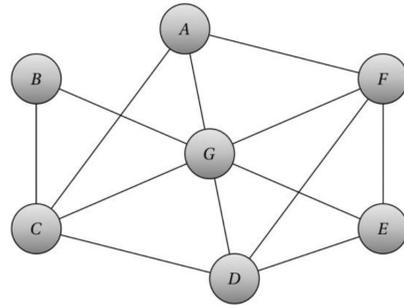


 EXERCICE 1

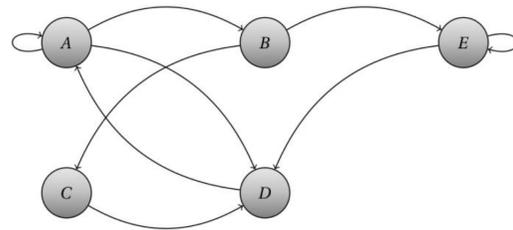
On considère le graphe Γ suivant



1. Justifier la connexité de Γ .
2. Donner le degré de chacun des sommets et en déduire le nombre d'arêtes.
3. Est-il possible de parcourir toutes les arêtes de Γ sans passer plus d'une fois par la même arête? Si oui, donner un parcours possible.
4. Donner une chaîne de longueur 5 reliant A et B .
5. Donner la matrice d'adjacence du graphe Γ .

 EXERCICE 2

On considère le graphe G suivant



1. Donner tous les chemins de longueur 4 allant de A vers E .
2. Donner la matrice d'adjacence de G .

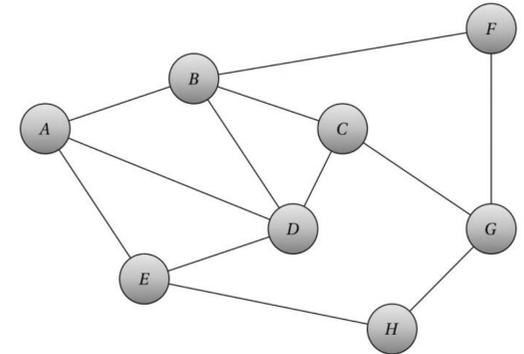
3. On donne $M^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. À l'aide d'un seul calcul, retrouver le résultat de la question 1.

4. On considère le graphe G' ayant les mêmes sommets que G , de matrice d'adjacence

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \text{ En laissant les sommets de } G \text{ dans leur position initiale, tracer les arêtes de } G'.$$

 EXERCICE 3

Une compagnie aérienne dessert huit aéroports nommés A, B, C, D, E, F, G et H . Le trafic aérien de cette compagnie est schématisé par le graphe G dans lequel :



- les sommets représentent les aéroports.
- les arêtes représentent les liaisons assurées dans les deux sens par la compagnie.

1. Déterminer, en le justifiant, si le graphe G est connexe.
2. Déterminer, en le justifiant, si le graphe G admet une chaîne eulérienne.
3. Donner la matrice d'adjacence M de G en respectant l'ordre alphabétique des sommets du graphe.
4. On donne M^2 et M^3 :

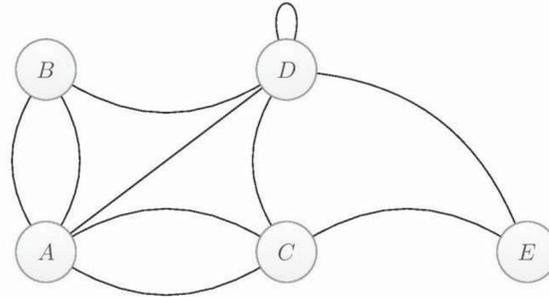
$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 8 & 8 & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 7 & 6 & 7 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 3 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 1 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Un voyageur souhaite aller de l'aéroport B à l'aéroport H .

- (a) Déterminer, en le justifiant, le nombre minimal de vols qu'il doit prendre.
- (b) Donner tous les trajets possibles empruntant trois vols successifs.

