THÉORIE DES GRAPHES - ESSENTIEL

I. VOCABULAIRE DE BASE

Définition 1.1

- Un **graphe** est un ensemble constitué de points et de segments reliant certains de ces points. Ces points sont appelés **sommets** du graphe et les segments sont appelés **arrêtes** du graphes.
- Deux sommets reliés par une arête sont dits : **adjacents**
- Une arête reliant un sommet à lui même est appelée : **boucle**
- Un sommet qui n'est relié à aucun autre sommet est dit : **isolé**
- On appelle **ordre** d'un graphe le nombre de sommets.
- On appelle **degré** d'un sommet le nombre de d'arêtes reliées à ce segment .

Remarques :

R1 – Une boucle part d'un sommet pour y revenir. Dans le calcul du degré d'un sommet, elle compte double.

R2 – Ces boucles interviennent surtout dans les graphes liés aux études probabilistes.

Théorème 1.2 — Formule d'Euler, ou formule des poignées de main

Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^*$. On considère un graphe d'ordre n, ayant p arêtes. On note $S_1, S_2, ..., S_n$ les sommets du graphe, $d_1, d_2, ..., d_n$ leurs degrés respectifs. Alors

Autrement dit, la somme des degrés est le double du nombre d'arêtes.

Remarques :

R1 – On remarque que la somme des degrés est toujours pair.

R2 – Le nombre de sommets qui ont un degré impair est pair.

Définition 1.3

- Un graphe est dit **complet** si chaque sommet est adjacent à tous les autres.
- Un graphe est dit **orienté** lorsque chaque arrête est dirigée d'un sommet à l'autre à l'aide d'une flèche.

Attention:

La formule d'Euler précédente ne s'applique pas aux graphes orientés. Elle prend la forme suivante (Hors-Programme) :

$$\sum_{s\in G} \deg^+(s) + \sum_{s\in G} \deg^-(s) = n$$

où $\deg^+(s)$ est le nombre d'arc entrant vers le sommet s, et $\deg^-(s)$ est le nombre d'arc sortant du sommet s, et

Remarque :

Dans certaines situations, notamment dans des études probabilités, on est amené à étudier des graphes dans lesquels chaque arrête est pondérée. On parle alors de **graphe pondéré.**.

II. Graphes eulériens, graphes connexes

II. 1 Chaines

Définition 2.1

On appelle **chaîne** ou chemin toute liste de sommets, dans laquelle deux sommets consécutifs sont reliés par une arrête.
La chaîne est dite **fermée** lorsque le sommet initial et le sommet final sont les mêmes .
On appelle **cycle** toute chaîne fermée dans laquelle chaque arrête n'est parcourue qu'une seule fois.

II. 2 Graphe eulérien

Définition 2.2

Une chaîne **eulérienne** est une chaîne contenant toutes les arrêtes du graphe, chacun étant parcourue une seule fois.
Un **cycle eulérien** est une chaîne eulérienne fermée.

Définition 2.3

On dit qu'une graphe est **eulérien** si il contient au moins un cycle eulérien.

II. 3 Graphe connexe

Définition 2.4

On dit qu'une graphe est **connexe** si tout sommet est relié à n'importe quel autre par au moins une chaîne.

Théorème 2.5

Soit G un graphe connexe.

1. G possède une chaîne eulérienne entre deux sommets si et seulement si ces deux sommets sont les seuls de la chaîne à avoir un degré impair.
2. G est un graphe eulérien si et seulement si tous les sommes sont de degré pair.

Méthode :

Pour prouver la connexité d'un graphe, il suffit de trouver une chaîne qui passe par tous les sommets.

III. Matrices d'adjacence

III. 1 Longueur d'une chaine

Définition 3.1

On appelle **longueur d'une chaine** le nombre d'arêtes qui la composent.
On appelle **distance** entre deux sommets la longueur minimale parmi toutes les chaînes reliant ces sommets.
On appelle **diamètre** d'un graphe, la plus grande distance entre deux sommets.

III. 2 Matrices d'adjacence

Définition 3.2

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et G un graphe *non orienté* dont les sommets sont les éléments de $[|1;n|]$.
On appelle **matrice d'adjacence** du graphe G, la matrice M de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $(i,j) \in [|1;n|]^2$,

$$m_{i,j} = \text{nombre de chaîne de longueur } 1 \text{ entre les sommets } i \text{ et } j$$

Remarques :

- **R1 –** Autrement dit le coefficient $m_{i,j}$ vaut 1 si les sommets i et j sont adjacents, 0 sinon.
- **R2 –** Si les sommets sont notés par des lettres, on les numérote en suivant l'ordre alphabétique.
- **R3 –** **Si le graphe est orienté**, le coefficient $m_{i,j}$ est égal au nombre de chaînes de longueur 1 partant du sommet i pour aller au sommet j.

Remarque :

Dans le cas d'un graphe non orienté, une arête entre i et j est comptée deux fois : pour aller de i à j (dans $m_{i,j}$) et pour aller de j à i (dans $m_{j,i}$).

Théorème 3.3

La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est **symétrique** .

III. 3 Nombre de chaînes entre deux sommets

Proposition 3.4

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, et G un graphe *non orienté* dont les sommets sont les éléments de $[|1;n|]$. On note M la matrice d'adjacence de G.

Soit $d \in [|1;n|]$. Pour tout $(i,j) \in [|1;n|]^2$, le coefficient de la i-ème ligne j-ème colonne de M^d est égal au nombre de chaînes de longueur d reliant les sommets i et j.

Remarque :

Si le graphe est orienté, le coefficient de la $i$ème ligne $j$ème colonne de M^d est égal au nombre de chaînes de longueur d partant du sommet i pour aller au sommet j.

Théorème 3.5

Si G est un graphe (*orienté ou non*) dont les sommets sont les éléments de $[|1;n|]$, de matrice d'adjacence M, alors

$$G \text{ connexe } \Leftrightarrow I + M + M^2 + \ldots + M^{n-1} \text{ a tous ses coefficients strictement positifs}$$