Systèmes différentiels

I. Correction d'exercices

Exercice n°1

Résoudre les équations différentielles suivantes.

1. $y' = y + 1$
2. $y' = 3y + \mathrm{e}^{3x}$
3. $y' = 2y + \mathrm{e}^{2x}(1 + x)$
4. $7y' + 2y = 2x^3 - 5x^2 + 4x - 1$
5. $y' = -y + x\mathrm{e}^x$
6. $y' = 2y + 2x^2 - 1$

1. On cherche des fonctions $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ qui vérifient l'équation.
   - Résolution de l'équation homogène :
   $$(E_H) : \quad y' - y = 0$$
   L'ensemble des solutions de l'équation homogène est
   $$S_H = \left\{ t \mapsto \lambda e^t \,|\, \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$
   - Recherche d'une solution particulière :
   On observe rapidement que $y_p : t \mapsto -1$ est une solution particulière. Elle est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   $$y_p'(t) - y_p(t) = 0 - (-1) = 1$$
   - Conclusion :
   L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est
   $$\boxed{S = \left\{ t \mapsto \lambda e^t - 1 \,|\, \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$
2. On cherche des fonctions $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ qui vérifient l'équation.
   - Résolution de l'équation homogène :
   $$(E_H) : \quad y' - 3y = 0$$
   L'ensemble des solutions de l'équation homogène est
   $$S_H = \left\{ t \mapsto \lambda e^{3t} \,|\, \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$
   - Recherche d'une solution particulière :
   On cherche une solution sous la forme $y_p : t \mapsto \alpha(t)e^{3t}$, $\alpha \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et appliquer la méthode de variation de la constante. Cette fonction est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:
   $$y_p'(t) - 3y_p(t) = e^{3x} \Leftrightarrow \alpha'(t)e^{3t} + 3\alpha(t)e^{3t} - 3\alpha(t)e^{3t} = e^{3t} \Leftrightarrow \alpha'(t) = 1$$
   On pose alors $\alpha : t \mapsto t$ et une solution particulière est $y_p : t \mapsto te^{3t}$.
   - Conclusion :
   L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est
   $$\boxed{S = \left\{ t \mapsto \lambda e^{3t} + te^{3t} \,|\, \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

3. On cherche des fonctions $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ qui vérifient l'équation.
   - Résolution de l'équation homogène :

     $$(E_H) : \quad y' - 2y = 0$$

     L'ensemble des solutions de l'équation homogène est

     $$S_H = \left\{t \mapsto \lambda e^{2t} \,|\, \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

   - Recherche d'une solution particulière :
     On cherche une solution sous la forme $y_p : t \mapsto (at^2+bt+c)e^{2t}$, $(a,b) \in \mathbb{R}$. Cette fonction est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

     $$y_p'(t) - 2y_p(t) = e^{2t}(1+t) \Leftrightarrow (2at+b)e^{2t} + (at^2+bt+c)2e^{2t} - 2(at^2+bt+c)e^{2t} = e^{2t}(1+t) \Leftrightarrow b = 1 \text{ et } a = 1/2$$

     La constante c peut être prise quelconque. Une solution particulière est $y_p : t \mapsto \left(1 + \dfrac{t}{2}\right) e^{2t}$.
   - Conclusion :
     L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

     $$\boxed{S = \left\{t \mapsto \lambda e^{2t} \left(1 + \frac{t}{2}\right) e^{2t} \,|\, \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

4. On cherche des fonctions $y \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ qui vérifient l'équation :

   $$y' + \frac{2y}{7} = \frac{1}{7}\left(2x^3 - 5x^2 + 4x - 1\right)$$

   - Résolution de l'équation homogène :

     $$(E_H) : \quad y' + \frac{2y}{7} = 0$$

     L'ensemble des solutions de l'équation homogène est

     $$S_H = \left\{t \mapsto \lambda e^{-2t/7} \,|\, \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

   - Recherche d'une solution particulière :
     On cherche une solution sous la forme $y_p : t \mapsto (at^3 + bt^2 + ct + d)$, $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}$. Cette fonction est bien de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$:

     $$\begin{aligned} 7y_p'(t) + 2y_p(t) = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 1 &\Leftrightarrow 7(3at^2 + 2bt + c) + 2\left(at^3 + bt^2 + ct + d\right) = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 1 \\ &\Leftrightarrow 2at^3 + (21a + 2b)t^2 + (14b + 2c)t + 7c + d = 2t^3 - 5t^2 + 4t - 1 \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} a &= 1 \\ b &= -13 \\ c &= -89 \\ d &= -624 \end{cases} \end{aligned}$$

     La constante c peut être prise quelconque. Une solution particulière est $y_p : t \mapsto t^3 - 12t^2 - 89t - 624$.
   - Conclusion :
     L'ensemble des solutions de l'équation différentielle est

     $$\boxed{S = \left\{t \mapsto \lambda e^{-2t/7} + t^3 - 12t^2 - 89t - 624 \,|\, \forall \lambda \in \mathbb{R} \right\}}$$

Exercice n°19

1. Les fonctions u et g sont continues sur $[a,b]$ donc par produit et composition, $t \mapsto |u(t)|g(t)$ est continue sur $[a,b]$. D'après le théorème fondamental de l'analyse, les fonctions

   $$t \mapsto \int_a^x |u(t)|g(t)\,\mathrm{d}t \qquad t \mapsto \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

sont de classe C^1 sur $[a,b]$, et donc par somme, produit et composition, les fonctions v et w sont de classe C^1 sur $[a,b]$. Pour tout $x \in [a,b]$:

$$\begin{aligned}
w'(x) &= v'(x)\exp\left(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right) + v(x)(-g(x))\exp\left(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= (v'(x) - g(x)v(x))\exp\left(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \underbrace{\left(|u(x)| - c - \int_a^x |u(t)|g(t)\,\mathrm{d}t\right)}_{\leq 0 \text{ d'après l'énoncé} <} g(x)\exp\left(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)
\end{aligned}$$

Comme g est positive sur $[a,b]$, on en déduit que $w'(x) \leq 0$ et donc que $\boxed{w \text{ est décroissante sur } [a,b].}$

2. Comme w est décroissante sur $[a,b]$, pour tout $x \in [a,b]$, $w(x) \leq w(a)$ où $w(a) = v(a)exp(0) = c$. Ainsi

$$v(x)\exp\left(-\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right) \leq c \text{ ou encore } v(x) \leq c\exp\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)$$

En combinant avec l'inégalité donnée dans l'énoncé, on trouve

$$\boxed{|u(x) \leq v(x) \leq c\exp\left(\int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)}$$