_n = 1)$. Que vaut $\mathrm{P}(T = 0)$?
   (b) Reconnaitre la loi de T et déterminer $E(T)$.

Partie 2

Dans cette partie , $N=3$.

10. Que dire de la suite $(X_n)_{n\geqslant 0}$ si $k_0=0$? Si $k_0=3$?
   On suppose désormais, dans la suite de cette partie que $k_0=1$.
11. Etant donné un entier n, déterminer $\mathrm{P}(X_{n+1}=0)$ en fonction des valeurs de $\mathrm{P}(X_n=k)$, $k\in\{0,1,2,3\}$.
   Déterminer de même $\mathrm{P}(X_{n+1}=1)$, $\mathrm{P}(X_{n+1}=2)$ et $\mathrm{P}(X_{n+1}=3)$
   Pour tout entier n, on pose
   $$U_n=\begin{pmatrix}\mathrm{P}(X_n=0) & \mathrm{P}(X_n=1) & \mathrm{P}(X_n=2) & \mathrm{P}(X_n=3)\end{pmatrix}$$
   Vérifier que $U_{n+1}=U_nA$ où $A=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\8/27&4/9&2/9&1/27\\1/27&2/9&4/9&8/27\\0&0&0&1\end{pmatrix}$.
12. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $U_n=U_0A^n$.
13. (a) Soit le vecteur colonne $V=\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$.
   Calculer AV et en déduire la valeur, pour tout $n\in\mathbb{N}$, de A^nV.
   (b) Montrer que $E(X_n)=U_nV$ pour tout entier n. En déduire la valeur de $E(X_n)$.
14. (a) Soit le vecteur colonne $W=\begin{pmatrix}0\\2\\2\\0\end{pmatrix}$. Calculer AW.
   (b) Soit n un entier naturel.
   Montrer que $E(X_n(3-X_n))=U_nW$. en déduire que $E(X_n(3-X_n))=2\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$
   (c) En déduire que pour tout entier n, $\mathrm{P}(X_n=1)+\mathrm{P}(X_n=2)=\left(\dfrac{2}{3}\right)^n$.
   (d) A l'aide des questions 13. et 14.c, déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty}\mathrm{P}(X_n=i)$ pour tout entier i de $\{0,1,2,3\}$.
   (e) Montrer que la suite $(F_n)_{n\geqslant 0}$ converge en loi . Quelle est la limite ?
   (f) Déterminer le premier entier n tel que $\mathrm{P}(F_n=0 \text{ ou } F_n=1)>0,95$.
15. Quel lien peut-on faire entre les matrices A et B ?
16. (a) Monter que la loi de X_n est donéne par :
   $\mathrm{P}(X_n=0)=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2}{9}\right)^n$ $\mathrm{P}(X_n=1)=\dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\left(\dfrac{2}{9}\right)^n\right)$
   $\mathrm{P}(X_n=2)=\dfrac{1}{2}\left(\left(\dfrac{2}{3}\right)^n-\left(\dfrac{2}{9}\right)^n\right)$ $\mathrm{P}(X_n=3)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2}{3}\right)^n+\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{2}{9}\right)^n$
   (b) Retrouver le résultat de la question 14.e.
17. On définit la variable aléatoire T par :
   - si pour tout entier n, $(X_n\neq 0)$ et $(X_n\neq 3)$, alors $T=0$
   - sinon, $T=n$ où n ets le plus petit entier k tel que $(X_k=0)$ ou $(X_k=3)$

   On pose pour tout entier n, $a_n=\mathrm{P}(X_n=1)+p(X_n=2)$
   (a) Montrer que pour tout entier n non nul, $\mathrm{P}(T=n)=a_{n-1}-a_n$. Que vaut $\mathrm{P}(T=0)$?
   (b) Reconnaitre la loi de T et donner $E(T)$

18. Pour tout entier n non nul, on définit l'événement $B_n = \bigcap_{k=1}^{n} (X_k \leqslant 1)$

On pose $x_1 = \mathrm{P}(X_1 = 0)$, pour tout entier k supérieur ou égal à 2,
$x_k = \mathrm{P}(X_1 = 1, \ldots, X_{k-1} = 1, X_k = 0)$, et pour tout entier k non nul,
$y_k = \mathrm{P}(X_1 = 1, \ldots, X_{k-1} = 1, X_k = 1)$

   (a) Exprimer pour tout entier k non nul, x_{k+1} et y_{k+1} en fonction de y_k. En déduire les valeurs de x_n et y_n pour tout entier n non nul.

   (b) Montrer que $\mathrm{P}(B_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k + y_n$. En déduire $\mathrm{P}(B_n)$ et la limite de la suite $(\mathrm{P}(B_n))_{n \geqslant 1}$

   (c) En déduire la probabilté qu'il existe un entier n vérifiant $F_n \geqslant 0,5$