EXERCICE 4

Cinq étudiants habitent dans la même ville, mais en des lieux distincts que l'on représentera par des sommets A, B, C, D et E . Ils décident de s'entraîner à la course à pied. La situation géographique est modélisé par la graphe Γ :

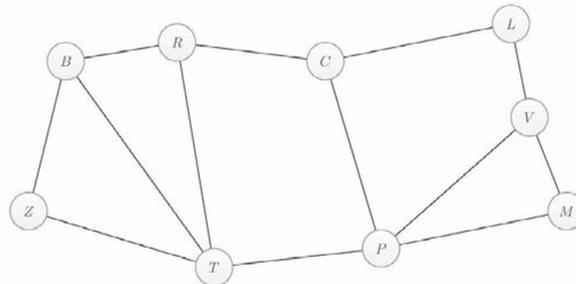


Pour faciliter les calculs, on suppose que chaque arête représente 2,5 km.

1. Ecrire la matrice d'adjacence de G .
2. Expliquer comment, à l'aide d'une matrice, on peut trouver l'étudiant qui peut rendre visite au plus grand nombre d'amis en ne parcourant que 2,5 km.
3. (a) Anatole, qui habite en A , cherche à connaître combien de boucles différentes de 10 km il peut faire. Pouvez-vous l'aider ?
(b) Quel étudiant dispose du plus faible nombre de boucles de 10 km ?

EXERCICE 5

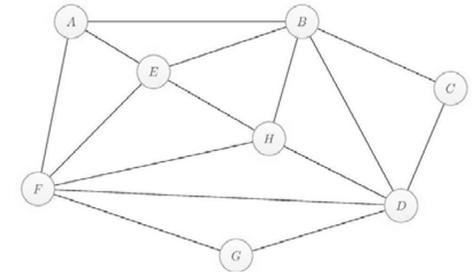
Le graphe G ci-contre représente les autoroutes entre certaines villes du sud de la France : Bordeaux (B), Clermont-Ferrand (C), Lyon (L), Marseille (M), Montpellier (P), Brive (R), Valence (V), et Biarritz (Z).



1. (a) Déterminer l'ordre de ce graphe.
(b) Ce graphe est-il connexe ?
(c) Ce graphe est-il complet ?
2. Déterminer le degré de chaque sommet. Ce graphe admet-il une chaîne eulérienne ? un cycle eulérien ?
3. Un touriste atterrit à l'aéroport de Lyon et loue une voiture. Déterminer en justifiant, s'il pourra visiter toutes les villes en empruntant une et une seule fois chaque autoroute. Donner un parcours possible.

EXERCICE 6

Une coopérative fruitière collecte du lait dans 7 exploitations de Laguiole. La situation géographique est représentée par le graphe ci-contre. La coopérative est située sur le sommet A , les autres sommets représentent les différentes exploitations et les arêtes représentent le réseau routier reliant ces exploitations.



Notons

M la matrice d'adjacence associée.

1. Montrer que ce graphe est connexe.
2. Ce graphe est-il complet ?
3. Sans la construire, justifier que chaque ligne et chaque colonne de M a au moins deux coefficients nuls.
4. La matrice M^2 a-t-elle des coefficients non nuls ?

5. On donne la matrice $M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 11 & 3 & 7 & 8 & 11 & 3 & 6 \\ 11 & 8 & 7 & 13 & 12 & 8 & 6 & 13 \\ 3 & 7 & 2 & 7 & 5 & 6 & 2 & 4 \\ 7 & 13 & 7 & 8 & 8 & 13 & 7 & 12 \\ 8 & 12 & 5 & 8 & 8 & 12 & 5 & 11 \\ 11 & 8 & 6 & 13 & 12 & 8 & 7 & 13 \\ 3 & 6 & 2 & 7 & 5 & 7 & 2 & 4 \\ 6 & 13 & 4 & 12 & 11 & 13 & 4 & 8 \end{pmatrix}$. Déterminer le nombre de chemins de longueur 3 allant de A à H .